Mérés, mértékrendszerek, mérési eredmények kiértékelése

1. tétel

A fizika módszerei

-> megfigyelés

-> kísérlet (labor) – többször megismételhető
- egyes paraméterek hatásának vizsgálata
- matematikai összefüggések keresése

-> mérés

-> törvény => ha kellő számú törvény és kísérleti tapasztalat gyűlik össze -> kapcsolatok, összefüggések keresése

-> elmélet megalkotása
- ~ hipotézis felállítása a használhatóság keretein belül
- ~ modellek (tömegpont, merev test, ideális gáz)
  - ↳ ezek csak közelítőleg írják le a valóságot, az érvényességi kör korlátozott

-> korrespondencia elve – a jelenségeket általánosabban leíró elmélet foglalja magába az előző közelítő leírást, mint határesetet, ha ezt a határátmenetet megtesszük

A kísérleti fizika helye a fizikában

-> a kora újkor kezdetétől számítjuk – Galilei munkásságától
(mai értelemben vett) (1564–1642)

-> módszere: indukció -> egyes jelenségek tanulmányozása -> általánosítás

↕

(elméleti fizika: dedukció)

törvények felismerése és matematikai leírása

Mérés — általában valamilyen önkényesen választott egységgel történő összehasonlítás

→ eredményét a mérőszám és mértékegység együtt fejezi ki

$$X = \{X\} \cdot [X]$$

ennek van dimenziója

Kialakulás története (m, kg, s)

→ 1790 ⇝ méter, mint a hosszúság egysége

⇝ kilogramm, mint a tömeg egysége ← 1889 platina-irídium henger tömege (Párizs)

$$\boxed{\to 1\,m := \frac{L_{délkör}}{4 \cdot 10^7}}$$

délkör hossza → probléma, ha pontosabb mérés áll rendelkezésre, akkor új m-t kell készíteni

további problémák: hőtágulás

hosszú idő alatti szerkezeti változás

háborúk (etalon elvesztése)

⇓

m hosszát definiálja az atomok által kibocsátott sugárzás hullámhossza (1960-tól)

majd Bay Zoltán javaslatára 1983-ban

$$\to \boxed{1\,m := c_{vákuum} \cdot \frac{1}{299\ 792\ 458}}$$

→ idő (→ periodikus jelenség szükséges hossza)

~ csillagnap — a Föld állócsillagokhoz viszonyított egyszeri megfordulása saját tengelye körül

~ napi nap — a Nap két egymást követő delelése közt eltelt idő

⇓

középnap — a Nap két delelése közti idő lenne, ha a Föld a pályáján végig azonos sebességgel haladna

~ tropikus év — az az idő, ami alatt a Föld egyszer megkerüli a Napot (~ 365,2422 nap) viszont az állócsillagokhoz képest eggyel többször fordul meg

$$\Rightarrow 1 \text{ csillagnap} = \frac{365{,}2422}{366{,}2422} \text{ középnap} = \boxed{86164{,}09\ \text{s}}$$

$$\uparrow \Delta t \approx 4 \text{ perc}$$

$$\left(1 \text{ középnap } 86400\text{-ad része} \rightarrow \text{s} := \frac{1}{\boxed{86400}} \text{ középnap}\right)$$

Hosszúság mérése

→ mérőrúd → tolómérő

→ mérőszalag → csavarmikrométer

Idő mérése — periodikusan ismétlődő jelenséget vesz alapul

→ órák (mechanikus, elektromos, elektronikus, atom)

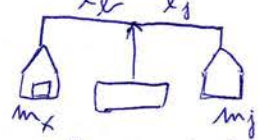
↓ csavarrugóban tárolt energia

↓ egyenletesen forgó motor

↓ oszcillátor

Tömeg mérése

→ statikus → mérlegelés (Borda-féle) → kétkarú mérleg



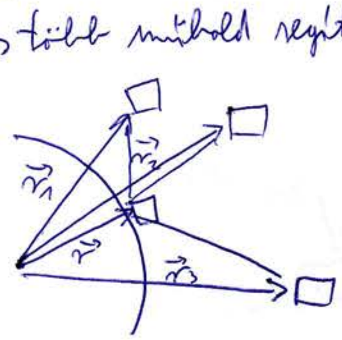
$m_x \cdot l_e \cdot g = m_j \cdot l_j \cdot g$

→ dinamikus → csavarrugón elhelyezett test

↘ rugós erőmérő, torziós erőmérő

GPS

→ több műhold segítségével a Földön levő adókészülék helyzetének meghatározása



$$|\vec{r}_1 - \vec{r}| = c_v(T_1 - \textcircled{\delta}) \quad \swarrow (\text{vevőidő})$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}| = c_v(T_2 - \delta) \qquad \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}_3 - \vec{r}| = c_v(T_3 - \delta)$$

$$|\vec{r}_4 - \vec{r}| = c_v(T_4 - \delta)$$

SI mértékegységrendszer (Mo. 1991→) alapmennyiségek mértékegységei, definíciói

~> hosszúság (m)

~> tömeg (kg)

~> idő (s)

~> áramerősség (A)

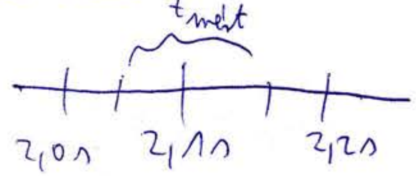
~> hőmérséklet (K)

~> anyagmennyiség (mol)

~> fényerősség (cd) (kandela)

A mérés hibája

a/



$$\underbrace{|t - t_{mért}|} \leq \frac{\boxed{0,1s}}{2} \leftarrow \text{beosztás}$$

$$\boxed{\Delta X = |X - X_m|}$$

⇒ a mérés <u>abszolút hibája</u>: $\boxed{\Delta(x) := |x_{pontos} - x_{mért}| \leq \frac{\Delta X}{2}}$

$$(t_m = (2,1 \pm 0,05)s)$$

⇒ a mérés <u>relatív hibája</u>: $\boxed{\delta(x) = \frac{|x - x_{pontos}|}{|x_{pontos}|} \cong \frac{\Delta X}{|x_m|}}$

$$\left(\delta(t) = \frac{0,05}{2,1} = 0,02381 \simeq 2,38\%\right)$$

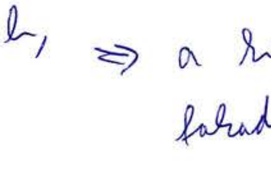
b/ ⇒ a külső körülményekből, a mérőeszközök tökéletlenségéből, használatából fakadó hibák: <u>szisztematikus hiba</u>

