Mechanika
2017/2018

1. Anyagi pont kinematikája

- fizika: kísérleti tudomány

→ a kísérleti eredmények sosem abszolút igazságot fejeznek ki (bizonyos határokon belül érvényesek) fiz. elméletek

- fizikai mérés:
  - az eredménye pl. szám (matematikai obj.)
  - matematikai elméletet kapunk
    = fizikai elmélet a matematika nyelvén (oda-vissza)

- fizikai mennyiség:
  olyan menny., amelyhez mérőszámot tudok rendelni valamilyen eljárással.

  → mértékegység (dimenzió): definiál egy mérési eljárást

- SI mértékrendszer: mérési eljárások egységesítése a világ minden pontján

a más.-i egyenleteknek dimenzionálisan konzisztensnek kell lenniük

- származtatott fiz. menny.:
  pl. sebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$

  → le kell mérnem hozzá valamilyen távolságot, időt

SI alapmennyiségek: +

- hosszúság
- tömeg
- idő
- áramerősség
- hőmérséklet
- anyagmenny.
- fényerősség

Kieg. egységei: +

- síkszög [rad]
- térszög [sr] szteradián

Idő: 1 s

→ régen a Föld forgásából származtatták, de nem volt pontos (ingása van)

- cézium-atom (Cs)
  vagyis: alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás
  ≈ $9 \cdot 10^9$ periódusának időtartama

Távolság: 1 m

- méterrúd, Párizs
- métermeghat.:
  Bay Zoltán, 1983
  → távolság, amit a fény $\sim \frac{1}{3 \cdot 10^8}$ s alatt megtesz vákuumban

+ Mérési hibák: a mérésnek mindig van hibája (pl. leolvasási: műszer pontossága, szálakás)

Kinematika: mozgás leírása

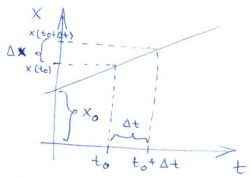
1. egyenes vonalú mozgások: 1D-s mozgások

- kell a mérésbe rögzítenem:

  1. referenciapontot (távolság mérése)
     → koordináta-rendszer
  (nem lehet önmagához képest mérni)
  2. mértékegységet

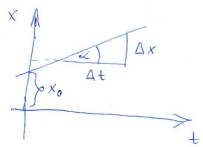
Egyenes vonalú egyenletes mozg.:

- a megtett út és a közben eltelt idő egyenesen arányos



$$\boxed{x(t) = x_0 + v \cdot t}$$

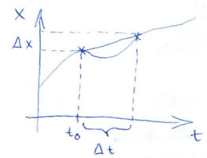
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{(t_0+\Delta t) - t_0} = \frac{v(t_0+\Delta t) + x_0 - (v \cdot t_0 + x_0)}{\Delta t} = v \text{ : seb.}$$



$$\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha}$$ ← az egyenes meredeksége

A sebesség: - előjeles mennyiség
  → függ attól, hogyan rögzítem a koordináta-rendszert
- nagysága: abszolút értéke

Átlagseb.:

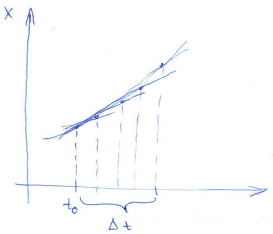


$$\boxed{v_{átl}(t_0, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}}$$

- előjeles menny.

EVEM: $a(t)=0$

Pillanatnyi seb.:



→ egyre kisebb távokat veszek

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{átl}}(t_0,\Delta t)$$

→ végtelen rövid időre számított átlagseb.
(egy ponthoz tart)

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozg.

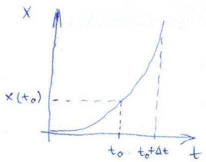
$x(t)=k\cdot t^2$

$$\hookrightarrow v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{k(t_0+\Delta t)^2-k(t_0)^2}{\Delta t}=$$

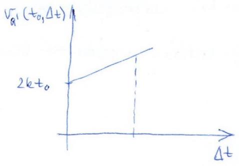
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{k(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)-kt_0^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2kt_0\Delta t+k(\Delta t)^2}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\underbrace{(2kt_0+k\Delta t)}_{v_{\text{átl}}(t_0,\Delta t)}=2kt_0$$

↓ mivel $\Delta t\to 0$



$x(t)=kt^2$

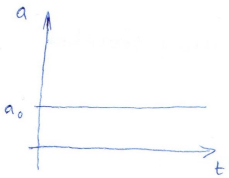


$v(t)=2kt^2$

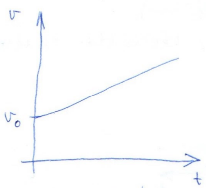
Gyorsulás:

$$a(t)=\dot v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=(\dot x(t))^{\cdot}=\ddot x(t)$$

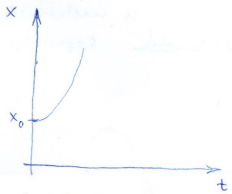
$[a]=\frac{m}{s^2}$



$a(0)=a_0$
~~$a(t)$~~



meredeksége: a_0
$v(0)=v_0$
$v(t)=v_0+a_0\cdot t$



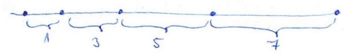
kezdetben a meredeksége: v_0
$x(0)=x_0$
$x(t)=x_0+v_0\cdot t+\frac{a_0}{2}\cdot t^2$

(~~Kitbe~~)

Szabadesés:

1. Kísérlet: ejtőzsinóros kísérlet

- távolságok: 1, 3, 5, 7



ha
- egyenlő időközönként vannak a golyók:
  egyre gyorsabb koppanás hallatszik
- úgy kell elengedni a zsinórt, hogy az alsó golyó pont érje a padlót

→ EVEGYM

2. Pohlványi-féle ejtőgép

- 10 golyó esési idejét mérjük → a pontossága tízszer akkora lesz
  +1 : indítja

→ mechanikus óra (T_{10})

$$h=\frac{g}{2}T_1^2\to g=\frac{2h}{T_1^2}$$

Rezgőmozgás

- olyan 1D-s egyenes vonalú mozgás, ami periodikus

$x(t+T)=x(t)$ (T után ugyanott lesz)

T: periódusidő

Harmonikus rezgőmozgás

$\boxed{x(t)\sim\sin}$

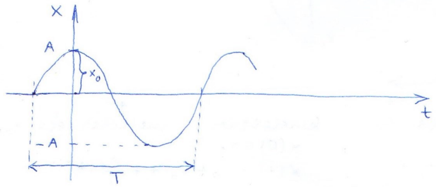
$$x(t)=A\sin(\underbrace{\omega t+\varphi}_{\text{rad}})$$

$[\omega]=\frac{1}{s}$: körfrekvencia, $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$[\varphi]=1$: szögelford.

$[A]=m$ (meg kell szorozni egy olyan számmal, amelynek a mértékegysége m)

: amplitúdó: legnagyobb / legkisebb érték, amit felvehet



$$A \sin(\omega(t+T)+\varphi) = A \sin(\omega t+\varphi)$$

$$A \sin(\underbrace{\omega t+\varphi+\omega T}) = A \sin(\underbrace{\omega t+\varphi})$$

$$\cancel{\omega t+\varphi}+\omega T = \cancel{\omega t} + \cancel{\varphi} + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

minél szaporább, annál kisebb T
annál nagyobb ω

- diff. egyenlet:
  a mozgás megadható egy egyenlettel, amiben a derivált is szerepel

A harmonikus rezgőmozgást leíró diff. egyenletek:

$$x(t) = A \sin(\omega t+\varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t+\varphi) + x_0$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t+\varphi)$$

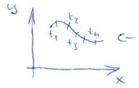
II. Anyagi pont kinematikája

Térbeli mozgások leírása

Hely:

1D-ben:

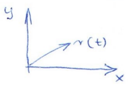
$$\underline{r}(t) = (x(t))$$



← a test pályája

2D-ben:

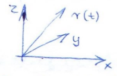
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



3D-ben:

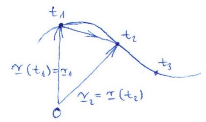
$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

→ a test koordinátái egy Descartes-kr.-ben



(jobb sodrású)

Sebesség



$$\Delta \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

Δr: relatív elmozdulás

$$\underline{v}_{\acute{a}tl}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\underline{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \underline{v}_{\acute{a}tl}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} x(t+\Delta t) - x(t) \\ y(t+\Delta t) - y(t) \\ z(t+\Delta t) - z(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \\ \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t)$$

$$v_z(t) = \dot{z}(t)$$

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Gyorsulás:

$$\underline{a}(t) = \dot{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \ddot{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{v}(t+\Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t}$$

↓

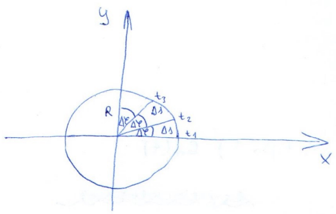
pillanatnyi gyorsulás

$$a = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- a gyorsulás a sebesség sebessége

Körmozgás: 1. Egyenletes körmozg.

- ha a mozgás körpályán történik, akkor körmozgásról beszélünk



R: sugár

ω: szögsebesség

$$\omega_0 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$ egységnyi idő alatt mekkora szöget tesz meg

$$[\omega] = \frac{1}{s} = \frac{rad}{s}$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \omega_0 = \text{áll.}$$

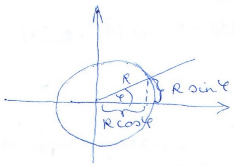
Δs: ívhossz

$$\Delta s = \Delta\varphi \cdot R$$

seb. $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega_0$

gyors. $a = R \cdot \omega_0^2 = \frac{v^2}{R}$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\varphi(t)) \\ R\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} [R\cos(\varphi(t))]^{\cdot} \\ [R\sin(\varphi(t))]^{\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \\ R\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= R\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = R\,\omega(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

$$v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{R^2 \cdot \omega(t)} = R\,|\omega(t)|$$

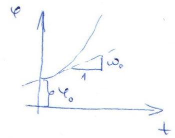
↳ mivel az ω előjeles mennyiség, de pozitívnak kell lennie

$$\underline{a}(t) = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t) = \begin{pmatrix} [-R\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t))]^{\cdot} \\ [R\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t))]^{\cdot} \end{pmatrix} =$$

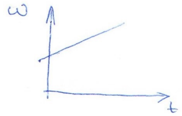
$$= \begin{pmatrix} -R\ddot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) - R\dot{\varphi}(t)^2\cos(\varphi(t)) \\ R\ddot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) - R\dot{\varphi}(t)^2\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= R\,\beta(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} - R\,\omega(t)^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

Egyenletesen gyorsuló körmozg.



$$\Rightarrow \beta(t) = \beta_0 = \text{áll.}$$



$$\omega(t) = \omega_0 + \beta_0 t = \dot{\varphi}(t)$$

$$\varphi(t) = \frac{\beta_0}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\underline{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\frac{\beta}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \\ \sin(\frac{\beta}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0) \end{pmatrix}$$

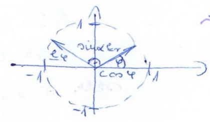
$$\underline{v}(t) = R\,(\beta_0 t + \omega_0) \cdot \underline{e}_\varphi(t)$$

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_{tg}(t) + \underline{a}_{cp}(t) = R \cdot \beta_0 \cdot \underline{e}_\varphi(t) - R \cdot (\omega_0 + \beta_0 \cdot t)^2\,\underline{e}_r(t)$$

Egyenletes körmozg.:

$$\underline{v}(t) = R \cdot \omega_0\,\underline{e}_\varphi(t)$$

$$\underline{a}(t) = -R \cdot \omega_0^2 \cdot \underline{e}_r(t)$$



egységvektorok:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\underline{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}(t) = R \cdot \underline{e}_r(t)$$

$$\underline{v}(t) = R \cdot \omega(t) \cdot \underline{e}_\varphi(t)$$

$$\underline{a}(t) = R \cdot \beta(t) \cdot \underline{e}_\varphi(t) - R \cdot \omega(t)^2 \cdot \underline{e}_r(t)$$

→ a gyorsulás két komponense:

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_{tg} + \underline{a}_{cp}(t)$$

tangenc. $\underline{a}_{tg} = R \cdot \beta(t) \cdot \underline{e}_\varphi(t) = \dot{v}(t)\,\underline{e}_\varphi(t)$

pillanatnyi seb.

centripet. $\underline{a}_{cp} = -R\,\omega(t)^2 \cdot \underline{e}_r(t) = -\frac{R^2\omega(t)^2}{R} \cdot \underline{e}_r(t) = -\frac{v(t)^2}{R}\,\underline{e}_r(t)$

- tangenciális gyorsulása akkor van, ha a seb. nagysága megváltozik. (a seb. irányába mutat, ha gyorsul, akkor vele ellentétes érintő irányú)
- centripetális: a seb. ~~(nagyságának)~~ irányának megváltozását jellemzi
  ↳ merőleges a sebességre

Speciális koord.-r.:

1. Síkbeli polárkoordináta-rendszer

$$\boxed{(x,y) \Leftrightarrow (r,\varphi)}$$

$0 \leq r$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

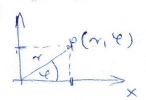
$$(x,y) \Leftrightarrow (r,\varphi) \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{array}$$

Polár koordinátás alak

$r(t), \varphi(t)$: akkor használom, ha egyszerűbb vele dolgozni

→ Körmozgásnál: $r(t) = R$

$\varphi(t) = \varphi(t)$



r: origótól mért táv.

φ: tengelytől mért szög

- van egy kitüntetett pont pl. bolygók mozgása különösen

→ körmozgásnál előnyös, ha az origót a kör közepén vesszük fel

~~(A ferde hajítás)~~

Ferde hajítás:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y_0 + v_{0y} \cdot t \\ z_0 + v_{0z} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\underline{r}} = g$$

$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t$

$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$v_x(t) = \dot{x}(t) = v_{0x} = \text{áll.}$

$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t = \dot{y}(t)$

$a_x(t) = 0$

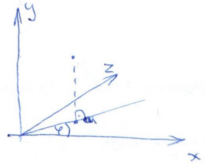
$a_y(t) = -g$ (konstans)

2. Hengerkoordináta-rendszer

→ tengelyszimmetrikus (kitüntetett tengelye van: z)

- térben 3 adatot ad meg

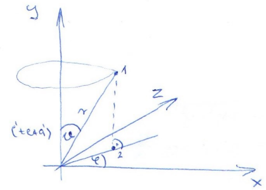
$$\boxed{(x,y,z) \Leftrightarrow (\rho,\varphi,z)} \Leftrightarrow: \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \Leftrightarrow: \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ z = z \end{array}$$



- levetítem a pontot az x-y síkra
→ merőleges rá
- hossza: ρ
- szöge: φ

3. Gömbkoord.-r.

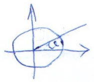
→ gömbszimm.