⇒ véletlen kimenetelű kísérletek, sok elvégzett mérés → valamilyen eloszlási görbe (logaritmikus, normál): <u>statisztikus hiba</u>

A hibaszámítás elemei, hibaterjedés alapműveleteknél

⌈ **hiba** csökkentése

- leolvasási hiba csökkentése - pl. finomabb beosztású skála
- mérendő mennyiség többszörösét mérjük ⌋

→ 

$$|\overset{\overset{pontos}{\downarrow}}{A} - \overset{\overset{mért}{\downarrow}}{a}| \leq \Delta(a)$$

$$|B - b| \leq \Delta(b)$$

⇒ <u>szorzat hibája</u> • $\Delta(a \cdot b) = |AB - ab| = |AB \overbrace{- Ab + Ab}^{\overset{bővítjük}{\downarrow}} - ab| \leq$

$$\leq \underset{\underset{\approx a}{\uparrow}}{|A|} \cdot |B - b| + |b| \cdot |A - a| \cong \underline{|a| \cdot \Delta(b) + |b| \cdot \Delta(a)}$$

$$\bullet\ \delta(ab) = \frac{\Delta(ab)}{|ab|} = \frac{\Delta(a)}{|a|} + \frac{\Delta(b)}{|b|} = \underline{\delta(a) + \delta(b)}$$

⇒ hatvány relatív hibája:

$$\bullet\ \delta(a^n) = n \cdot \delta(a)$$

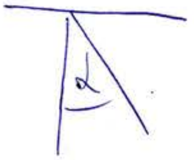
⇒ reciprok relatív hibája:

$$\delta\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{1}{b}\right)}{\left|\frac{1}{b}\right|} = \frac{\Delta(b)}{|b|} = \delta(b)$$

⇒ hányados hibája:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta\left(a\,\frac{1}{b}\right) \le \delta(a) + \delta\left(\frac{1}{b}\right) = \delta(a)+\delta(b)$$

pl.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\Downarrow$$

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} \rightarrow \delta(g) = \delta(l) + 2\,\delta(T)$$

Mérési eredmények kiértékelésének néhány módszere

→ számtani közép $\bar{a} = \frac{\sum a_i}{n} = \frac{1}{n}\sum a_i$

(→ egyszerű középeltérés $\Delta\bar{a} = \frac{1}{n}\sum|a_i-\bar{a}|$)

→ négyzetes eltérés: $\underbrace{\Delta^{(2)}(x) = \sum (x-x_i)^2}$

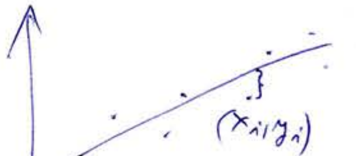
↳ $\Delta^{(2)}(x) = nx^2 - 2x\left(\sum_i x_i\right) + \left(\sum_i x_i^2\right)$

⇒ minimuma $x=\bar{x}$-nél

→ $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\Delta^{(2)}(\bar{x})}{n}}$ a mérés szórása

→ $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i^2-\bar{x}^2)}{n}}$ az átlag ismeretében a szórás

→ legkisebb négyzetek módszere



$y = ax+b$ ← lineáris

$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i-b)\right]^2 = \Delta^{(2)}(a,b)$ ← ahol ez a legkisebb az összes adatra nézve

$y = c\cdot x^{\alpha}$ ← nem lineáris

$\ln y = \ln c + \alpha\cdot\ln x$

A dimenzióanalízis alapgondolata

$$\text{kísérletezés} \longrightarrow \text{kiértékelés}$$

segítséget jelenthet a sejtések megfogalmazásában, hogy a fizikai mennyiségek mértékegységgel is rendelkeznek

- ! a törvényeket leíró egyenletek két oldalának azonos dimenziójúnak kell lennie.

- a dimenziót úgy értelmezzük, mint az adott mennyiség mérésekor használatos alapmennyiségek (mértékegységek) összességét.

pl. $\dim v = l \cdot t^{-1}$

$\dim F = m \cdot l \cdot t^{-2}$

- mechanikai mennyiségek leírása esetén:

$$\boxed{\dim x = l^{p} \cdot m^{q} \cdot t^{r}}, \quad \dim x_i = l^{p_i} \cdot m^{q_i} \cdot t^{r_i} \quad (i=1,2 \dots)$$

ahol
$$p = \alpha_1 \cdot p_1 + \dots + \alpha_n \cdot p_n$$
$$q = \alpha_1 \cdot q_1 + \dots + \alpha_n \cdot q_n$$
$$r = \alpha_1 \cdot r_1 + \dots + \alpha_n \cdot r_n$$

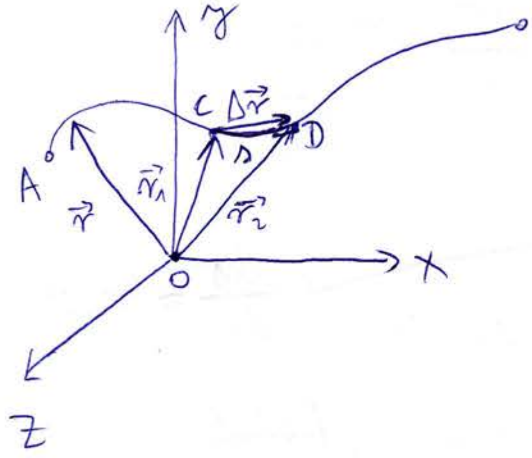
az alapegységek dimenziói úgy viselkednek, mint a vektortér bázisvektorai ← az egyenletrendszer megoldásait kell vizsgálni

$$x = \underbrace{\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)}_{\text{dimenzió nélküli függvény}} \underbrace{\left(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n}\right)}_{\dim x}$$

Anyagi pont kinematikája I.

2. tétel

Kinematikai alapfogalmak



→ (AB) – pálya → az a görbe, amelyet a test mozgása során leír

- ↙ egyenes vonalú
- ↘ görbe vonalú
  - ↙ szabályos
  - ↘ szabálytalan

→ ($\Delta\vec{r}$) – elmozdulás → a pálya két, kezdő- és végpontját összekötő irányított szakasz

→ (CD) – út → a pálya teljes hossza vagy ennek egy része

$\text{út} \parallel s$

fontos, hogy általában $s \neq |\Delta\vec{r}|$

Sebesség és gyorsulás értelmezése, mérése, geometriai jelentése

- $v_{átl} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ $\qquad\qquad \vec{v}_{átl} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

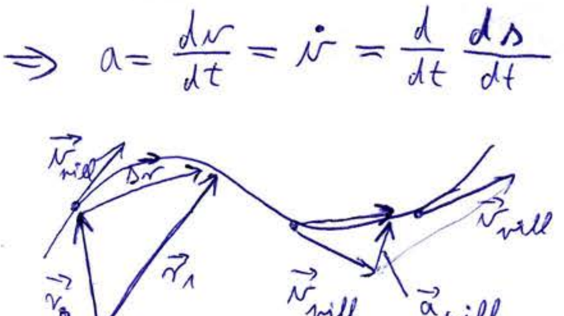
  $v_{pill} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, ha $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_{pill} = \dfrac{ds}{dt}$ $\qquad \vec{v}_{pill} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

- $a_{átl} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ $\qquad\qquad \vec{a}_{átl} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

  $a_{pill} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, ha $\Delta t \to 0 \Rightarrow a_{pill} = \dfrac{dv}{dt}$ $\qquad \vec{a}_{pill} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} s \\ \hline \dot{s} = v \\ \hline \ddot{s} = a \end{array}}$$



⇒ geometriai jelentés

- $\vec{v}_{pill}$ – pályaérintő
- $\vec{a}_{pill} \to \vec{a}_{\parallel}$ → érintőirányú
  $\to \vec{a}_{\perp}$ → sugárirányú

(Könyvből:)

- $$\vec{v}_{átl} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t_0} = \dot{\vec{r}}(t_0)$$

átalakítható: $$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}}_{\text{érintővektor}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta s}{\Delta t}}_{\text{mert pillanatnyi sebesség}} \longrightarrow \frac{ds}{dt} = v_{pill}$$

$$\swarrow$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}}{ds}}$$

$\Downarrow$

a mozgó test sebessége mindig érintőirányú

ez az érintő egységvektorhoz tart, mert $|d\vec{r}| = ds \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1 = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|$

$$\Rightarrow |\vec{v}_{pill}| = v_{pill}$$

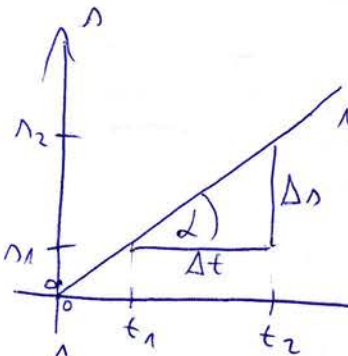
- $$\vec{a}_{átl} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_0+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_0} = \dot{\vec{v}}(t_0) = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t_0} = \ddot{\vec{r}}(t_0)$$

Egyenes vonalú egyenletes mozgás → a megtett út és a közben eltelt idő hányadosa állandó $\boxed{s \sim t}$

$$\frac{s_1}{\Delta t_1} = v_1 \quad / \quad \frac{s_2}{\Delta t_2} = v_2$$

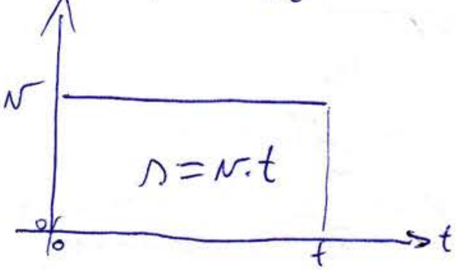
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} = áll} = v \rightarrow \text{sebesség} \qquad [v] = \frac{m}{s}$$



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{tg}\,\alpha$$

Kísérleti vizsgálat:

- → Mikola-cső ←
- → vertikális kinematográf
- → vektoroszkóp



Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

pl. vertikális kinematográffal vizsgálva megállapítható: $\boxed{s \sim t^2}$

$\boxed{s = k \cdot t^2}$

$\uparrow$ arányossági tényező, mozgásra jellemző állandó

Sebesség vizsgálata

1.) → bevezethetjük $v_{átl} = \frac{s}{t}$

↳ behelyettesítve: $v_{átl} = \frac{kt^2}{t} = kt$

2) → ez viszont a mozgás részleteit nem fejezi ki, ezért vezessük be a Δs útra Δt idő alatt vett átlagsebességet.

$$\hookrightarrow v_{átl} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \underset{\substack{\uparrow \\ s = k \cdot t^2}}{=} \frac{k\overbrace{(t+\Delta t)^2}^{\cancel{t^2}+2t\Delta t+\Delta t^2} - \cancel{kt^2}}{\cancel{\Delta t}} = \underbrace{2kt}_{1.} + \underbrace{k\Delta t}_{2.}$$

két tényező, amitől függ:

⇝ 1.) mennyi idő telt el a mozgás kezdetétől

⇝ 2.) mennyi ideig mérünk (Δt)

3) → $v_{átl.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ → annál jobban jellemzi a v_{pill}-et, minél kisebb a Δt

$$\Rightarrow v_{pill} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \to \dot{s} = (kt^2)^{\cdot} = 2kt$$

$\searrow v_{pill} = a \cdot t$

$\underline{v_{pill} = 2kt}$ ← egyenletesen változik az időben (itt nincs v_0)

Gyorsulás vizsgálata

(gyorsulás – milyen gyorsan változik a sebesség)

1) → bevezetjük $a_{átl} = \frac{v}{t}$ (teljes mozgásra ⇒ nem mond semmit)

$$2) \to \underline{a_{átl}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\underbrace{t - t_0}_{\Delta t}} \underset{\uparrow}{=} \frac{2k(t+\Delta t) - 2kt}{\Delta t} = \underbrace{2k}_{} = \underline{áll}\ !$$