(*)

$$\boxed{(x,y,z) \Leftrightarrow (r,\varphi,\vartheta)} \Leftrightarrow: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\cos\vartheta \end{array} \Leftrightarrow: \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \\ \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{array}$$

→ az r és a ϑ kijelöl egy kört

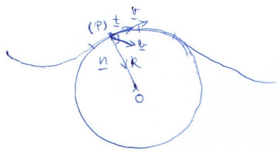


$0 < r$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$0 \leq \vartheta < \pi$

A mozgások leírása természetes koordináta-rendszerben



$\underline{t}$: egységvektor (tangenciális: érintő irányú)

$\underline{v} = v \cdot \underline{t}$

$\underline{n}$: egységvektor, $\underline{n} \perp \underline{t}$, (normális = merőleges)

a simulókör középpontja felé mutat

$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$ → így lesz mindkettőre merőleges

(binomiális = mindkettőre merőleges)

*

- a $\underline{t}$ és az $\underline{n}$ a pálya simulósíkját hat. meg
→ erre merőleges a binomiális egységvektor

~~(a →)~~ * a pályát egy körrel közelítjük meg = simulókör

→ 3 pont határozza meg (a 3 pont tart P ponthoz)

- ki van tüntetve egy sík, ami a simulókör síkja

$\underline{r} = 0$

$\underline{v} = v \cdot \underline{t}$

$\underline{a} = \dot{v} \cdot \underline{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}$ (, mivel $\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_{cp}$) [$\underline{a}_{cp} = \underline{a}_n$]

- általános görbe vonalú mozgás esetén a gyorsulásnak 2 komponense van:
  - a tangenciális (seb. nagyságának vált.-t írja le)
  - a centripetális (seb. irányának vált.-t írja le)

$(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$: kísérő triéder (együtt mozog a testtel)

forogva követi a mozgó pontot

III. Tömegpont dinamikája

- Kölcsönhatás:
  a testek hatnak egymásra, bizonyos esetekben befolyásolják egymás mozgását
  - gravitáció
  - súrlódás
  - közegellenállás
  - rugalmas → rugóerő
    → ütközés
- Inerciarendszer:
  mindig található olyan koordináta-rendszer, amelyben (~~a minden testtől távol elhelyezett~~) a testek nyugalomban vannak vagy EVEM-t végeznek. (a test sebessége valóban áll.)
  (: Newton 1. tv.-e)
  pl. a Nap az
- Mozgásegyenlet:
  - diff.-egyenlet megadja az összes lehetséges mozgást

$$\underline{r}(0) = \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(0) = \underline{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

} kezdeti feltételek:
hely és seb. $t = 0$-ban
⇒ konkrét mozgás leírásához kellenek

→ Diff-egyenlet: másodrendű (: második derivált van benne)

→ kezdeti feltétel ↔ 6 adat kell (: 6 állandót kell megadni)

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$
$$m\ddot{y} \;\ldots$$
$$m\ddot{z}$$

→ az egyenletek megoldásával kapjuk az $\underline{r}(t)$ fgv.-t
- ebből kideríthető, hogy mozog a test: azaz melyik időpillanatban hol tartózkodik

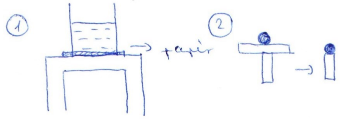
$$\ddot{r} = \underline{\tilde{a}}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t, \ldots, \cancel{\underline{\ddot{r}}, \dddot{\underline{r}}})$$

Tehetetlenség:

- a testek tulajdonsága: mozgással szembeni ellenállás

→ A tehetetlenség tv.-e:

Minden test ~~megtartja~~ mindaddig megtartja nyugalmi állapotát v. EVEM-t végez, amíg más testekkel való kölcsönhatása annak megváltoztatására nem kényszeríti.



① : annál könnyebb megcsinálni ezt a kísérletet, minél több vizet öntünk bele
→ annál tehetetlenebb, nehéz mozgásba hozni

A tömeg a tehetetlenség mértéke.

Szuperpozíció:

- erők függetlensége: az erők egymástól függetlenül fejtik ki a hatásukat, az erők sokasága helyettesíthető egy eredő erővel

$$\sum_i \underline{F}_i = \underline{F}_e \left(= \frac{d\underline{p}}{dt} \right)$$

Az eredő erő az egyes erők vektori összege.

Newton törvényei

I. Van inerciarendszer

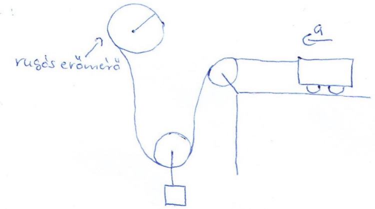
II. A dinamika alapegyenlete

$$\boxed{\underline{F} = m \cdot \underline{a}}$$

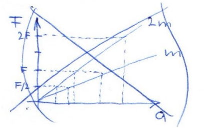
(~~[F] = erő~~) F: erő , $[F] = kg\,\frac{m}{s^2} = N$

- $F \sim a$, az arányossági tényező a testre jellemző mennyiség: a tehetetlen tömeg (m)
- A test gyorsulása e.a. a rá ható erővel és fordítottan arányos a test tömegével } $\underline{a} = \frac{1}{m} \cdot \underline{F}$
- az erő mérhető rugós erőmérővel

Kísérlet:



- a nagyobb tömegű kocsit ua. a test nehezebben mozdítja el (nagyobb a tehetetlensége)

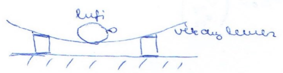


III. Hatás-ellenhatás

- természetben az erők párban keletkeznek:
  - egyidejűleg
  - közös hatásvonalon
  - ellentétes irányban
  - azonos nagysággal.

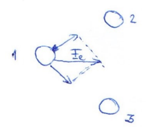
$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$ ($\underline{F}_{12}$: a kettes test hatása az egyes testre)

Kis:



Mindkettő hat a másikra:
- kölcsönösen látható a deformáció.

IV. Szuperpozíció elve



$$\underline{F}_e = \sum_i \underline{F}_i$$

- ezek a Newton tv.-ek tömegpontra vonatkoznak (rend. tömeggel, de a mérete kicsi)

Mozgásegyenlet meghatározásának és megoldásának lépései (Tömegpont dinamikája)

1. kiválasztunk egy inerciarendszert
2. felmérjük, hogy a tömegpontra milyen erőhatások hatnak
3. a kölcsönhatásokhoz tartoznak erőtörvények
   → hozzárendeljük őket
   → ezáltal meghat. az $\underline{F}_e(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t, \dots)$ erőt
4. felírjuk a mozgásegyenletet

$$\underline{F}_e = m \cdot \ddot{\underline{r}}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m} \underline{F}_e(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t, \dots)$$ → ebből $\underline{r}(t)$ fgv.-t azaz kiszámolni
↳ pl. tömeg, töltés, stb.

: másodrendű diff.-egyenlet

Egy fajtája:
pl. explicit: $\ddot{\underline{r}}$-ot ki tudom fejezni az egyenlőség egyik oldalán („legnagyobb" rendű derivált)
(pl. implicit: 0-ra rendezem az egyenletet)

5. megoldjuk a diff-egyenletet
→ végtelen sok megoldást kapunk
→ elvben van 2db? szabad paraméter
↳ mozgástól függ (1D, 2D, 3D)

6. 1 db konkrét megoldás a kezdeti feltételek alapján

$\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ → 6 db adat
$\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}_0$

$$\underline{r}(0) = \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}(0) = \underline{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

Pl.: - általános megoldás: végtelen sor (A és B helyére bármilyen vektor)

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{A} + \underline{B}\,t + \frac{1}{2} \cdot \underline{a}_0 \cdot t^2}$$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}_0$$

6db szabad paraméter

Kezdőfelt.: $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ $\quad \underline{r}_0 \to \underline{A}$
$\underline{v}(0) = \underline{v}_0$ $\quad \underline{v}_0 \to \underline{B}$

- konkrét megoldás:

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \underline{a}_0 \cdot t^2}$$

(mozgás homogén erőtérben) lsd. kör. tétel

IV. Tömegpont dinamikája II.

Nevezetes erőtörvények:

$\boxed{\text{Homogén erőtér}}$ → állandó erő

$\underline{F} = \underline{F}_0 = \text{áll.}$

$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{F}_0 = \underline{a}_0$ mozgásegyenlet homogén erőtér esetén

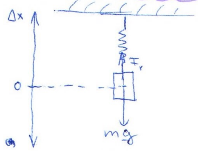
(mozgásegyenlet: másodrendű diff. egyenlet)

pl. nehézségi erő a Föld közelében

$\underline{F}_n = m \cdot \underline{a} = m \cdot \underline{g}$

$\ddot{\underline{r}} = \underline{g}$

Lineáris erőtörvény: pl. rugóerő



$F_e = m \cdot g - F_r = 0 \Rightarrow F_r = m \cdot g$

$F_r \sim \Delta x$ (arányos)

~~(felfüggesztett állapotban F_r nagysága vált., az iránya nem)~~

- az $m \cdot g$ miatt egy új egyensúlyi áll. jön létre

→ ekkor $F_r = -D \cdot \Delta x$ az új egyensúlyi állapothoz képest

(Δx: az új egyensúlyi állapothoz képest a rugó megnyúlása)

Kényszererők

- ~~(azon)~~ olyan erők, melyek úgy lépnek fel, hogy a mozgást biztosítsák
- mindig merőlegesek a (kényszer) pálya görbéjére vagy a felületre

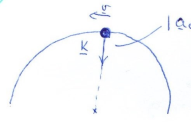
+ Kényszermozg.:
  - fonálinga lengése → nyújthatatlan fonál ált. meghat. görbére kényszeríti a test mozgását
  - asztalon guruló golyó → asztallap → felület (ezen fog mozogni)

Σ: ~~[illegible]~~ ezek kényszerek kényszerítő (kényszerítő hatást kif. testek)
pl. fonál, asztallap

→ az ált. kifej. erő: $\boxed{\text{kényszererő}}$

→ geometriai kényszerből fakadó erő

1. Spárga-kő



$|a_{cp}| = \frac{v^2}{R}$

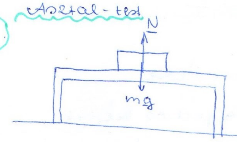
→ geometriai kényszer, hogy körpályán van

⇓

$|\underline{F}_{e,r}| = K = m\frac{v^2}{R} = F_{cp}$

↓ sugárirányú

2. Asztal-test

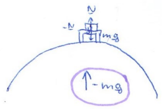


~ mintha az asztal egy ~~(geomet)~~ végtelenül merev test lenne, ami nem hagyja áthatolni magán a fatestet

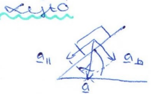
→ fontos: $\underline{N}$ és mg nem egymás ellenerejei

→ két külön kh., két külön objektummal

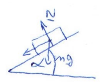
→ $\underline{N}$ ellenereje az asztalra hat ($-\underline{N}$)



3. Lejtő



$|a_{\perp}| = 0 \Rightarrow |F_{e\perp}| = 0$

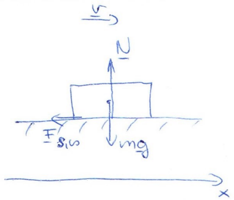


$|a_{\perp}| = 0 \Rightarrow |F_{e\perp}| = 0 \Rightarrow N = m \cdot g \cos\alpha$

α: dőlésszög

Súrlódás

1. Csúszási súrl.



$a = \text{áll.} \Rightarrow F = \text{áll.}$

$|a| = \mu_0 \cdot g$

μ_0: csúszási súrl.-i együttható

– csak az érintkező felületektől függ

Coulomb-féle súrlódási tv.

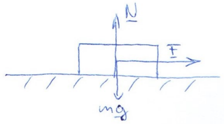
$$\boxed{\underline{F}_{s,cs} = (-)\mu_{cs} \cdot N \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}}$$

→ a két felület relatív sebessége

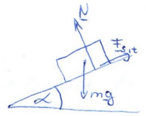
↳ egységvektor: (−1)

$\boxed{\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t, \dots)}$: ez az első erő, ami a seb.-től függ

2. Tapadási súrl.

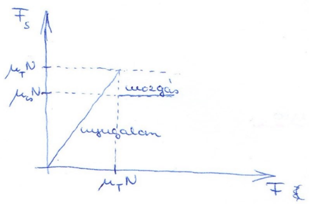


$F_{s,t,max} = \mu_T \cdot N$



$N = m \cdot g \cos\alpha$

$F_{s,t} = m \cdot g \sin\alpha$



$\boxed{\mu_{cs} < \mu_T}$

Közegellenállás

$\underline{F}_k \sim -\underline{v}$

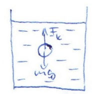
$\underline{F}_k = -k\underline{v} = -6\pi\eta r \cdot \underline{v}$ Stokes-tv.

η: közeg viszkozitása

(levegő < víz < méz)

Kís.: víznél sűrűbb folyadékba (glicerin) ejtünk gyöngyöket

→ nem szabadesés



$m \cdot \ddot{x} = -k\dot{x} - m \cdot g \quad /:m$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot \dot{x} - g$

Mozgásegyenletek felírása és megoldása

1. Szabadesés

$\ddot{\underline{r}} = \underline{g}$

$\boxed{\underline{F}_n = m \cdot \underline{a} = m \cdot \underline{g} = \text{áll.}}$

$\underline{F} = \underline{F}_0 = \text{áll.}$

$\boxed{\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{F}_0 = \underline{a}_0}$

$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{A} + \underline{B} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \underline{a}_0 \cdot t^2}$: ált. mo. (végtelen sor mo. A és B helyére)

$\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}_0$

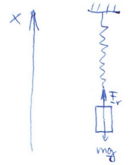
6 db szabad paraméter

Kezdőfelt.: $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ $\quad \underline{A} \leftarrow \underline{r}_0$

$\underline{v}(0) = \underline{v}_0$ $\quad \underline{B} \leftarrow \underline{v}_0$

$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\underline{a}_0 \cdot t^2}$: konkrét mo.