ez itt v_{pill} — behelyettesítés

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{a}{2}}$

(+) ha van kezdősebesség

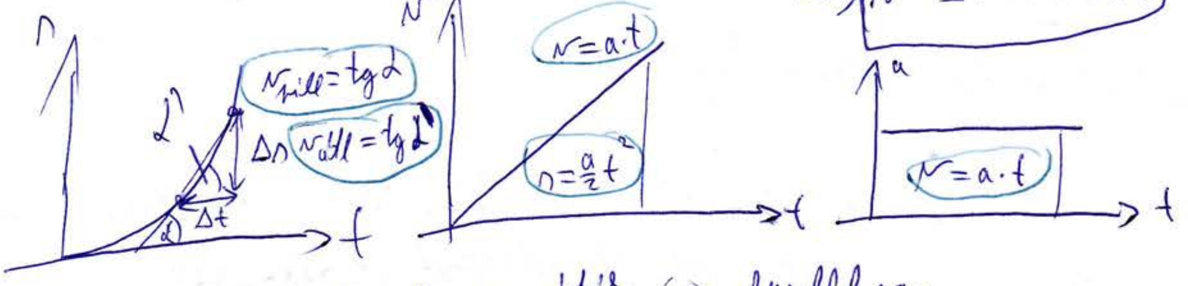
$$\left.\begin{aligned} (1)\ & s_0 = \frac{a}{2}t_0^2 \\ (2)\ & s_0 + s = \frac{a}{2}(t_0+t)^2 \end{aligned}\right\} \to (2)-(1) \to s = \overbrace{at_0}^{v_0}t + \frac{a}{2}t^2 = \boxed{v_0 t + \frac{a}{2}t^2}$$

$\boxed{v = v_0 + at}$ $\boxed{a = áll}$ $[a] = \frac{m}{s^2}$

$$\boxed{s = v_{átl} \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} t}$$

$$\left(v = v_0 + at\right) \to t = \frac{v - v_0}{a} \quad \Bigg\} \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$$



megjegyzés: ha lassul a értéke (−) előjellel van

Szabadesés

- $a = g = áll = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$ (sarkon $9{,}83 \frac{m}{s^2}$ Egyenlítőn: $9{,}78 \frac{m}{s^2}$)
- az összes előzőleg tárgyalt összefüggés igaz rá, mert ez az egyenletesen gyorsuló mozgás speciális esete
- minden szabadon eső test anyagi minőségétől függetlenül egyenlő idő alatt esik le
- $\boxed{s = \frac{g}{2} t^2}$ $\boxed{v = gt}$ $\boxed{(v = v_0 + gt)}$
- Galilei kísérlete $s \sim t^2$

$$s = s_0 + 3s_0 + 5s_0 + \ldots + (2n-1)s_0$$

$$s = s_0 \left(1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1)\right) = n^2 s_0 \sim t^2$$

G mérése

1) $\to h = \frac{g}{2} t^2 \to g = \frac{2h}{t^2}$ h magasságból elejtett test zuhanási idejét mérjük

(relatív hiba $\delta(g) = \delta(h) + 2\delta(t)$

(4) → fénykapus érzékelő
5) → CBR)

2) $\to T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \to g = l \frac{4\pi^2}{T_0^2}$ (10 T mérése → csökken a hiba)

3) → kinematográf → mérési pontokra parabola illesztése, majd ebből a gyorsulás számítása

Vektoroszkóp működési elve → térbeli mozgásoknál

→ Legalább 3 térben általánosan elhelyezett érzékelő szükséges

→ a mozgó tárgyra ultrahangos hangadót kell rögzíteni

→ Helyzet megállapítása

- az üzembe helyezésnél a szoftver felméri a tornyok távolságát, elhelyezkedését
- a mérés kezdetekor az egyik torony infrafényt bocsát ki, ami minden érzékelőben elindítja az órát (így ezek mérni kezdik az időt)
- mikor a mozgó ponton elhelyezett érzékelőbe bekerül a jel, az ultrahangos hangadó jeleket küld minden irányba, amelyek a tornyokhoz t_1, t_2, t_3 idő alatt jutnak el. Ez alapján meghatározható a pont aktuális helyzete.
- ha egy egész sorozatot mérünk, akkor kirajzolódik a pont út-idő grafikonja, amiből már számolható a sebesség és gyorsulás

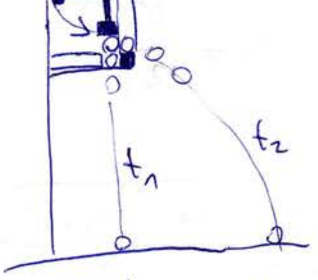
↳ 1 mérés átl.: 0,01 s

↳ érzékelés pontossága: kb. 2 mm

Hajítások → két mozgás szuperpozíciójaként áll elő

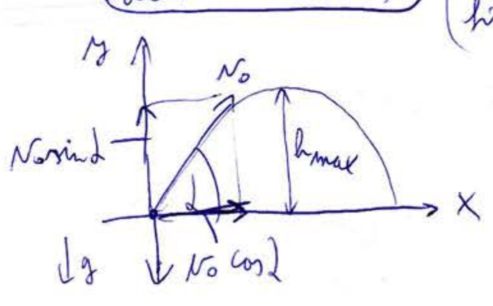
~ egyenes vonalú egyenletes mozgás

~ egyenletesen gyorsuló mozgás



Lövy-féle ejtőgép → $t_1=t_2$ ⇒ a két golyó egyszerre éri el a talajt

általános leírás (vízszintes / függőleges } hajítás ennek a speciális esete)



$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - gt \end{pmatrix} \quad v(t) = |\underline{v}(t)| = \sqrt{\ldots}$$

$$\rightarrow \underline{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad a(t) = |\underline{a}(t)| = g$$

pályaegyenlet:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \longrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(t) = v_0 \sin\alpha \, t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\boxed{\Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}\,\alpha\, x - \left(\frac{g x^2}{2 v_0^2}\right)\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right)}$$

H max:

$$t_e = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \leftarrow 0 = v_0 \sin\alpha - g\,\boxed{t_e}$$

↑ ebben a pontban $\underbrace{v(y)}$ = 0 y irányban

↑ fejezzük ki

behelyettesítve:

$$\boxed{y(t_e) = v_0 \sin\alpha \cdot t_e - \frac{g}{2} t_e^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