2. Harmonikus rezgőmozgás



$$F = -D\cdot x - mg$$
$$m\cdot\ddot{x} = -D\cdot x - m\cdot g \quad /:m$$
(*) $$\boxed{0 = \ddot{x} + \frac{D}{m}\cdot x + g}$$: mozgásegyenlet

Sejtés: $x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi) + d$

$$\ddot{x}(t) = -A\,\omega_0^2\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Behelyettesítés: (*)

$$-A\cdot\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{D}{m}\left(A\sin(\omega_0 t + \varphi) + d\right) + g = 0$$

~~$(A\omega_0^2 \sin \ldots - A\omega_0^2 \sin)$~~

$$-A\cdot\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{D}{m}A\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{D}{m}d + g = 0$$

$$A\left(\frac{D}{m} - \omega_0^2\right)\sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{D}{m} + g = 0 \qquad \forall t\text{-re}$$

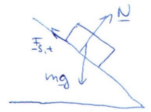
I. $\frac{D}{m} - \omega_0^2 = 0$
II. $\frac{D}{m}\cdot d + g = 0$
} két feltétel, hogy minden D-re 0 legyen

I. $\Rightarrow$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
II. $\Rightarrow$ $d = -\frac{mg}{D}$
} csak akkor jó

$$\boxed{x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + \varphi\right) - \frac{mg}{D}}$$: ált. mo.

A, φ: szabad paraméterek
(ezeket mi választjuk meg, a többi adott)

3. Mozgás lejtőn



$N = m\cdot g \cos\alpha$ (~~sin~~)
$\underline{F}_{s,t} = m\cdot g\sin\alpha$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x} = m\cdot g\sin\alpha - \mu_T\cdot N}$$
$$m\ddot{x} = m\cdot g\sin\alpha - \mu_T\, m\cdot g\cos\alpha \quad /:m$$
$$\ddot{x} = g\sin\alpha - \mu_T\, g\cos\alpha$$
$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha) \quad /\int$$

$$\dot{x}(t) = \int g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha)\,dt = \quad (\text{const})$$
$$= g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha)t + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

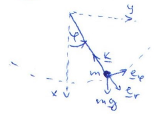
$$x(t) = \int g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha)t + c_1\,dt =$$
$$= g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + c_1\cdot t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
$$t \geq 0$$

Kezdeti feltételek:

~~$(s(0) = s_0)$~~
$x(0) = x_0 \qquad c_2 \to x_0$
$\dot{x}(0) = v_0 \qquad c_1 \to v_0$

$$\boxed{x(t) = g(\sin\alpha - \mu_T\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + v_0\cdot t + x_0} \qquad t \geq 0$$

4. Matematikai inga



- kényszererő: körpályán való maradás (⊥ a felületre)

$\underline{F}_e = m\cdot\underline{a}$
$\underline{F}_e = m\cdot\underline{g} + \underline{K} = m\cdot g\cos\varphi\,\underline{e}_r - mg\sin\varphi\,\underline{e}_\varphi - K\underline{e}_r$
→ felbontottuk sugár és érintő irányú komponensekre

(1.) $\underline{a} = R\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - R(\dot{\varphi})^2\underline{e}_r$ (felbontottuk sugár és érintőirányú komponensekre)

$\underline{a} = l\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - \frac{v^2}{l}\underline{e}_r$

$$\boxed{\underline{F}_e = m\cdot\underline{a} \rightarrow \underline{a} = \frac{\underline{F}_e}{m}}$$ mindennek az alapja :D

Az erőt is felbontjuk sugár + érintő irányú komponensekre.

(2.) $\underline{F}_e = m\cdot\underline{g} + \underline{K} = m\cdot g\cos\varphi\,\underline{e}_r - mg\sin\alpha\,\underline{e}_\varphi - K\cdot\underline{e}_r$

(1+2.) $\underline{a} = \frac{\underline{F}_e}{m} = \underline{e}_r\left(g\cos\varphi - \frac{K}{m}\right) - g\sin\varphi\,\underline{e}_\varphi$ (m-mel egyszerűsítettünk, $\underline{e}_r$-t kiemeltük)

I. $\boxed{\underline{e}_r}$: $-\frac{v^2}{l} = g\cos\varphi - \frac{K}{m}$
II. $\boxed{\underline{e}_\varphi}$: $l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$

Ha φ kicsi: $\sin\varphi \approx \varphi$

(II.) $\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0}$ mozg. egyenlet érvényes kis kitérések esetén

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

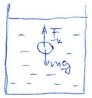
$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0\cdot t + \delta)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

φ_0, δ: 2 szabad param.

5. Golyó mozgása közegben

Közegellenállás: $F_k \sim -v$

$F_k = -kv = -6\pi\eta r v$ (Stokes-tv.)



$m\ddot{x} = -k\dot{x} - m\cdot g$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x} - g$

Űrben: (1) $\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x}$ → másodfokú

$\dot{v} = -\frac{k}{m}v = -\frac{1}{\tau}\cdot v$

$[\frac{1}{s}]$ kell

τ: 'tau', időállandó

$\tau = \frac{m}{k}$ → csillapítás mértéke

Tipp: $v(t) = e^{t}$ → dimenziótlan

$v(t) = e^{Bt}$

$[B] = \frac{1}{s}$

(2) Végső tipp: $v(t) = A\cdot e^{Bt}$ alakú lesz

$[A] = \frac{m}{s}$

$\dot{v}(t) = A\cdot B e^{Bt}$

(1)-be: $ABe^{Bt} = -A\frac{1}{\tau}e^{Bt}$ $\forall t$-re

$B = -\frac{1}{\tau}$

(2)-be: Behely.:

$\boxed{v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}}$ ált. mo. $\int$

1 db szabad paraméter

$x(t) = -A\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

2 db szabad paraméter

Kezdőfelt.:

$x(0) = x_0 = 0$

$v(0) = v_0$

$v(0) = A\cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = A\cdot 1 = \boxed{A = v_0}$

$x(0) = -A\cdot\tau + B = -v_0\tau + B = 0$

$\boxed{B = v_0\cdot\tau}$

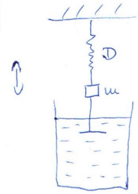
Konkrét mo.: $-v_0\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0\tau = x(t)$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_0\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

V. Rezgések I.

Sebességgel arányos erővel csillapított rezgés

Kís.:



→ nehézségi erő + rugóerő + közegellenállási erő → folyadék általi csillapítás

$m\ddot{x} = -Dx - kv$ $/:m$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m} = 0$

Felhaszn.: $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$

$2\beta = \frac{k}{m}$ $\left(= \frac{1}{\tau}\right)$ → gyöngy mozg. glicerinben

Behely.:

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = 0$ mozgásegyenlet

Sejtés (a kísérlet alapján):

$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi) = A\cdot e^{-ct}\sin(\omega t + \varphi)$: tipp

$\dot{x}(t) = -Ace^{-ct}\sin(\omega t + \varphi) + A\omega e^{-ct}\cos(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x}(t) = Ac^2e^{-ct}\sin(\omega t + \varphi) - 2Ac\cdot\omega e^{-ct}\cos(\omega t + \varphi) - A\cdot\omega^2 e^{-ct}\sin(\omega t + \varphi)$

Behelyettesítem a mozgásegyenletbe:

$$A e^{-ct}\left\{\sin(\omega t + \varphi)\underbrace{[c^2 - \omega^2 - 2\beta c + \omega_0^2]}_{*} + \cos(\omega t + \varphi)\underbrace{[-2c\omega + 2\beta\omega]}_{*}\right\} = 0$$

* Ha nem 0 az A, akkor lehet 0 az egyenlet, ha a sin és cos együtthatója is 0.

~~$\sin(\omega t + \varphi)[c^2 - \omega^2 - 2\beta$~~

I. $c^2 - \omega^2 - 2\beta c + \omega_0^2 = 0 \xrightarrow{c=\beta} \beta^2 - \omega^2 - 2\beta^2 + \omega_0^2 = 0$

$\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$

$\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega$

$\beta^2 < \omega_0^2$

II. $-2c\omega + 2\beta\omega = 0$

$2c\omega = 2\beta\omega$

$c = \beta$

x(t)-re: $\boxed{x(t) = A\, e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)}$ ált. mo.

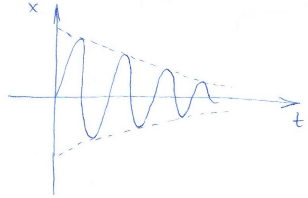
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

→ 2 szabad p.

1. Alul- és túlcsillapított eset:

1.1. alulcsillapítás

$$\boxed{\beta^2 < \omega_0^2}$$

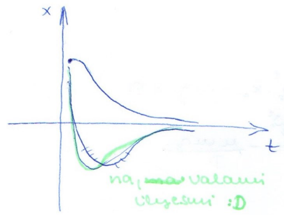


$$\boxed{x_{ált}(t) = A \cdot e^{-\beta t} \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi\right)}$$

: létrejön oszcilláció, ami lecseng

1.2. túlcsillapítás

$$\boxed{\beta^2 > \omega_0^2}$$



$$\boxed{x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t}\right) \qquad \omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$$

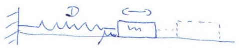
: a kitérés mindig az egyensúlyi helyzet felé tart, hullámok nélkül

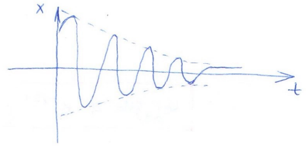
1. Állandó súrlódási erővel csillapított rezgés

1.1. mozgásegyenlet

1.2. megoldás

- csúszási súrl.





$$m\ddot{x} = -Dx + \mu m g \quad /:m$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu g = 0}$$ mozgásegyenlet

1. fázis: balra mozog a test

$x(t)$

- def. új fgv.-t:

$x^*(t) = x(t) - x_0$

$\ddot{x}^*(t) = \ddot{x}(t)$

$$\ddot{x}^* + \omega_0^2 (x^*(t) + x_0) - \mu g = \ddot{x}^* + \omega_0^2 x^* + \omega_0^2 x_0 - \mu g = 0$$

$$x_0 = \frac{+\mu g}{\omega_0^2} = -\mu g \left(\frac{m}{D}\right) = -\frac{\mu m g}{D}$$

$\Rightarrow x^*(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$x(t) = x^*(t) + x_0 = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\mu g}{\omega_0}$

2. fázis: a súrl.-i erő másik irányba hat

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu g = 0}$$

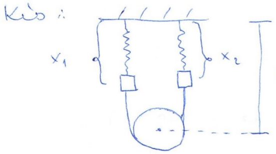
$$|F_{r}| = D|x| < D \cdot x_0 = D\frac{\mu m g}{D} = \mu_{cs} m \cdot g < \mu_T m g$$

Egyensúlyi helyzet

VI. Rezgések II.

Rezgések összetétele $f_1 = f_2$

Kís.:



$$l = x - x_1 + x - x_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{l}{2}$$

- a kötél nyújthatatlan
- tömeg nélküli csiga

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= A_1 \sin\omega t \cos\varphi_1 + A_1 \cos\omega t \sin\varphi_1 + A_2 \sin\omega t \cos\varphi_2 + A_2 \cos\omega t \sin\varphi_2 \ominus$$

(: mivel $\omega_1 = \omega_2 := \omega$)

Felhaszn.: addíciós ~~tétel~~:

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}$$

$$\ominus \sin(\omega t)\underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi} + \cos(\omega t)\underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi} =$$

$$= A(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi) =$$

$$= \boxed{A\sin(\omega t + \varphi)}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$ a kezdőfázis tangense

$\cancel{(A\cos\varphi)^2 + (A\sin\varphi)^2 =}$

1) $A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$

2) $A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)$$

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$: addíciós tétel (cos)

→ azonos fázisban vannak

$\varphi_1 = \varphi_2$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\underbrace{\cos(0)}_{1} =$

$= (A_1 + A_2)^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$

→ ellentétes fázisban vannak (egyik felfelé, másik lemegy)

$\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = |A_1 - A_2|$ (kioltódik egymástól a két amplitúdó)

$A_1 = A_2 \Rightarrow A = 0$

: kioltás

Különböző frekvenciájú rezgések összetétele

$$x_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$A_1 = A_2 := A$

$\varphi_1 = \varphi_2 := \varphi$ (ezzel igazából nem korlátozzuk le a mo.-t)

$$x(t) = A(\sin\underbrace{(\omega_1 t + \varphi)}_{\alpha} + \sin\underbrace{(\omega_2 t + \varphi)}_{\beta}) =$$

~~(sin α + sin β = ...)~~

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

körfrekvenciák különbsége a kettő között; átlagos körfrekvencia

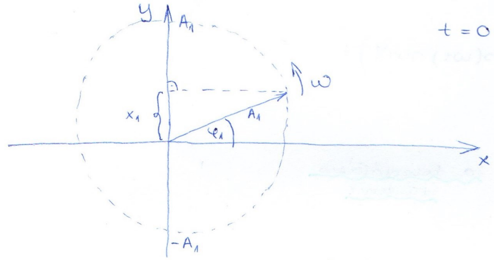
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi\right) =$$

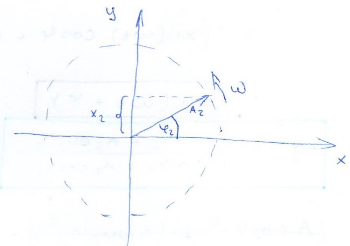
$$= 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

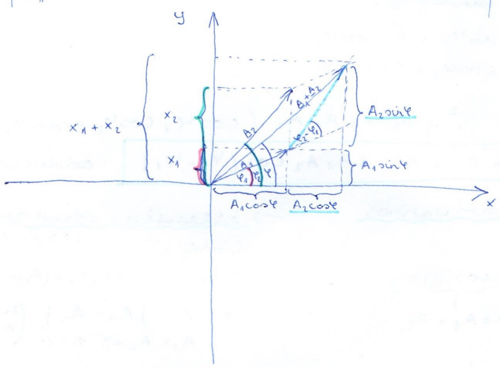
Ha $\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow |\Delta\omega| \ll \omega$

Grafikus ábrázolás

$t = 0$





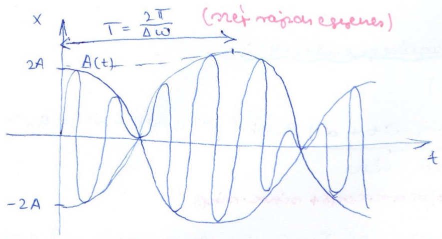


Lebegés jelensége

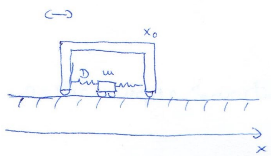
- két közeli frekvenciájú ($\boxed{\omega_1 \approx \omega_2}$) hang együttes megszólaltatásakor egy periodikusan ingadozó erősségű hangot hallunk

→ két hangvilla (kissé eltérő frekvencia)
- külön talán észre sem vesszük különbséget
- egyszerre: jellegzetes lüktető hang
- → a két hangvilla ált. kibocs. hang periodikusan erősíti, ill. gyengíti egymást ($\boxed{\text{felváltva: erősítés + kioltás}}$)

Felhaszn.: hangszerek hangolása
- → ha a két frekvencia megegyezik, a lebegés megszűnik



Gerjesztett rezgés



→ nagykocsi: gerjesztő

$$F = -D(x - x_0\xi(t)) - k\dot{x}$$

$$\xi(t) = A_0 \sin(\omega t)$$

$$m\ddot{x} = -D\cdot(x - x_0) - k\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -D\cdot x + Dx_0 - k\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}\cdot x = \frac{D}{m}\cdot A_0 \sin(\omega t)$$

Legyen: $\frac{k}{m} = 2\beta$

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2$$

$$A_0\frac{D}{m} = A_0\,\omega_0^2 = a_0$$

$$\boxed{\underbrace{\ddot{x} + 2\beta\dot{x}}_{\text{csillapítás mértéke}} + \underbrace{\omega_0^2}_{\text{saját-frekvencia}} x = \underbrace{a_0}_{\text{gerjesztés erőssége}} \sin(\omega t)}$$ mozgásegyenlet

ω: kiskocsi frekvenciája
$A(\omega)$: kiskocsi amplitúdója (függ az ω-tól)

- kis frekvencia:
  egy irányba mozognak
- nagy frekvencia:
  szembemegy a kiskocsi a naggyal

Tipp: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t - \delta(\omega))$

δ: fáziseltolódás

Cél: erre kapni konkrét fgv.-alakot

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\cdot\omega^2 \sin(\omega t - \delta)$$

Behelyettesítjük az ~~[illegible]~~ mozgásegyenletbe.