S max:

$$\boxed{x(2t_e) = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

hajítás adott pontba → P(x,y) helyettesítsük be a pályaegyenletbe

$$\left(\frac{g x^2}{2 v_0^2}\right) \mathrm{tg}^2\alpha - x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \left(y + \frac{g x^2}{2 v_0^2}\right) = 0 \quad / : \left(\frac{g x^2}{2 v_0^2}\right) \leftarrow \text{leosztunk}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{2 v_0^2}{g x^{\cancel{2}}} \cancel{x}\, \mathrm{tg}\,\alpha + \frac{2 v_0^2}{g x^2}\left(y + \frac{g x^2}{2 v_0^2}\right) = 0$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha - \underset{4H}{\boxed{\frac{2 v_0^2}{g}}} \cdot \frac{1}{x}\mathrm{tg}\,\alpha + \underset{4H}{\boxed{\frac{2 v_0^2}{g}}} \frac{y}{x^2} + 1 = 0 \qquad H = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\left(\mathrm{tg}\,\alpha\right)_{1,2} = \frac{\frac{4H}{x} \pm \sqrt{\frac{16H^2}{x^2} - 4\left(4Hy\frac{1}{x^2} + \boxed{1}\right)}\,!!}{2} = \frac{2H}{x} \pm \frac{\sqrt{4H^2 - 4Hy - x^2}}{x} =$$

$$= \frac{2H}{x} \pm \frac{\overset{C}{\boxed{\sqrt{(2H-y)^2 - (y^2+x^2)}}}}{x} = \frac{2H}{x} \pm \frac{C}{x} = \frac{2H \pm C}{x}$$

D>0! akkor éri el a lövedék a sík egy pontját

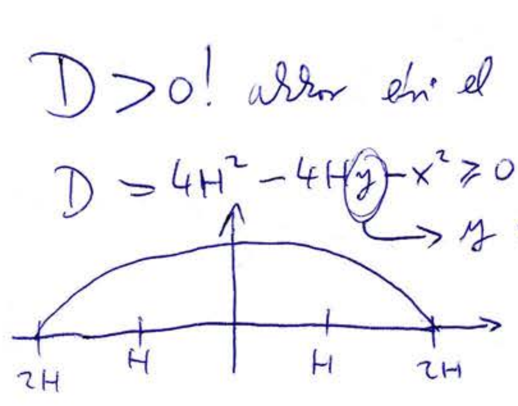
$$D = 4H^2 - 4H\boxed{y} - x^2 \geq 0$$

$$\longrightarrow y \leq H\underbrace{\left[1 - \left(\frac{x}{2H}\right)^2\right]}$$

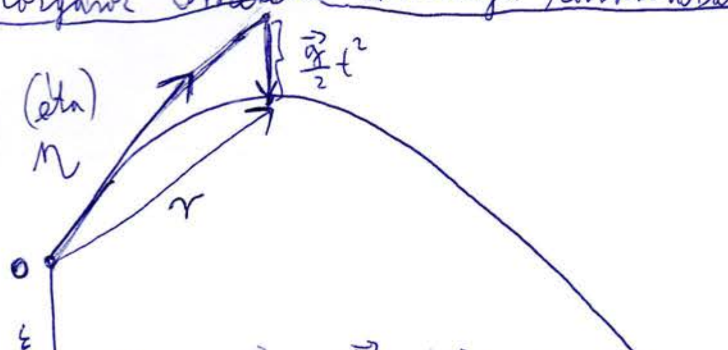
$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

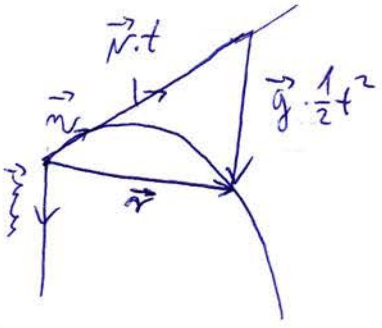
↑ ekkora sebesség esetén

↓ a paraboloid belső pontjai eltalálhatók



Mozgások összetétele derékszögű koordinátarendszerben (hajítás)





$\vec{g} = g\cdot\vec{\xi}$ $\underbrace{|\vec{\xi}| = |\vec{\eta}|}$ $=1$

egységvektorok, ∀ vektor felírható a segítségükkel

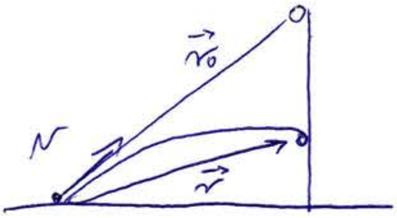
tengelyek → $\vec{v}$ } irányába mutatnak
→ $\vec{g}$

$$\boxed{\vec{r}(t)} = v\cdot t\cdot\vec{\eta} + \frac{gt^2}{2}\vec{\xi} = \boxed{\vec{v}t + \frac{t^2}{2}\vec{g}}$$

ezt fel lehet használni → <u>lövés adott pontból leeső tárgyra</u>

$$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + \frac{gt^2}{2}\vec{\xi}$$

$$r_h = \vec{v}\cdot t + \frac{gt^2}{2}\vec{\xi}$$



$$\Downarrow$$

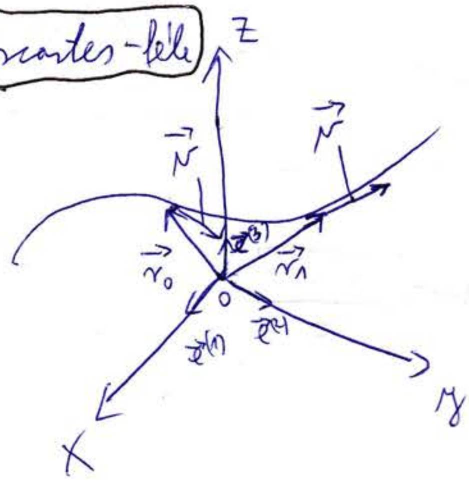
$\vec{v}\cdot t = \vec{r}_0$ → a pontra kell célozni

Kinematika II.

3. tétel

Mozgások jellemzése különböző koordinátarendszerekben

→ **Descartes-féle**



$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{e}^{(1)} + y(t)\cdot\vec{e}^{(2)} + z(t)\cdot\vec{e}^{(3)}$$

$$\hookrightarrow \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

→ sebesség meghatározása: $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$

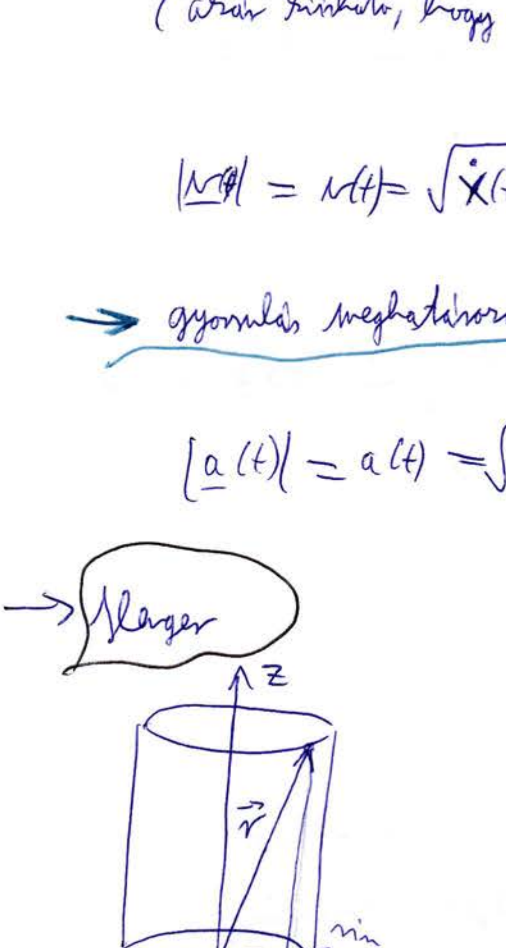
(akár kihozható, hogy $v_x(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} = \dot{x}(t_0)$)

$$|\underline{v}(t)| = v(t) = \sqrt{\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t)}$$

→ gyorsulás meghatározása $\ddot{\underline{r}}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \underline{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$

$$|\underline{a}(t)| = a(t) = \sqrt{\ddot{x}(t) + \ddot{y}(t) + \ddot{z}(t)}$$

→ **Henger**



HK → DK

$x = \rho \cos\varphi$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$y = \rho \sin\varphi$ $\quad \rho \in [0, \rho]$

$z = z$

DK → HK

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

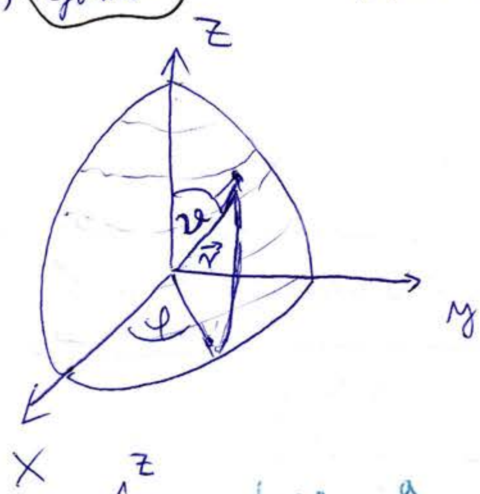
$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$z = z$

(≈ síkbeli polár és $z = z$)

$$\vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(\rho, \varphi, z)$$

→ Gömb (spec. $|\vec{r}| = r$)



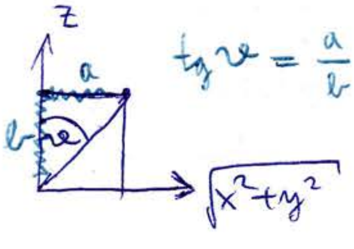
$$\boxed{GK \to DK}$$

$$x = R\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = R\cos\vartheta$$

$$\boxed{DK \to GK}$$

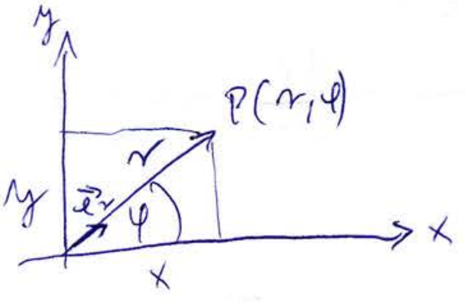
$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\vartheta = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$
$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vec{r}(x,y,z) \to \vec{r}(R,\vartheta,\varphi) \qquad \vartheta \in [0,\pi] \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$



$$tg\,\vartheta = \frac{a}{b} \to \vartheta = arctg\frac{a}{b} = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

→ síkbeli polár



$$\boxed{PK \to DK}$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\boxed{DK \to PK}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vec{r}(x,y) \to \vec{r}(r,\varphi)$$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}} \downarrow$$

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}} \downarrow$$

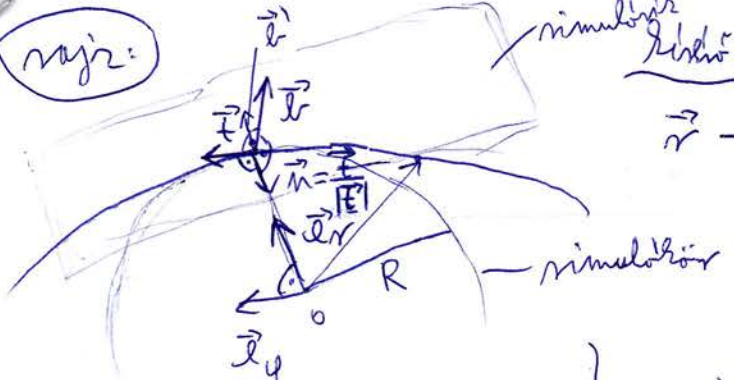
$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\varphi \\ (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\cos\varphi + (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{matrix}\right] \perp \Rightarrow \dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

→ kísérő triéder → mozgó ponttal együtt haladó 3-as koordinátarendszer

↳ a vektorai rendre t, n és b, amelyek ortonormált bázist alkotnak. Ezeket kell vizsgálni, majd pedig t-nek $(\vec{e}_\varphi)$-t, n-nek pedig $(-\vec{e}_r)$-et kell megfeleltetni, ami a követő polárkoordináta vektorai.

rajz:



kísérő triéder

$$\vec r \to \frac{d\vec r}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\vec r}{dt} = \frac{\frac{d\vec r}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec v}{v} = \vec e = \vec t$$

érintő irányú és egységvektor

követő polárkoordináta kapcsolata:

$\boxed{\vec t = \vec e_\varphi}$

$\boxed{-\vec n = \vec e_r}$

(másik oldalon van a levezetése)

$\vec e' = \frac{de}{ds} \to$ használjunk fel egy trükköt

$$(\vec e\cdot\vec e = 1)' = \underbrace{\dot{\vec e}\cdot\vec e + \vec e\cdot\dot{\vec e}}_{} = 0$$

$$2\vec e\cdot\dot{\vec e} = 0 \Rightarrow \dot{\vec e}\perp\vec e$$

$\vec e'$ nem egységvektor! $\boxed{|\vec e'| = G = \frac{1}{R}}$

görbületi sugár

$\frac{\vec e'}{|\vec e'|} = \vec n$ (főnormális) ez sugárirányú egységvektor

$\vec b = \vec e \times \vec n$ (binormális)