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t)$$

$$-A\omega^2 \underbrace{\sin(\omega t - \delta)}_{\text{add.-tétel}} + 2\beta A\omega \underbrace{\cos(\omega t + \delta)}_{\text{add.-tétel}} + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \delta) = a_0 \sin(\omega t)$$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$ $\quad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)[\sin(\omega t)\cos\delta - \cos(\omega t)\sin\delta] + 2A\beta\omega[\cos(\omega t)\cos\delta + \sin(\omega t)\sin\delta] = a_0\sin(\omega t)$$

$$\sin(\omega t)\underbrace{[A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + 2A\beta\omega\sin\delta - a_0]}_{0} + \cos(\omega t)\underbrace{[-A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta + 2A\beta\omega\cos\delta]}_{0} = 0$$

1) $A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + 2A\beta\omega\sin\delta = a_0$

2) $-A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta + 2A\beta\omega\cos\delta = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta - 2A\beta\omega\cos\delta = 0$

Ismert: ω: azzal rezgetem
ω_0 "
a_0: én mondom meg, milyen amplitúdóval rezgetem a kocsit
β

Ismeretlen: $\boxed{A}$ $\boxed{\delta}$

2-es egyenletből tangens számítás:

→ 2) $A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta = 2A\beta\omega\cos\delta$

$$\frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$ Az egyik ismeretlen megvan, juhééé!

Tehát: $\boxed{tg\,\delta = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$ (fázisszög referenciakör helyvektor vízszintessel alkot. szöge)

Kell még: A

(1) + (2)^2 - ből:

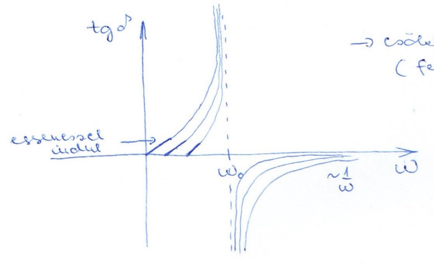
$$A^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4A^2\beta^2\omega^2 = a_0^2$$

$$A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = a_0^2$$

$$A^2 = \frac{a_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+4\beta^2\omega^2}$$

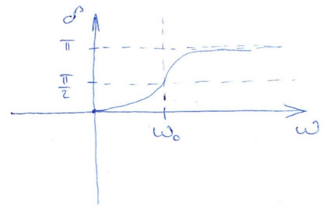
$$\boxed{A(t) = A_0\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

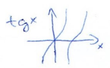
Megj.: (emlékeztető):
$a_0 = A_0\frac{D}{m} = A_0\cdot\omega_0^2$

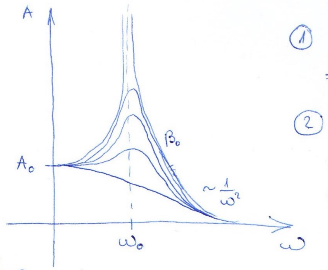


→ csökk. a β értékét
(felére, akkor itt is fele lesz)

→ ugyanez történik a ω - δ grafikonon







(0.) $A(0) = A_0$ → végtelenhez tart

$\boxed{0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4}$

(1) $\beta = 0$: nincs közegellenállás
$\Rightarrow A(\omega) = A_0\cdot\frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}$

Ha β növekszik: egyre kisebb A(ω) maximuma

(2) $A'(\omega_{max}) = 0$
$\Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$
Akkor van max, ha $\omega_0^2 > 2\beta^2$ $/\sqrt{\ }$
$\omega_0 > \sqrt{2}\beta$:

rezonancia, rezonanciakatasztrófa

Ha $\beta > \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$: a rezonancia megszűnik
$\boxed{\beta^2 > \omega_0^2}$: túlcsill.

← pl. Tacoma-híd: ne legyen rezonancia max egyáltalán
→ legyen csillapítás a híd anyagában (túl rugalmas volt)

pl. busz ablak berezonál
a motor rezgési frekvenciája = az ablakéval
→ elég vastag ablak kell

VII. Tömegpont mozgására von. tételek

$\boxed{m\cdot\ddot{\underline{r}}(t) = m\cdot\underline{a} = \underline{F}_e}$ Newton - axióma

$$\dot{\underline{p}} = (m\dot{\underline{v}}) = m\cdot\underline{a} = \underline{F}_e$$

Tehát: $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$ $\quad / \int_{t_1}^{t_2} dt$

Bal oldal:

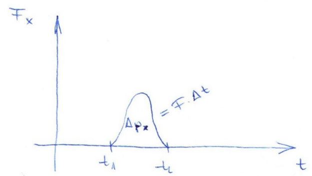
$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{\underline{p}}\,dt = \begin{pmatrix}\int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_x\,dt\\ \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_y\,dt\\ \int_{t_1}^{t_2}\dot{p}_z\,dt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_x(t_2)-p_x(t_1)\\ p_y(t_2)-p_y(t_1)\\ p_z(t_2)-p_z(t_1)\end{pmatrix} = \underline{p}(t_2)-\underline{p}(t_1) = \Delta\underline{p}$$

Jo.:

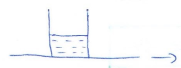
$$\int_{t_1}^{t_2}\underline{F}(t)\,dt$$

Vagyis: $\boxed{\Delta\underline{p} = \int_{t_1}^{t_2}\overbrace{\underline{F}(t)\,dt}^{\text{erőlökés (ez a neve)}}}$ $\Rightarrow \Delta p_x = \int_{t_1}^{t_2}F_x(t)\,dt$

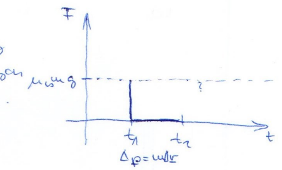
Ez az impulzustétel.



pl. Pohár + lap esete:



Ha nagyon kicsi ideig hat az erő, akkor nagyon kicsi az impulzusvált.



pl. kalapács esik a lábamra
→ nagyon rövid ideig tart, nagyobb lesz az erőlökés

Impulzusmomentum:

$$m \cdot \underline{a} = \underline{F} \quad / \underline{r} \times \quad \text{(vektorszorzás)}$$

$$\underline{r} \times (m \cdot \underline{a}) = \underline{r} \times \underline{F}$$ — $\underline{r}(t)$: tömegpont aktuális helyvektora

$$m(\underline{r} \times \underline{a}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$m(\underline{r} \times \dot{\underline{v}}) = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$(\underline{r} \times m \underline{v})^{\cdot} = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\boxed{\underline{r} \times m \underline{v} = \underline{r} \times \underline{p} =: \underline{N}}$$: impulzusmomentum, perdület

$$\boxed{\underline{r} \times \underline{F} =: \underline{M}}$$: forgatónyomaték

(~~$M = r\,F \sin\varphi$~~)

$\rightarrow \underline{M} = r\,F \sin\varphi = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \sin\varphi$ (megadja $\underline{M}$ nagyságát)

keresztszorzás szabálya

$$(\underbrace{\underline{M} = \underline{r}(t) \times \underline{F}(t)}_{\text{jobb sodrású}} = \underbrace{-\underline{F} \times \underline{r}}_{\text{„bal"}})$$

$\underline{r}(t)$: tömegpont helyvektora

$\underline{F}(t)$: a testre ható eredő erő

$\otimes$ befelé

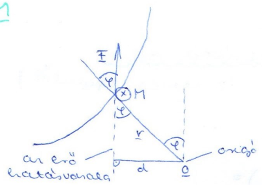
$\odot$ kifelé

Vagyis:

$$\boxed{\dot{\underline{N}} = \underline{M}}$$: impulzusmomentum tétel

$$\Delta \underline{N} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}\, dt$$

(1) $\underline{M}$



$d = r \cdot \sin\varphi$

$$\boxed{M = r\,F \sin\varphi = F \cdot d}$$

d : erőkar

(2) $\underline{N}$

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{p} = m \cdot \underline{r} \times \underline{v}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_{\parallel} + \underline{v}_{\perp}$$

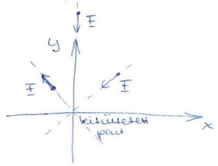
$$m\,\underline{r} \times \underline{v} = m\,\underline{r} \times (\underline{v}_{\parallel} + \underline{v}_{\perp}) = m(\underbrace{\underline{r} \times \underline{v}_{\parallel}}_{0} + \underline{r} \times \underline{v}_{\perp}) = m(|\underline{r}| \cdot |\underline{v}_{\perp}| \underbrace{\sin 90^\circ}_{1}) =$$

$$= m\,\underline{r} \times \underline{v}_{\perp}$$

Tehát: $\boxed{\underline{N} = m \cdot \underline{r} \times \underline{v}_{\perp}}$

Centrális erőtér

– speciális erőtér



pl. a bolygómozg.: centrális e.t.-ben történő mozg.

pl. atom: elektron és atommag

$\rightarrow \boxed{\underline{r} \parallel \underline{F}}$: mindig igaz a centrális erőtér miatt

$\rightarrow$ az erő hatásvonala a mozg. minden időpillanatában átmegy az origón

$\hookrightarrow \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = 0$ (mindig ennyi)

$\hookrightarrow \dot{\underline{N}} = \underline{M} = 0 \Rightarrow \underline{N} = \underline{N}_0 = \text{áll.}$

Centrális erőtérben levő síkmozg.:

(1) $\underline{r} \times \underline{p} = \underline{N}_0 = \text{áll.}$

$$\begin{cases} \underline{N}_0 \perp \underline{r} \\ \underline{N}_0 \perp \underline{p} = m\underline{v} \end{cases}$$

(2) Ha a perdület megmarad, a területi seb. állandó: az egyenlő idők alatt súrolt területek egyenlők.

$$\underline{N} = m(\underline{r} \times \underline{v}) = m[r\,\underline{e}_r \times (\overbrace{\dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi}^{v \text{ komponensei}})] =$$

$$= m(r \cdot \dot{r} \cdot \underbrace{\underline{e}_r \times \underline{e}_r}_{0} + r^2 \dot{\varphi}\, \underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi) =$$

$$= m\,r^2 \dot{\varphi}\,(\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi) =$$

$$= m \cdot r^2 \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_z = \underline{N}_0 = \text{áll.}$$

$$\Rightarrow m\,r^2 \dot{\varphi} = \text{áll.} \Rightarrow \boxed{r^2 \underbrace{\dot{\varphi}}_{\omega} = \text{áll.}}$$

Csillaπ+Gabianor :D

Kepler II tv.-e: ezt írták fel órán, de azért leírtam a másikat is, hogy legalább tudjuk róla..

A bolygók vezérsugarai egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrolnak.

→ bármelyik centrális erőtérben érvényesül K. II. tv.-e

$$\boxed{r^2 \dot{\varphi} = \text{áll}}$$

tételesen nem is ezt írja, képéri

(Kepler III.: $\boxed{\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{a_1^3}{a_2^3}}$

A bolygók keringési idejeinek (T_1, T_2) négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák fél nagytengelyeinek $(a_1 a_2)$ köbei.

Teljesítmény

$$m \underline{a} = \underline{F} \quad / \cdot \underline{v}$$
$$m \underline{a} \underline{v} = \underline{F} \underline{v}$$
$$m \dot{\underline{v}} \cdot \underline{v} = \underline{F} \underline{v}$$
$$m \dot{\underline{v}}(t) \underline{v}(t) = \underline{F} \underline{v}$$
$$m \frac{1}{2} (\dot{v^2}) = \underline{F} \underline{v}$$
$$\left(\frac{1}{2} m v^2\right)^{\cdot} = \underline{F} \underline{v}$$
$$(\dot{E}_{kin}) = P$$

Mivel: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad [E_{kin}] = kg \frac{m^2}{s^2} = Nm = J$: kinetikus energia

$P = \underline{F} \underline{v}$ $\quad [P] = N \frac{m}{s} = kg \frac{m^3}{s^3} = \frac{J}{s} = W$: teljesítmény

$(P = (\dot{E}_{kin}))$

$$\boxed{m \dot{\underline{v}}(t) \underline{v}(t) \stackrel{?}{=} m \frac{1}{2} (\dot{v^2})}$$

→ $\dot{\underline{v}} \cdot \underline{v} = \dot{v}_x(t) \cdot v_x(t) + \dot{v}_y \cdot v_y + \dot{v}_z \cdot v_z =$

$= \frac{1}{2} (\dot{v_x^2}) + \frac{1}{2} (\dot{v_y^2}) + \frac{1}{2} (\dot{v_z^2}) =$

$= \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\cdot} = \frac{1}{2} (\dot{v^2}) = \frac{1}{2} (\underline{v} \cdot \underline{v})^{\cdot}$

Munka, munkatétel:

$$P = \underline{F}(t) \cdot \underline{v}(t) = m \cdot \underline{a} \underline{v} = \left(\frac{1}{2} m v^2\right)^{\cdot} = \dot{E}_{kin} \qquad / \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = \Delta E_{kin} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \underbrace{\underline{v}\, dt}_{d\underline{s}} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}\, d\underline{s} = W$$

$\underline{r}_1 = \underline{r}(t_1)$

$\underline{r}_2 = \underline{r}(t_2)$ $\qquad$ Ez a munkatétel.

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}\, d\underline{s} \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i\, d\underline{s}_i$$

$[W] = N \cdot m = kg \frac{m}{s^2} = J$

Tehát a munka: W

munkatétel: $\Delta E_{kin} = W$

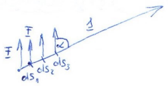
$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}_e\, d\underline{s}$$

1) → $\boxed{\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2}$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} (\underline{F}_1 + \underline{F}_2)\, d\underline{s} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}_1\, d\underline{s} + \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}_2\, d\underline{s} = W_1 + W_2$$

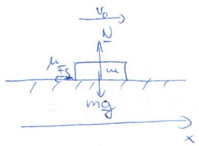
2) → $\boxed{\underline{F} = \text{áll}}$ és egyenes vonalú a mozg.:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}\, d\underline{s} \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i\, d\underline{s}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}\, d\underline{s}_i = \underline{F}\left(\sum_{i=1}^{N} d\underline{s}_i\right) = \underline{F}\, \underline{s} = F \cdot s \cos\alpha$$



1. Nevezetes erők munkája

1.1. Súrlódás



$N = mg$

$\boxed{F_s = \mu m g}$

$\underline{F} = m \cdot \underline{a} \quad /:m$

$a = -\mu g$

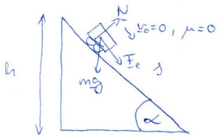
$S = v_0 \cdot T + \frac{a}{2} T^2 = v_0 \frac{v_0}{\mu g} - \mu g \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu^2 g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g}$

$T = \frac{v_0}{|a|} = \frac{v_0}{\mu g}$ (: megállás)

$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}_s \, d\underline{s} = \underline{F}_s \, d\underline{s} = F_s \, ds \overset{(1)}{=} -\mu m g \Delta s$

$\overset{(2)}{=} -\mu m g \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g} = -\frac{1}{2} m v_0^2 = \Delta E_{kin}$

1.2. Nehézségi erő



$\boxed{F_e = mg \sin\alpha}$

$a = g \sin\alpha$

$s = \frac{h}{\sin\alpha}$

$\frac{a}{2} T^2 = s$

$T = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

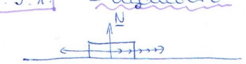
$v = aT = \sqrt{2as} = \sqrt{2g\cancel{\sin\alpha}\frac{h}{\cancel{\sin\alpha}}} = \sqrt{2gh}$

(1) $W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F_e} \, d\underline{s} = F_e \, ds = mg \sin\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = mgh$

(2) $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 - 0 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} g h = m \cdot g h$

1.3. Kényszererő

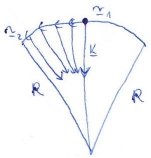
1.3.1. - nyomóerő



$\underline{N} \perp d\underline{s}_i \Rightarrow W = 0$

Ha a felület mozdulatlan, nem mozdul el.

1.3.2.



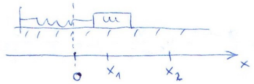
- ingamozgás (rúzpályára van kényszerítve)

$\boxed{K = m \frac{v^2}{R}}$

$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \, d\underline{s} \approx \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{F}_i \, d\underline{s}_i}_{0} = 0$ mivel $\cos 90° = 0$ (az erő merőleges az elmozdulásra)

$W = 0 \Rightarrow \Delta E_{kin} = 0 \Rightarrow v = \text{áll.}$

1.4. Rugóerő



$\boxed{F_r = -D \cdot x}$

$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \, d\underline{s} = \int_{x_1}^{x_2} F_r(x) \, dx = \int_{x_1}^{x_2} -D x \, dx = -D \int_{x_1}^{x_2} x \, dx = -D \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$

$= -D \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) = \frac{D}{2} (x_1^2 - x_2^2)$

$x(t) = A \sin(\omega t)$

$v(t) = A\omega \cos(\omega t)$

$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m \left(A^2\omega^2\cos^2(\omega t_2) - A^2\omega^2\cos^2(\omega t_1)\right) =$

$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \left(1 - \sin^2(\omega t_2) - [1 - \sin^2(\omega t_1)]\right) =$

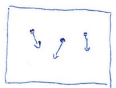
$= \frac{1}{2} m A^2 \frac{D}{m} \left(\sin^2(\omega t_1) + \sin^2(\omega t_2)\right) =$

$= \frac{1}{2} D \Big(\underbrace{A^2 \sin(\omega t_1)}_{x(t_1)^2 = x_1^2} + \underbrace{A^2 \sin(\omega t_2)}_{x(t_2)^2 = x_2^2}\Big) = \frac{D}{2} (x_1^2 - x_2^2)$

Konzervatív erőtér

Erőtér: a testre ható erő csak a test koordinátájától függ

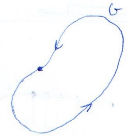
$\rightarrow \underline{F}(\underline{r})$



(le tudom rajzolni)

$\Rightarrow$ a súrlódási erő nem erőtér:
a test mozgásának irányától is függ

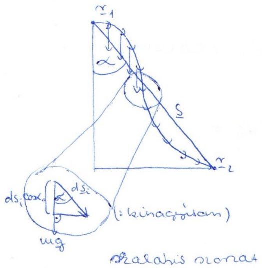
Def.: Minden zárt G görbe esetén: ~~(az erő ...)~~



$\boxed{W = \oint_G \underline{F} \, d\underline{s} = 0}$, akkor $\underline{F}(\underline{r})$ konzervatív.

pl. nehézségi erőtér
töltések elektromos tere
bolygók gravitációs tere

pl: nehézségi erőtér



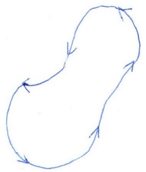
skaláris szorzat

$$m\underline{g}\, d\underline{s}_i = \underbrace{m g\, ds_i \cos\alpha}_{-\Delta z_i}$$

① $W = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} m\underline{g}\, d\underline{s} \approx -\sum_{i=1}^{N} m\underline{g}\, d\underline{s}_i = -mg\sum_{i=1}^{N} dz_i = -mg\Delta z = \sum_{i=1}^{N} mg\, dz_i$

↕ 2 féleképp

② ——— " ——— $= m\underline{g}\sum_i d\underline{s}_i = m\underline{g}\,\underline{s} = m \cdot g \underbrace{s\cos\alpha}_{-\Delta z} = -mg\Delta z$



Konzervatív + zárt

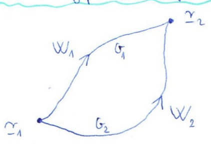
$W = -mg\Delta z = -mg(z_2 - z_1) = 0$

zárt görbe

z_2 : végpont
z_1 : kezdőpont } zárt görbe: $z_1 = z_2$

ez most az origó

Konzervatív erőtér esetén a munkavégzés csak (a kezdő és) a végponttól függ.



→ mindegy, hogy melyik útvonalon megyek

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s} = -W_{2\to 1}}$$

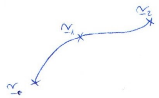
→ ugyanakkora az erő, ellentétes irányú

$$W_1 = \int_{\underline{r}_1, G_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s} = \cancel{\int_{\underline{r}_1, G_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s}} + \int_{\underline{r}_1, G_2}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s} + \cancel{\int_{\underline{r}_2, G_2}^{\underline{r}_1} \underline{F}\, d\underline{s}} = W_2$$

Potenciális energia

$$\boxed{E_{pot}(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}\, d\underline{s}}$$

1. a tér minden $\underline{r}$ pontjához hozzárendel egy skalár számot
2. r_0-t kijelölöm a térben ~~(E(r))~~ → $E_{pot}(r_0) = 0$ J



$$\boxed{W} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s} = \underbrace{\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F}\, d\underline{s} + \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s}}_{\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{s}} - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F}\, d\underline{s} =$$

$$= -E_{pot}(\underline{r}_2) + E_{pot}(\underline{r}_1) =$$

$$\boxed{= E_{pot}(\underline{r}_1) - E_{pot}(\underline{r}_2)}$$

! → csak a kezdőponttól és a végponttól függ

Mechanikai energia-megmaradás tétele

Konzervatív erőtérben mozgó test esetén a munkatétel:

$W = \Delta E_{kin}$

$E_{pot_1} - E_{pot_2} = E_{kin\,2} - E_{kin\,1}$

$E_{pot_1} + E_{kin\,1} = E_{kin\,2} + E_{pot_2}$

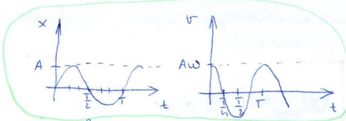
$$\boxed{\begin{aligned} E_{mech} &= E_{kin} + E_{pot} \\ E_{mech} &= \text{áll.} \end{aligned}}$$

mechanika energiamegmaradás ~~(tétel)~~ tv.-e

Konzervatív erőtérben a kinetikus és a potenciális energia összege állandó.

↳ pl. rugómozgás

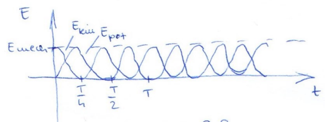
$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$
$v(t) = A\omega \cos(\omega t)$



$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} D x^2(t) =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} D A^2 \sin^2(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2} D \cdot A^2 \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = \frac{1}{2} D A^2$$



VIII. Gyorsuló koordináta-rendszer

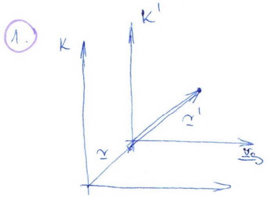
Mozgásegyenlet transzlációs mozgást végző rendszerben

Koordináta-rendszerek:

(0. áll)

1. EVEM ($a = 0$)
2. transzláció + gyorsul

1.



$$x' = x - v_x \cdot t$$
$$y' = y - v_y \cdot t$$
$$z' = z - v_z \cdot t$$
$$(t' = t)$$

Galilei-féle transzformáció

Adott: x, y, z, t meghatározható: x', y', z', t'

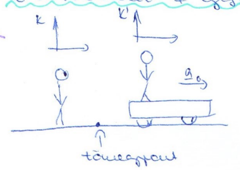
$$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{v}_0 \cdot t \quad /(\dot{\ })$$
$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}' + \underline{v}_0 \quad /(\dot{\ }) \quad / \cdot m$$

$$m\,\ddot{\underline{r}} = \underline{F}_e = m \cdot \ddot{\underline{r}}' \qquad \text{(érvényes N.II.)}$$

Ez még nem gyorsuló.

2. transzláció + gyorsul

2.1.



K-ban ezt látom:

$\boxed{\underline{a} = 0}$ $\boxed{\underline{F}_e = 0}$

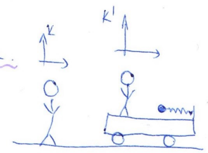
(áll, a tömegpont is áll, semmi különös)

K'-ben:

$\boxed{\underline{a}' = -\underline{a}_0}$ $\boxed{\underline{F}_e = 0}$

(a kocsiról a pontot látom távolodni)

2.2.



K-ban:

$\boxed{\underline{a} = \underline{a}_0}$ $\boxed{\underline{F}_e = m \cdot \underline{a}_0}$

(látok távolodni valamit magamhoz képest)

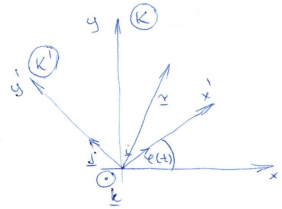
K'-ben:

$\boxed{\underline{a}' = 0}$ $\boxed{\underline{F}_e = m \cdot \underline{a}_0}$

(nem érzékelem a gyorsulást a rendszerben, de látom, hogy valamiért megfeszül a rugó)

Tehát: $\boxed{m \cdot \underline{a}' = \underline{F}_0 - m \cdot \underline{a}_0}$ ← kell valamilyen fiktív erő, hogy N.II. érvényes legyen

Vektorok időderiváltja forgó koord.-r.-ben



K: inerciarendszer (x, y, z)

K': forgó rendszer (x', y', z')

$$|\underline{i}| = |\underline{j}| = |\underline{k}| = 1$$
$$\underline{i} = (\cos\varphi(t),\ \sin\varphi(t),\ 0)$$
$$\underline{j} = (\sin\varphi(t),\ \cos\varphi(t),\ 0)$$
$$\underline{k} = (0,\ 0,\ 1)$$

$$\underline{r} = x'\,\underline{i} + y'\,\underline{j} + z'\,\underline{k}$$

$$(\dot{\underline{i}}) = (-\dot\varphi(t)\sin\varphi(t),\ \dot\varphi(t)\cos\varphi(t),\ 0) = \dot\varphi(t)\,\underline{j}$$
$$(\dot{\underline{j}}) = (\dot\varphi(t)\cos\varphi(t),\ -\dot\varphi(t)\sin\varphi(t),\ 0) = \dot\varphi(t)\,\underline{i}$$
$$(\dot{\underline{k}}) = (0,\ 0,\ 0)$$

A forgórendszernek szögsebessége van, vektorként:

$$\underline{\omega} = (0,\ 0,\ \dot\varphi(t))$$
$$(\dot{\underline{i}}) = \underline{\omega} \times \underline{i}$$
$$(\dot{\underline{j}}) = \underline{\omega} \times \underline{j}$$
$$(\dot{\underline{r}}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

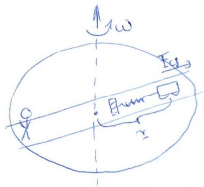
1. Tehetetlenségi erő

→ nem igazi erő: nincs ellenereje
→ a belső szemlélő számára nem látható : látszólagos erő

1.1. Centrifugális erő

$$\boxed{m \cdot \underline{a} = \underline{F} \underbrace{- m \cdot \underline{a}_0}_{\text{transzlációs tehetetl. erő}} + \underbrace{m \underline{\rho} \cdot \omega^2}_{F_{cf}} + \underbrace{2m(\underline{v} \times \underline{\omega})}_{F_c} + \underbrace{m(\underline{r} \times \underline{\beta})}_{F_E}}$$

$$m \cdot \underline{a} = \underline{F} - 0 + \underbrace{m \underline{\rho}\, \omega^2}_{\text{centrifugális erő}} + 0 + 0$$



$\underline{r} = \underline{\rho}$

- iránya a forgástengelyre merőleges, kifelé irányul

I. van rugó

belső (~~külső~~) megfigy. (rendszerben)

- manó: $a = 0$, de $F \neq 0$

$0 \{ m \cdot \underline{a} = F + m \underline{\rho}\, \omega^2 = F + F_{cf}$

$\Rightarrow F = - F_{cf}$

$\underline{r} = \underline{\rho}$

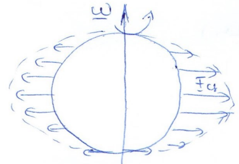
$m \cdot a_{cp} = - m\, \omega^2 \cdot r$