$|\vec b'| = T$

kísérő triédert alkotják → $\vec e$, $\vec n$, $\vec b$

$\vec e' \perp \vec e$ $\quad \boxed{\vec e' = G\cdot\vec n}$

$\vec n' \perp \vec n$ $\quad (\vec n' = \alpha\cdot\vec e + \beta\cdot\vec b)$ $\quad \boxed{\vec n' = -G\cdot\vec e + T\cdot\vec b}$

$\vec b' \perp \vec b$ $\quad \boxed{\vec b' = -T\cdot\vec n}$

görbület számítása:

$$\vec e' = \frac{d\vec e}{ds} = \overset{\frac{1}{v}}{\frac{dt}{ds}}\frac{d\vec e}{dt} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\vec e = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec v}{v}\right) = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\vec v\cdot\frac{1}{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{v}\left[\frac{d\vec v}{dt}\cdot\frac{1}{v} + \vec v\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right)\right] = \frac{1}{v}\left[\vec a\,\frac{1}{v} + \vec v\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{dv}{dt}\right] =$$

$$\to v = \sqrt{v^2} = \sqrt{\vec v\cdot\vec v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec v\cdot\vec v} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\vec v\cdot\vec v}}\cdot\frac{d}{dt}(\vec v\cdot\vec v) = \frac{1}{2v}\cdot 2\vec v\cdot\vec a = \frac{\vec v\cdot\vec a}{v}$$

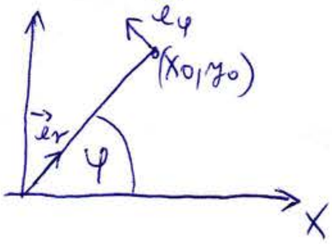
$$= \frac{1}{v}\left[\vec a\cdot\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\vec v\,\frac{\vec v\cdot\vec a}{v}\right] = \frac{1}{v^4}\left[v^2\vec a - \vec v(\vec v\cdot\vec a)\right] = \frac{\vec v\times(\vec a\times\vec v)}{v^4} \Rightarrow \text{vekt. sz. def.}$$

$$\Rightarrow G = |\vec e'| = \left|\frac{\vec v\times(\vec a\times\vec v)}{v^4}\right| = \frac{|\vec v|\,|\vec a\times\vec v|}{v^4}$$

$$\boxed{\Rightarrow G(t) = \frac{|\ddot{\vec r}\times\dot{\vec r}|}{|\dot{\vec r}|^3}}$$

polárkoordináták (követő)

$$\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \rightarrow r(t),\ \varphi(t)$$



$$x(t) = r(t) \cdot \cos[\varphi(t)]$$

$$y(t) = r(t) \cdot \sin[\varphi(t)]$$

függ t-től!

$$\boxed{\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}$$ ← ez egységvektor, mindig adott irányba, $\varphi(t)$

$\underline{r}(t) = r(t) \cdot \underline{e}_r(t)$ ← mindig az aktuális időpontban megszorozzuk az egységvektort, így megkapjuk a helyvektort

ahhoz, hogy megkapjuk a sebességet, deriválni kell $\underline{r}(t)$-t. $\left(\frac{d}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \boxed{\dot{\underline{e}}_r}$$ ezt külön vizsgáljuk

$$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d}{dt}\left(\cos[\varphi(t)],\ \sin[\varphi(t)]\right) = \left(-\dot{\varphi}\sin[\varphi(t)],\ \dot{\varphi}\cos[\varphi(t)]\right) \Rightarrow$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin[\varphi(t)] \\ \cos[\varphi(t)] \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\varphi}$$ ← ez láthatóan ⊥ $\underline{e}_r$-re, de nem egységvektor!! nekünk pedig az kell

nevezzük el $\underline{e}_\varphi$-nek ezt az $\underline{e}_r$-re ⊥ egységvektort, ami:

$$\boxed{\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

a kapcsolat $\underline{e}_r$ és $\underline{e}_\varphi$ között: $\boxed{\underline{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} = \dot{\underline{e}}_r}$

Most $\underline{e}_r$-et és $\underline{e}_\varphi$-t rá kellene illeszteni a kísérő triéder megfelelő vektoraira. Kihasználjuk azt, hogy adott ponthoz mindig húzható simulókör, így a mozgó pont minden pontban körmozgást végez. Itt az idő, hogy felírjuk a sebességet a körmozgás összefüggéseinek segítségével. Tudjuk, hogy φ a szögelfordulás. $\dot{\varphi}$-ja pedig ω-t adja. ω és v közötti kapcsolat pedig: $\underline{v = R \cdot \omega = R \cdot \dot{\varphi}}$

↑ ez az éppen aktuális simulókör sugara

így az eddigieket felhasználva felírható:

$$\boxed{\underline{v}} = v \cdot \underline{t} = \boxed{\underbrace{(R \cdot \dot{\varphi})}_{v} \, \boxed{\underline{t}}} \leftarrow \text{kísérő triéder érintőirányú egységvektora}$$

↑ $R(t)$, $\dot{\varphi}(t) \Rightarrow$ mindegyik függ az időtől

$$\frac{d}{dt}$$

$$\boxed{\underline{a}} = \dot{\underline{v}} = \dot{v} \cdot \underset{\underset{\underline{e}_\varphi}{\updownarrow}}{\underline{t}} + v \cdot \underset{\underset{\dot{\underline{e}}_\varphi}{\updownarrow}}{\dot{\underline{t}}} = \dot{v}\underline{t} + v \cdot \boxed{\dot{\varphi}}\, \underline{n} = \boxed{\dot{v}\underline{t} + \left(\frac{v^2}{R}\right) \cdot \underline{n}}$$

↑ ebből tudjuk, hogy ez $\omega = \frac{v}{R}$, mert körmozgás van!