II. nincs rugó

- manó: $F = 0$, de $a \neq 0$ (nem hat erő, mégis mozog)

$\Rightarrow a = \omega^2 \cdot r$

pl. Föld

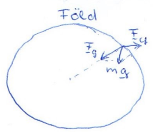


* nyilak nagysága függ r-től

→ nem teljesen gömb alakú → geoid

(pl) Nehézségi erő

Föld forog → F_{cf}



→ mg valójában a gravitációs erő és a centrifugális erő összege
→ nem mutat teljesen a Föld középpontja felé

1.2 Coriolis-erő

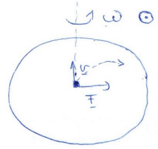
(akkor lép fel, ha a tömegpont a forgó rendszerben v sebességgel mozog)

- a forgó rendszerben a testen van
 → v sebességű erő

$$\boxed{F_c = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega})}$$

Kis.:

ω ⊙ kifelé



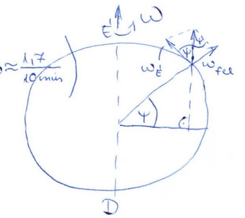
(~~az erő iránya a forgástengelyre merőleges, kifelé irányul~~)

Jobbkéz-szabály:

pl. Föld

$\underline{\omega}_{fel} = \omega \sin \psi \left(\approx \frac{\sqrt{2}}{2} \omega \approx \frac{1{,}7}{10\,\text{min}} \right)$

$\underline{\omega}_É = \omega \cos \psi$



$$\boxed{\underline{\omega} = \underline{\omega}_É + \underline{\omega}_{fel}}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{1\,\text{nap}}$

$(\psi = 47°)$

$$F_c = 2m(\underline{v} \times \underline{\omega}) = 2m[\underbrace{\underline{v} \times \omega_{fel}}_{F_1} + \underbrace{\underline{v} \times \omega_É}_{F_2}]$$

1.2.1. F_1 erőből adódó Coriolis-erő hatása ($\underline{\omega}_{fel}$)

- É-i félgömbön: jobbra hat
- D-i f. gömbön: balra (ellentétesen)
- Egyenlítő: nincs
 ($\omega_{fel} = \omega \sin \psi = 0 \Rightarrow F_c = 0$)

1.2.1 F_2: északi félgömbön ($\underline{\omega}_É$)

- K-i mozgás esetén: ~~fenti~~ felfelé hat
- NY-i: lefelé

→ Kelet felé mozgó vonat könnyebb (felfelé mutat F_c, mg ellenében: könnyebb lesz)

(É-i, D-i mozgás esetén 0)

1.3. Euler-erő (: a gyorsuló forgómozgást végző rendszerekben lép fel)

$$\boxed{F_E = m\,(r \times \beta)}$$

(centrifugális: a test áll + a rendszer forog
→ máskor is hat, de elhanyagoljuk
Coriolis-erő: v sebességű test + a rendszer forog
⇒ Euler-erő: váll. szögsebességű ~~szöget~~ test + forgó r.)

1. Jelenségek a forgó Földön:

1.1. Foucault-inga

- ha a Föld a von. rendszer (kr.), akkor az inga azért tér ki, mert hat rá a Coriolis-erő (az inga lengési síkja lassan elfordul)
- (inerciarendsz.) kívülről: nem a Coriolis-erő hat, hanem az inga síkja állandó, a Föld fordul ki a lengési síkból
- az elfordulás sebessége függ a földrajzi helytől
  - sarkokon: legrövidebb idő alatt ford. teljesen körbe (egy csillag-nap)
  - Egyenlítőn: egyáltalán nem

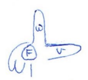
1.2 Eötvös-effektus

⇒ a kelet felé mozgó vonat könnyebb

- a felszínhez képest mozgó testek esetén fellép a Coriolis-erő is (mindig merőleges a mozgás sebességének irányára és a Föld forgásához tartozó ω-ra)

$$\boxed{\underline{F}_c = 2m\,(\underline{v} \times \underline{\omega})}$$

- a Coriolis-erő függőleges irányú komponense (F_2) csökkenti/növeli a gravitációs és centrifugális erő eredőjéből szárm. tehetetlenséget (mg)



felfelé hat

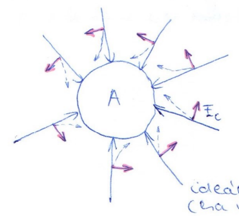
1.3. Lövedék eltérülése

- vízszintes lövedék eltérül
  → Coriolis-erő vízszintes irányú komponense miatt (F_1)

1.4. Ciklonok mozgása

- ~~erő~~ nyomáskülönbségek miatt mozgó légtömegek
- alacsony légnyomású légörvény

Észak
(ω_{fel}: "eltérítő" komponens)



A: alacsonyabb légnyomás

ideális eset (ha nem lenne a Föld forgása) : sebesség iránya

⇒ eltéríti a pályáját

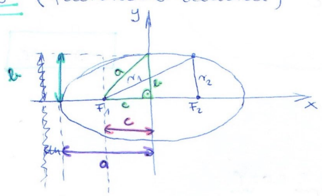
IX. Gravitáció

Kepler-törvények

$\boxed{K.I.:}$ gyújtópont = fókuszpont

- a bolygók olyan ellipszis pályán keringenek, aminek az egyik gyújtópontjában a Nap áll

→ ellipszis (fontosabb adatai)



$r_1 + r_2 = \text{áll.} = 2a$

a: az ellipszis félnagytengelye

b: fél kistengely

c: lineáris excentricitás

c: ha 0 lenne, akkor pont középen lenne mind a két fókuszpont
($c = 0 \Rightarrow$ kör)

→ minél nagyobb, annál inkább ellipszis az ellipszis és nem kör (: annál jobban el van nyújtva a kör)

1) $\boxed{a^2 = c^2 + b^2}$

2) $\boxed{\varepsilon := \frac{c}{a}}$: a fókuszpont milyen arányban osztja a nagytengelyt

: numerikus excentricitás (egy szám 0 és 1 között)

→ $c = \varepsilon \cdot a$

1)-be:

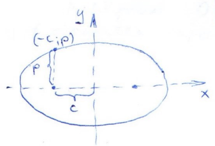
$a^2 = (\varepsilon a)^2 + b^2$

$b^2 = a^2 - (\varepsilon a)^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$

$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

Az ellipszis egyenlete: (kannonikus):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



$$\frac{c^2}{a} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

$p = ?$

$p^2 = b^2 - c^2\frac{b^2}{a^2} = b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)$

$p^2 = b^2 \cdot (1-\varepsilon^2)$

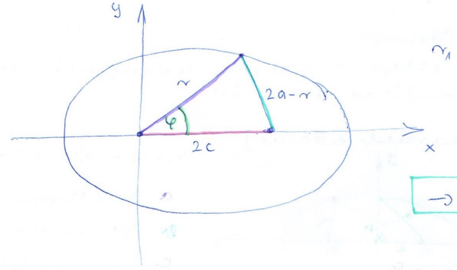
$p^2 = b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$p^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad /\sqrt{\ }$

$p = \frac{b^2}{a} = \frac{b}{a} \cdot b$

Egyenlet polárkoordinátákkal

→ középpontként a Napot érdemes felvennem



$r_1 + r_2 = 2a$

$r(\varphi) = ?$

$\boxed{\rightarrow r, \varphi}$

Koszinusz-tétel:

$(2a-r)^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r\,2c\cos\varphi$

$\cancel{(4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\varphi)}$

$4a^2 - 4ar + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 4c^2 - 4cr\cos\varphi$

$a^2 - c^2 = ar - cr\cos\varphi$

$a^2 - c^2 = ar\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)$

$b^2 = ar(1-\varepsilon\cos\varphi)$

$\Rightarrow \quad r = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

$r(\varphi) = p\frac{1}{1-\varepsilon\cos\varphi} = \boxed{\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}}$

→ $r(0) = \frac{p}{1-\varepsilon} = a + c$

→ $r(\pi) = \frac{p}{1+\varepsilon} = a - c$

→ $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = p$

Kúpszelet: $\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}}$: a kúpszelet polárkoordinátás egyenlete

$0 \le \varepsilon < 1$: ellipszis ($\varepsilon = 0$: körpálya → spec. ellipszis)

$\varepsilon = 1$: parabola

$\varepsilon > 1$: hiperbola

K. II.:

– a bolygók vezérsugarai egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrolnak

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = q = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r v_\perp = \text{áll.}$$: területi seb.

$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}(t)$: adott (nagyon kicsi) szögelfordulás alatt súrolt terület

K. III.:

A bolygók keringési idejének a négyzete és a Naptól mért közepes távolságának köbének a hányadosa, egy a Naprendszerre jellemző hányados.

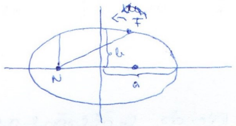
$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \text{áll.}}$$

(közepes naptávolság (r) = fél nagytengely (a)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$
)

Biz.: $q = \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2} = \frac{c}{2}$

$$p = \frac{c^2}{\gamma M} = \frac{b^2}{a}$$



Ellipszis területe: $T_e = \pi a b$

$$T = \frac{\pi a b}{q} = \frac{2\pi a b}{c}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi a^2 b^2}{\gamma M \frac{b^2}{a}} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$$ jellemző állandó

A gravitációs erő munkája

(munkavégzés a gravitációs erőtérben)

$$\underline{F}_g = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}\, d\underline{s} \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i\, d\underline{s}_i = \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{mM}{r_i^2}\, dr_i \approx \int_{r_1}^{r_2} -\gamma \frac{mM}{r^2}\, dr = -\gamma m M \int_{r_1}^{r_2} \overbrace{\frac{1}{r^2}}^{r^{-2}} dr =$$

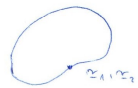
$$= -\gamma m M \underbrace{\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}}_{\left(\frac{r^{-1}}{-1}\right)} = -\gamma m M \left[-\frac{1}{r_2} - \left(-\frac{1}{r_1}\right)\right] = -\gamma m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= \gamma m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

(homogén erőtérben: $mg\Delta h$)

A gravitációs erőtér konzervatív?

Igen, bármilyen zárt pályán körbemenve a munkavégzés mindig nulla.



$$\oint \underline{F}\, d\underline{s} = \underbrace{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}_{0} = 0$$

r_1 és r_2 zárt pálya esetén ugyanaz.

=> ekkor be kell vezetni potenciális energiát

Gravitációs erőtér pot. energiája

-> a tér minden pontjához hozzárendel egy számot (ennyi az E_{pot})

$$E_{pot}(r) = -\int_{r_0}^{r} \underline{F}\, d\underline{s} = -\gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \gamma m M \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) =$$

$$= -\gamma m M \frac{1}{r}$$

Mozgás gravitációs erőtérben

$$\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} \qquad r^2 \dot{\varphi} = c = 2q = \text{áll.} \quad (\text{K. II.})$$

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

– centrális erőtér

$$\underline{r}(t) = r(t)\, \underline{e}_r(t) \qquad \underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\, \underline{e}_\varphi$$

$$m \left[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cdot \underline{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}_{0 \iff r^2\dot{\varphi} = c} \underline{e}_\varphi \right] = -\gamma \frac{mM}{r^2} \underline{e}_r$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \qquad /:m$$

$$\ddot{r} - r \frac{c^2}{r^4} = -\gamma \frac{\cancel{m} M}{r^2}$$

$$\boxed{\ddot{r} - c^2 \cdot \frac{1}{r^3} = -\gamma \frac{M}{r^2}}$$

Súlyos és tehetetlen tömeg

N. II.: $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ → a test tehetetlenségének mérése

m ↓ tehetetlen tömeg

a test 2 különböző tulajdonság

Newton-féle gravitációs tv.

súlyos tömeg

$$\underline{F} = -\gamma \frac{m_s M_F}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

→ a gravitációs kh.-ban való részvétel mérésére (tömegvonzás mérésére jell.)

$$m_t \cdot a = m_s \cdot g = \gamma \frac{m_s M_F}{R_F^2}$$

$$a = \frac{m_s}{m_t} \cdot g$$

Newton: $\varepsilon = \left| \frac{m_t}{m_s} - 1 \right| < \frac{1}{1000}$ (mennyire nem 1) (: mérési pontosság?)

~~(ha a = g)~~

~~(+)~~ m_t és m_s egyenlőségének (arányosságának) igazolása:

→ Eötvös Loránd (torziós inga)

$\varepsilon < \frac{1}{20\,000\,000}$ pontosság

X. Pontrendszerekre vonatkozó tételek

- pontr.: „amiben több tömegpont van" } egymással kh.-ban lévő pontszerű testekből álló rendszer
  → egymással kh.-ban vannak

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} = \underline{F}_e^{(k)} \quad : \text{ külső erők eredője}$$

$$\sum_i m_i \underline{a}_i = \sum_i m_i \dot{\underline{v}}_i = \sum_i (m_i \underline{v}_i)^{\cdot} = \left(\sum_i m_i \underline{v}_i\right)^{\cdot} = \left(\sum_i \underline{p}_i\right)^{\cdot} = \dot{\underline{p}}_i$$

a rendszer összimpulzusa

Pontrendszer esetén: pontrendszerre vonatkozó impulzustétel

$$\boxed{\dot{\underline{P}}_i = \underline{F}_e^{(k)}} \qquad (\dot{\underline{p}} = \underline{F}_e \text{ : tömegpont esetén})$$

- a pontrendszer összimpulzusát a külső erők tudják megváltoztatni
- van olyan, hogy sikerül úgy kiválasztani a pontr.-t, hogy nincs külső erő → zárt rendszer

$$\underline{F}_i^{(k)} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{P}} = 0 \Rightarrow \underline{P} = \text{áll.}$$

TKP fogalma

Azt a pontot, mellyel jellemezhetjük a pontrendszer mozgását, TKP-nak nev. (~~Ebben a pontban a pontrendszer összetömege~~)

(~~Mozgását~~ Úgy képzeljük el, mintha a rendszer össztömege benne koncentrálódna, egy tömegpont lenne.)

Tömegközéppont tétel

$$\underline{r}_{TKP}(t) = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i(t)}{\sum_i m_i} \qquad \left(\sim \frac{\sum_i k_i j_i}{\sum_i k_i} \right)$$

súlyozott átlag

$$M \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \boxed{M \cdot \underline{a}_{TKP} = \underline{F}_e^{(k)}}$$

: Pontrendszerre von. tömegközéppont-tétel

: A pontrendszer úgy mozog, mintha benne egyesítenénk a rendszer össztömegét, és rá (a rendszerre) a külső erők eredője hatna.

Pl.: tűzijáték: a TKP-ja úgy mozog a parabola pályán, mintha egy M tömegű test szabadon esne

Pl.: csónak: akárhogy mozoghat, a TKP-ja nem mozdul el, mert nincs x-irányú külső erő (csak EVEM-et végez)

Zárt rendszer tulajdonságai

$\underline{F}_i^{(k)} = \underline{0}$: nincs külső erő

$\underline{p} = \text{áll.}$ (zárt rendszer impulzusa megmarad)

$\underline{N} = \text{áll.}$ impulzusmomentum

$\underline{F}_i^{(k)} = 0 \Rightarrow \underline{\dot{P}} = 0 \Rightarrow \underline{P} = \text{áll.}$

Síkmozg.: körmozgás

$$N = r \cdot v_{\perp} = r^2 \cdot \omega$$

↓ sugárra merőleges

$N_z = 2m r^2 \omega = \text{áll.}$ a pontrendszer összimpulzusmomentuma

→ forgószék (karral)

→ kerék + forgószék
- csak belső erők hatottak a résztvevő és a kerék között
- kívülről nem hatott forgatónyomaték

→ jégtáncos
- ki-be húzza a kezét
- → „felpörög"

- zárt rendszerben nem tűnhet el $\underline{N}$

→ Föld - Hold
- 28 naponta a Hold körbemegy (↔)
- ár-apály jelenség → lassul a Föld forgása
  - → meg fog állni
- → ha a Föld megáll, akkor a Hold távolabb kerül (mivel az impulzusmomentuma kicsit nagyobb lesz)

Tömegközéppont-tétel zárt rendszer esetén:

$$M \underline{a}_{TKP} = 0 \Rightarrow \underline{a}_{TKP} = \underline{\ddot{r}}_{TKP} = 0 \Rightarrow \underline{v}_{TKP} = \underline{\dot{r}}_{TKP} = \text{áll.}$$

$$\boxed{\underline{r}_{TKP}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_{TKP} \cdot t}$$ (EVEM)

(pl. Naprendszer)

Pontrendszerre von. impulzusmomentum tétel

N. II. $m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underline{F}_{ij}^{(b)}$ $\quad / \underline{r}_i(t) \times$

$$\underline{r}_i \times m_i \underline{a}_i = \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}^{(b)}$$

$$\underbrace{(\underline{r}_i \times m \underline{v}_i)^{\bullet}}_{\underline{N}_i} = \underline{\dot{N}}_i = \underline{M}_i^{(k)} + \sum_j \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}^{(b)}$$ (N diff. vektoregyenlet)

$\sum_{i=1}^{N}$: $\sum_i \underline{\dot{N}}_i = \sum_i \underline{M}_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}^{(b)}$

$$\sum_i \underline{N}_i = \underline{N}$$

$$\underline{\dot{N}} = \underline{M}_e^{(k)} + \underbrace{\sum_i \sum_j \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}^{(b)}}_{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij}^{(b)}}$$

↓ minden tagot kétszer vettünk

→ a belső erők forgatónyomatékának összege olyan párokra bontható, amelyek mindegyikében erő és ellenerő forgatónyomatéka szerepel

Centrális erő: $\underline{r} \parallel \underline{F}$

(az erő hatásvonala a pontokat összekötő egyenesbe esik)

$$\underline{r}_i - \underline{r}_j \parallel \underline{F}_{ij}$$

$$(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{F}_{ij} = 0$$

→ a perdületet csak a külső forgatónyomaték tudja megváltoztatni

$$\boxed{\underline{\dot{N}} = \underline{M}_e^{(k)}}$$ pontrendszerre von. impulzusmom.-tétel

Egy pontrendszer összimpulzusmomentumának idõderiváltja megegyezik a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékának vektori összegével.

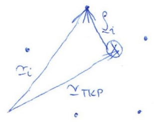
TKP-i koordináta-rendszer

Hogyan válasszuk ki a koordináta-rendszert?

→ a kp.-ja a pontrendszer TKP-ban van → TKP-i kr.

$$\boxed{\underline{r}_{TKP} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{= M}}}$$

TKP-ból mutat a testhez (~~[illegible]~~):



$$\underline{r}_i = \underline{r}_{TKP} + \underline{\rho}_i$$

$$\underline{r}_{TKP} = \sum_i \frac{m_i(\underline{r}_{TKP} + \underline{\rho}_i)}{M} + \frac{\sum_i m_i \underline{r}_{TKP}}{M} + \frac{\sum_i m_i \underline{\rho}_i}{M} =$$

$$= \frac{\sum_i \underline{r}_{TKP} \sum m_i}{M} + \frac{\sum_i m_i \underline{\rho}_i}{M} = \underline{r}_{TKP} + \frac{\sum_i m_i \underline{\rho}_i}{M}$$

$$\boxed{\frac{\sum_i m_i \underline{\rho}_i}{M} = 0}$$ → a TKP koordinátája az origóban van

TKP sebessége:

$$\boxed{\frac{\sum_i m_i \dot{\underline{\rho}}_i}{M} = 0}$$

Impulzusmomentum felbontása

$$\underline{N} = \sum_i m_i(\underline{r}_i \times \underline{v}_i) = \sum_i m_i[(\underline{r}_{TKP} + \underline{\rho}_i) \times \underline{v}_i \times (\underline{v}_{TKP} + \overbrace{\dot{\underline{\rho}}_i}^{\text{sebessége a TKP-hoz képest}})] =$$

$$= \sum_i m_i[\underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP} + \underline{r}_{TKP} \times \dot{\underline{\rho}}_i + \underline{\rho}_i \times \underline{v}_{TKP} + \underline{\rho}_i \times \dot{\underline{\rho}}_i] =$$

$$= M\,\underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP} + \underline{r}_{TKP} \times \underbrace{\left(\sum_i m_i \dot{\underline{\rho}}_i\right)}_{0} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \underline{\rho}_i\right)}_{0 \text{ (előbbi)}} \times \underline{v}_{TKP} + \sum_i m_i \underline{\rho}_i \times \dot{\underline{\rho}}_i =$$

$$= \underbrace{M \cdot \underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP}}_{\underline{N}_p} + \underbrace{\sum_i m_i \underline{\rho}_i \times \dot{\underline{\rho}}_i}_{\underline{N}_s}$$

$\underline{N}_p$: pálya imp. mom. (kr. megválasztásával meghatározott)

$\underline{N}_s$: saját imp. mom. (relatív: nem függ attól, hova teszem fel a kr.-t)

~~$\dot{\underline{N}} = \underline{M}_e^{(k)}$~~

~~$(\dot{\underline{N}}_p + \dot{\underline{N}}_s) = \underline{M}_e^{(k)}$~~

~~[illegible]~~

$$\dot{\underline{N}} = \underline{M}_e^{(k)}$$

$$(\dot{\underline{N}}_p + \dot{\underline{N}}_s) = \underline{M}_e^{(k)}$$

$$(\dot{\underline{N}}_p + \dot{\underline{N}}_s) = \underline{M}_p + \underline{M}_s$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{N}}_p &= \underline{M}_p \\ \dot{\underline{N}}_s &= \underline{M}_s \end{aligned}}$$

$$\dot{\underline{N}}_p = (M \underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP})^{\cdot} = \underbrace{M \dot{\underline{r}}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP}}_{\substack{0 \\ \text{(párh. vektorok)}}} + M \underline{r}_{TKP} \times \underline{a}_{TKP} = \underline{r}_{TKP} \times M \underline{a}_{TKP} = \underline{r}_{TKP} \times \underline{F}_e^{(k)} = \underline{M}_p$$

Munkatétel pontrendszerre

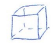
$$m \cdot \underline{a}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \underbrace{\sum_i \underline{F}_i^{(k)}}_{\underline{F}_i^{(b)}} \qquad / \cdot \underline{v}_i$$

$$\left(\frac{1}{2} m \underline{v}_i^2\right)^{\cdot} = \underline{F}_i^{(k)} \underline{v}_i + \underline{F}_i^{(b)} \cdot \underline{v}_i = \underline{P}_i^{(k)} + \underline{P}_i^{(b)} \qquad / \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Delta E_{kin} = W_i^{(k)} + W_i^{(b)}$$

$$\boxed{\Delta E_{kin} = \underbrace{W^{(k)}}_{\sum_i W_i^{(k)}} + W^{(b)}}$$

$W^{(b)} = 0$

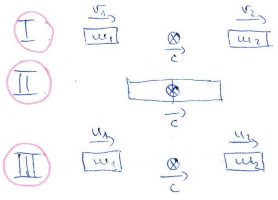


$W^{(k)} = \Delta E_{kin}$

XI. Pontrendszerekkel kapcs. jelenségek

Ütközések

Vonal mentén lezajló ütközések (1D)



$v_1 > v_2$

egy rövid ideig c közös sebességgel haladnak

$(u_2 > u_1)$

p = áll.

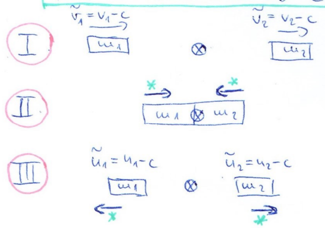
$$p = p_x = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

$$v_{TKP} = \frac{m_1 v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = c$$

A közös sebesség megegyezik a TKP sebességével.

Ütközések leírása TKP-i kr.-ben

$\boxed{\text{TKP-i rendszer} \Rightarrow c\text{-vel mozgó kr.}}$



*: mozgás iránya

$$\tilde{p} = m_1 \cdot \tilde{v}_1 + m_2 \cdot \tilde{v}_2 = m_1 (v_1 - c) + m_2 (v_2 - c) =$$

$$= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - c\,(m_1 + m_2) =$$

$$= m_1 v_1 + m_2 \cdot v_2 - (m_1 + m_2)\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \cdot \tilde{v}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{v}_1}{\tilde{v}_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

$$\tilde{p} = m_1 \cdot \tilde{u}_1 + m_2 \cdot \tilde{u}_2 = 0 \Rightarrow \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_2} = -\frac{m_2}{m_1} = -\varepsilon$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -\varepsilon\, \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 &= -\varepsilon\, \tilde{u}_1 \end{aligned}\right\} \quad \cancel{(\tilde{u}_1 = u_1 - c \to u_1 = c - \varepsilon \tilde{u}_2)}$$

ε: ütközési szám (kh.-ra jell.) → mágneses esetén: $\varepsilon = 0$
(nincs visszaalak. szakasz, a két test közös seb.-gel halad tovább)
→ rugós: $\varepsilon = 1$ (a deform. teljesen visszaalakul)

Ütközési szám

Jele: ε

$$\varepsilon = -\frac{\Delta u}{\Delta v} = -\frac{u_2 - u_2}{v_2 - v_1}$$

$\boxed{0 \leq \varepsilon \leq 1}$, ~~...~~ melyben,

$\varepsilon = 0$: mágneses esetén → tökéletesen rugalmatlan ütk.

$\varepsilon = 1$: rugó esetén → tök. rugalmas ütk.

→ **Tök. rugalmatlan:**

$\boxed{\varepsilon = 0} \Rightarrow |\Delta E_{kin}| = max$

p = áll.

$u_1 = u_2$

Ilyenkor a legnagyobb az energiaveszteség.

→ **Tök. rugalmas:**

$\boxed{\varepsilon = 1} \Rightarrow \Delta E_{kin} = 0 \Rightarrow W^{(b)} = 0$

↳ a belső erők konzervatívak vagy csak kényszererők hatottak

p = áll.

E_{kin} = áll.

Ha jól gondolom... $\varepsilon = -\frac{\text{után}}{\text{előtt}} = -\frac{\tilde{u}_1}{\tilde{v}_1}$

$$\to \tilde{u}_1 = -\varepsilon \tilde{v}_1$$

Illetve tudjuk: $\boxed{\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= u_1 - c \\ \tilde{v}_1 &= v_1 - c \end{aligned}} \to u_1 = \tilde{u}_1 + c$

$$\begin{cases} u_1 = \tilde{u}_1 + c = c - \varepsilon \tilde{v}_1 = c - \varepsilon (v_1 - c) \\ u_2 = \tilde{u}_2 + c = c - \varepsilon \tilde{v}_2 = c - \varepsilon (v_2 - c) \end{cases}$$

Energiamérleg?

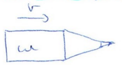
$$\Delta E_{kin} = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

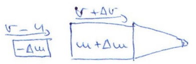
$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Rakétamozgás

I.



II.



$\Delta m < 0 \Rightarrow$ csökken a tömege

Δm: a rakéta össztömegének a megváltozása

$$\boxed{mv = (m + \Delta m)\cdot(v + \Delta v) - \Delta m\,(v - u)}$$

$$\cancel{mv} = \cancel{mv} + m\,\Delta v + \cancel{\Delta m\, v} + \underbrace{\cancel{\Delta m\,\Delta v}}_{\text{elhanyagolható}} - \cancel{\Delta m\, v} + \Delta m\, u$$

(rövid folyamat során és nagyon kicsi)

Egyszerűsítések után:

$$m\cdot\Delta v = -\Delta m\, u$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta m} = -\frac{u}{m}$$

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$$

$v(m)$: $\boxed{v'(m) = -\frac{u}{m}}$ (kicsi vált. a seb. egy nagyon kicsi tömeg esetén)

$$f'(x) = -\frac{a}{x}$$

$$f(x) = ?$$

keresem az eredeti fgv.-t $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$-u$: konstans

$$\Rightarrow v(m) = -u\ln m + C$$

$$v(m_0) = -u\ln m_0 + C = v_0$$

$$C = v_0 + u\ln m_0$$

$\rightarrow v(m)$-be helyettesítve:

$$v(m) = -u\ln m + v_0 + u\ln m_0 = v_0 - u\,(\ln m - \ln m_0) = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m}$$

$\rightarrow$ a seb. csak az aktuális tömegtől függ

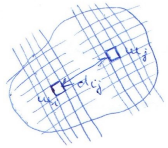
$$\boxed{v(t) = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m(t)}}$$

Rakétamozgás egyenlete : Ciolkovszkij-egyenlet

XII. Merev testek kinematikája és sztatikája

Merev test

Olyan test, melyben minden pontpár távolsága állandó.
(∀ pontrendszer)



d_{ij} = áll.

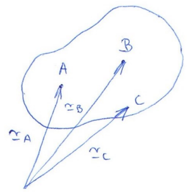
Merev test szabadsági fokainak száma: f ~~(9 adat)~~

(1) → 3, nem egy egyenesbe eső pont megadásával rögzíthető (9 adat)

→ 1 pont rögzítése: szabadon foroghat

→ 2 pont: összekötő egyenes körül forog (ezért ne legyen a 3. pont az egyenesen)

→ r_A, r_B, r_C



$$\left.\begin{aligned} |r_A - r_B| &= d_{AB} \\ |r_A - r_C| &= d_{AC} \\ |r_B - r_C| &= d_{BC} \end{aligned}\right\}$$

merev testek esetén a 3 pont közötti távolság adott, nem vált.

$$\Rightarrow f = 9 - 3 = 6$$

A test helyzete 6 független adattal jellemezhető.

(2) Merev test egy pontjának a koordinátái: 3 adat
+ Euler-szögek: 3

$\Rightarrow$ 6

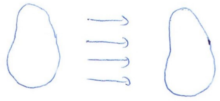
Euler-tétel

Egy merev test elemi elmozdulása egy tetszőleges pontjának transzlációjából és a ponton átmenő, pillanatnyi tengely körüli elfordulásából állítható elő.

(3D): elmozdulás: $\underbrace{\text{transzláció}}_{\text{eltolás}} + \underbrace{\text{rotáció}}_{\text{forgatás}}$

Merev test általános mozgása

Transzlációs mozg.



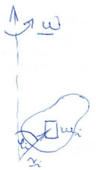
: eltoljuk
∅ forgatás

$v_i = v_0$ (mindegyik tömegpont sebessége áll. / ua.)

→ a test minden pontja ugyanakkora elmozdulást szenved
→ minden pontja ugyanúgy mozog

Rotáció

→ elforgatás adott pont körül



r_i: tengelytől vett távolság

$v_i = \omega \times r_i$

Ált. mozg.:

$$\underbrace{v_i = v_0}_{\text{transzláció}} + \underbrace{\omega \times r_i}_{\text{rotáció}}$$

ω: az egész testre jell. (~~állandó szám~~)
→ a mozgásra jellemző állandó

2D: $\underset{2}{v_0}$, $\underset{1}{\omega_0}$ (3 adat)

3D: v_0, ω (6 adat)

Merev test egyensúlyának feltétele:

$v_i = 0$: minden egyes pontja áll

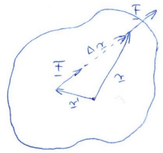
$$v_{TKP} = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \ddot{r}_{TKP} = 0 \Rightarrow F_e = 0$$

$$N = \sum_i m_i r_i \times \underbrace{v_i}_{0\text{, mivel áll a test}} = 0 \Rightarrow \dot{N} = 0 \Rightarrow M_e = 0$$

$\boxed{\text{egyensúly} \iff F_e = 0 \quad M_e = 0}$

Erőrendszer redukálása

→ erőrendszer: összes erő + támadáspontja
↳ az erő eltolása a hatásvonala mentén

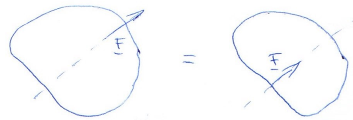


$\Delta r \parallel F$

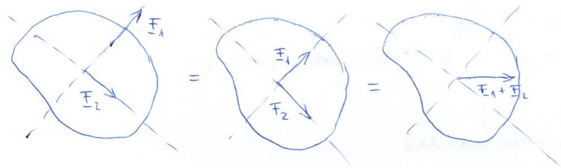
$M' = r' \times F = (r + \Delta r) \times F =$

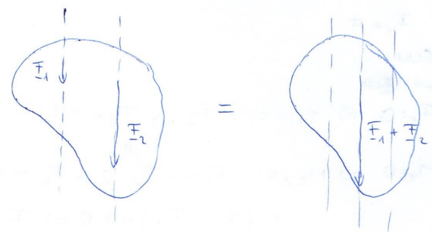
$= r \times F + \underbrace{\Delta r \times F}_{0} = r \times F = M'$

→ ugyanaz maradt
↳ az erőt eltolhatom a hatásvonala mentén



→ egyensúly szempontjából ekvivalens



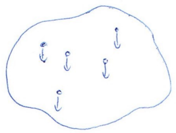


Erőpár: $F_e = 0$

~~Erőpár~~ $\left.\begin{array}{l} F_1 = F \\ F_2 = -F \end{array}\right\}$ $M = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = (r_1 - r_2) \times F = d \times F$

- nem helyettesíthető egyetlen erővel, mert $F_e = 0$ és nem fejt ki forgatónyomatékot
- egy erőrendszer redukálható egy erőre és egy erőpárra

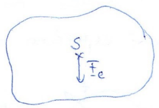
Súlypont:



→ minden atomjára hat nehézségi erő

$\underline{G} = Mg$

=



S: súlypont

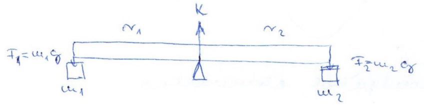
- kitüntetett pont

(homogén pl. nehézségi erőtér esetén, S = TKP)

Példák merev test egyensúlyára

$\underline{F}_e = 0 \quad , \quad \underline{M}_e = 0$

1. mérleg



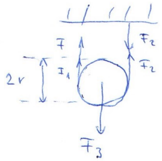
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}$

$F_e = 0 \Rightarrow K = (m_1 + m_2) g$

$M_e = 0 \Rightarrow F_1 \cdot r_1 - F_2 \cdot r_2 + K \cdot 0 \Rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2$

pl. kétkarú mérleg
hagyományos postai mérleg

2. csiga



$F_1 = F$

felt.:

$F_e = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = F_3 \Rightarrow F_3 = 2F$

$M_e = 0 \Rightarrow M_{ez} = -F_1 r + \overset{0}{F_3 \cdot 0} + F_2 \cdot r = (F_2 - F_1) r = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = F$

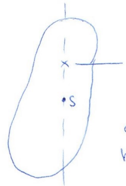
→ álló csiga
→ mozgó csiga

Egyszerű gépek:

- lejtő
- ék
- csavar
- mérleg
- csiga

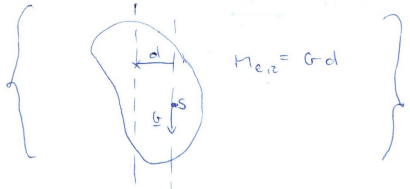
3. fizikai inga

→ „felfüggesztett tárgy" leng egy tengely körül



felfüggesztési pont

Akkor van egyensúlyban, ha a súlypont a felfüggesztési pont alatt/fölött van.



$M_{e,z} = Gd$

XIII. Merev testek dinamikája

Merev test rögzített tengely körüli forgása

$m \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \dot{\underline{P}} = \underline{F}_e$

$\dot{\underline{N}} = \underline{M}_e \longrightarrow (z) \ \boxed{\dot{N}_z = M_{ez}} \ (= \sum_i r_i \times F_i)_z$

(imp.nyom.-tétel z-irányú)

↳ csak a nem kényszererő

- kényszererő: hat a tengelyre, mivel nem mozdulhat el akárhogy

$N_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \omega = \underbrace{(\sum_i m_i \rho_i^2)}_{\Theta} \omega = \Theta \omega \qquad [\Theta] = kg\,m^2$

Θ: tehetetlenségi nyomaték

$\dot{N}_z = (\Theta \dot{\omega}) = \Theta \dot{\omega} = \boxed{\Theta \beta = M}$: forgómozg. alapegyenlete

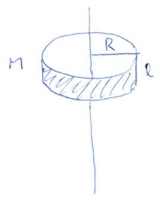
tengely egy pontjára, nem akármelyikre

~~Tehetetl~~

Tehetetlenségi nyomaték meghat.

→ nem egy testre számoljuk ki, hanem egy testre és egy tengelyre

1. abroncs

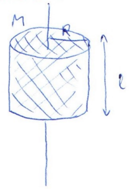


~ biciklikerék (jó közelítéssel)

M: tömeg, nem forgatónyomaték

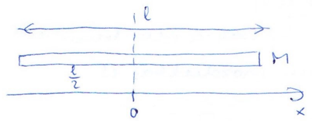
$$\Theta = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i R^2 = \left(\sum_i m_i\right) R^2 = MR^2$$

2. henger



$$\boxed{\Theta = \frac{1}{2} MR^2}$$

3. rúd („vékony rúd")



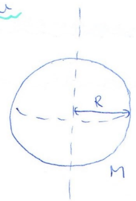
$$\Theta = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i x_i^2 =$$

$$= \sum_i M \frac{dx}{l} x_i^2 =$$

$$= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx =$$

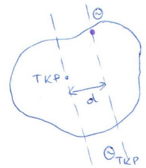
$$= \frac{M}{l} \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} Ml^2$$

4. gömb



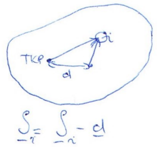
$$\boxed{\Theta = \frac{2}{3} MR^2}$$

Steiner-tétel



Két ∥ tengelyre van., az egyik a TKP-on megy át

Felülnézet:



$\underline{\rho}_i' = \underline{\rho}_i - \underline{d}$

$$\Theta_{TKP} = \sum_i m_i \rho_i^2$$

$$\Theta = \sum_i m_i \rho_i'^2 = \sum_i m_i (\underline{\rho}_i - \underline{d})(\underline{\rho}_i - \underline{d}) =$$

$$= \sum_i m_i (\rho_i^2 - 2\underline{\rho}_i \underline{d} + \underline{d}^2) =$$

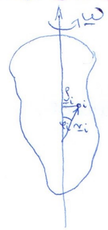
$$= \sum_i m_i \rho_i^2 - 2 \sum_i m_i \underline{\rho}_i \underline{d} + \sum_i m_i d^2 =$$

$$= \Theta_{TKP} - 2 \underbrace{\left(\sum_i m_i \underline{\rho}_i\right)}_{0 \text{ (tengelyen átmenő)}} \underline{d} + Md^2 =$$

$$= \boxed{\Theta_{TKP} + M d^2}$$

tengelyeinek távolságának négyzete

Forgási energia



→ rögzített tengely körüli forgás

$\underline{v}_i = \underline{\omega} \times \underline{r}_i$

$v_i = \omega \rho_i$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2$: kicsi részecskére

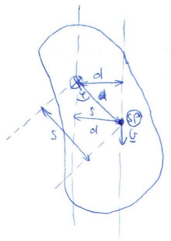
A teljes E_{kin} (forgó rendszeré):

$$E_{kin} = \sum_i E_{kin,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)}_{\Theta} \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = E_{forg}}$$

a tehetetlenségi nyomaték erre a tengelyre von.

Fizikai inga mozg.

?



$G = m \cdot g$

$M_z = 0$

$M = \Theta \cdot \beta$

$M = - m g s \sin\varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g s}{\Theta} \sin\varphi = 0$$

Merev testek ált. mozgásának leírása

- szabadsági fokainak száma : 6 $\rightarrow$ 6 egyenlet

$$\boxed{M \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \underline{F}_e}$$

$$\boxed{\dot{\underline{N}} = \underline{M}_e}$$

$$\boxed{\underline{N} = \underline{N}_p + \underline{N}_s}$$

$$\boxed{\underline{M} = \underline{M}_p + \underline{M}_s}$$

$\underline{N}_p = M \cdot \underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP}$	$\underline{M}_p = \underline{r}_{TKP} \times \underline{F}_e$
$\underline{N}_s = \sum_i m_i \underline{\rho}_i \times \dot{\underline{\rho}}_i$	$\underline{M}_s = \sum_i \underline{\rho}_i \times \underline{F}_i$

$$\boxed{\dot{\underline{N}}_p = \underline{M}_p}$$

$$\boxed{\dot{\underline{N}}_s = \underline{M}_s}$$

$$\dot{\underline{N}}_p = (M \underline{r}_{TKP} \times \underline{v}_{TKP})^{\cdot} = \underline{r}_{TKP} \times M \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \underline{r}_{TKP} \times \underline{F}_e$$

($\underline{N}_s$:) $\rightarrow$ a saját imp. egyenlet nem függ a kr.-választástól, mert mindig a TKP-ra kell felírni

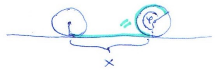
Merev testek síkmozgása

$\boxed{x, y, \varphi}$: leírja egyértelműen, hol van a test

$M \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \underline{F}_e$ (2 db egyenlet)

$\dot{N}_z = M_z$ (csak z-komponense van)

Tisztán gördülés



$x(t) = R \cdot \varphi(t)$

$a = R \cdot \beta$: tisztán gördülés feltétele

$$a_x = \underbrace{\frac{M}{M + \frac{\Theta}{R^2}}}_{1\text{-nél kisebb szám}} \sin\alpha \, g$$

A merev test tisztán gördül, ha az alátámasztásával érintkező pontjának seb.-e zérus.
($v_{haladó} + v_{kerületi} = 0$)

Merev test ált. mozgása

$\underline{F} = M \cdot \underline{a}_{TKP}$

$\dot{\underline{N}}_s = \underline{M}_s = \sum_i \underline{\rho}_i \times \underline{F}_i$

$\underline{N}_s = \sum_i m_i \underline{\rho}_i \times \dot{\underline{\rho}}_i$

$\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}_i$

$$\underline{N}_s = \sum_i m_i \underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) =$$

$$= \sum_i m_i [(\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i) \underline{\omega} - (\underline{\rho}_i \underline{\omega}) \underline{\rho}_i] =$$

$$= \underbrace{\Big\{ \sum_i m_i [(\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i) \underbrace{\underline{\underline{E}}}_{\text{kalap}} - \underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i] \Big\}}_{\underline{\underline{\Theta}}} \underline{\omega}$$

$\underline{\underline{\Theta}}$: tehetetlenségi tenzor

$\rightarrow$ mátrix

$$\boxed{M \ddot{\underline{r}}_{TKP} = \underline{F}_e}$$

$$\boxed{(\underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\omega})^{\cdot} = \underline{M}}$$

Pörgettyű:

egy pontjában rögzített merev test

→ 3 szabadsági fokát rögzítettem ezzel

① Erőmentes p.:

- a rögzítési pont = pont a súlypont ($\dot{\underline{N}} = \underline{M}$)

⇒ $\underline{M} = 0$ ⇒ $\underline{N}$ = áll.

→ ha arra a pontra függjük fel, ahol rögzítettük, akkor a kényszererők nem játszanak szerepet

② Súlyos p.:

⇒ $\underline{M} \neq 0$ ⇒ $\underline{N} \neq$ áll.

- a súlypontjára ható M hatására megfelelő ω forgási szöggel esetén precessziós mozgást végez

→ ① Nutáció

→ $\underline{N}$ = áll.

$\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$

$\underline{N}$ áll. esetén nem biztos, hogy $\underline{\omega}$ vele egy irányba mutat (nem párh.)

→ körbejárja ω N-t

→ ② Precesszió

: $\underline{N}$ változása