→ ez mi? $\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix} = -\dot{\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}_{\text{ez itt éppen } \underline{e}_r}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r}$$

$\underline{e}_r$-nek pedig $-\underline{n}$-et feleltetjük meg,
ezért $\boxed{\dot{\underline{t}}} = \dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r = \boxed{\dot{\varphi}\,\underline{n}}$

ezekből további információt tudunk kiolvasni, azt, hogy:

$a_\varphi = a_t$ (tangenciális) $= \dot{v}$

$a_r = a_n$ (normális) $= \frac{v^2}{R}$
(sugárirányú)

---

polárkoordináta folytatása (követő rendszer)

$$\left.\begin{array}{l} \underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{kapcsolat: } \dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi$$

$(\underline{r} = r \cdot \underline{e}_r)$

$(\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \dot{\underline{e}}_r)$

$(\underline{a} = \dot{\underline{v}})$

$$\boxed{\underline{v} = \underbrace{\dot{r}\,\underline{e}_r}_{\underline{v}_r} + \underbrace{r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi}_{\underline{v}_\varphi}}$$ irányú komponensek

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\,\underline{e}_r + \dot{r}\,\overbrace{\dot{\underline{e}}_r}^{\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,\boxed{\overset{-\dot{\varphi}\underline{e}_r}{\dot{\underline{e}}_\varphi}} =$$

$$= \ddot{r}\,\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_r =$$

$$= \boxed{\underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}_{a_r}\underline{e}_r + \underbrace{(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})}_{a_\varphi}\underline{e}_\varphi}$$

5.

→ **Centrális mozgás** → olyan mozgás, aminek csak radiális irányú gyorsulása van (pl. olyan mozgások, amik centrális erőtérben vannak és nincs saját sebességük) (pl. műhold)

$\boxed{a_\varphi = 0}$ $\boxed{v_\varphi = \text{áll}}$ $\left(\dot\varphi = \omega = \frac{v}{r}\right)$

$\Downarrow$

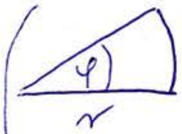
$\underline{\underline{r\cdot\dot\varphi = \text{áll}}}$ (ekkor $r^2\dot\varphi = \text{áll}$ (is))

$$a_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\right) = 0$$

→ **Körmozgás**

~ egyenletes

$n = \frac{1}{T}$ fordulatszám



$\varphi = \frac{s}{r}$ $[\varphi] = \text{rad}$

$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} = \text{áll}$ $v = r\cdot\omega$

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi}{t} = \text{áll}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\varphi = \omega\cdot t$

~ egyenletesen változó ⟹ majd a 7. tételben

~ minden más

→ **Nevezetes térgörbék**

~ csavarmozgás

$$r(t)\begin{cases} x(t) = R\cos\overset{(\omega t+\varphi_0)}{\varphi} \\ y(t) = R\sin\underset{(\omega t+\varphi_0)}{\varphi} \\ z(t) = c\cdot t \end{cases}$$

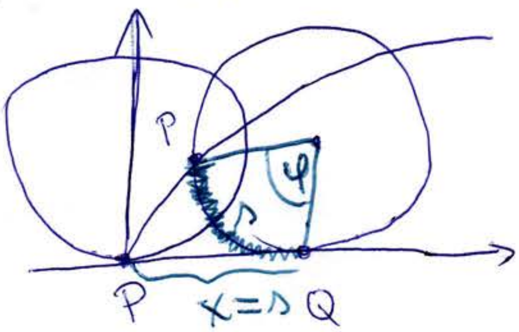
$x(t)$, $y(t)$ } síkbeli körmozgás

$z(t)$ — z tengely irányában haladó mozgás

$$\underline{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cdot\omega \\ R\cos\varphi\cdot\omega \\ c \end{pmatrix} \quad |\underline{v}| = \sqrt{\left[(R\sin\varphi)^2 + (R\cos\varphi)^2\right]\cdot\omega^2 + c^2} = \sqrt{(R\omega)^2 + c^2}$$

$$\underline{a}(t) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\cdot\omega^2 \\ -R\sin\varphi\ \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

~ Ciklois



$x = s$

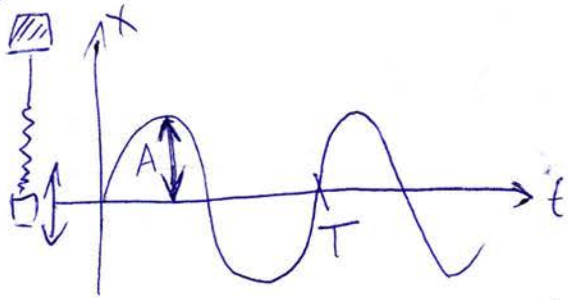
$\left(\varphi = \frac{s}{R}\right) \rightarrow s = R \cdot \varphi$

← hiányos!!

Rezgések összetétele

4. tétel

Harmonikus rezgőmozgás



vertikális kinematográf

↳ harmonikus függvény képét mutatja

$X(t) = A\cdot\sin(b\cdot t+\varphi_0)$ → célszerű úgy vizsgálni, hogy $\varphi_0 = 0$ legyen (kezdőfázis)

↓ így   ↓ ezt kellene meghatározni

$x(t) = A\sin(\boxed{b}t)$

---

t idő alatt N rezgés → $f=\frac{N}{t}$ ⇝ 1 rezgés alatt: $f=\frac{1}{T}$

b-t úgy határozzuk meg, hogy a harmonikus függvény 2π szerinti periodicitását vesszük figyelembe.

⇒ $x(t) = x(t+T)$, amiből következik, hogy:

$$A\sin(b\underset{t}{\underset{\uparrow}{t}}) = A\sin b\underset{t+T}{\underset{\uparrow}{(t+T)}} = A\sin(bt+\underbrace{bT) = A\sin(bt+2\pi}_{bT=2\pi})$$

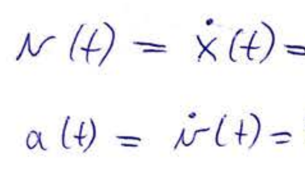
körfrekvencia → $(\omega = 2\pi\cdot f)$ ⇒ $b = \frac{2\pi}{T} =: \omega$

$v(t) = \dot{x}(t) = A\cdot\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$

$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow \boxed{-\omega^2\cdot x(t) = \ddot{x}(t)}$ differenciálegyenlet

továbbá $v_{max} = A\omega$ (sebességamplitúdó!)

$a_{max} = A\omega^2$ (gyorsulásamplitúdó!)



+ kapcsolat a körmozgással ⇒ 6. tételben

Két, egyirányú, azonos frekvenciájú harmonikus rezgés összetétele

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$ ezek szuperpozícióját keressük

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ fejtsük ki addíciós tételekkel

$$\left[\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}\right]$$

$$x(t) = A_1\left[\sin(\omega t) \cdot \cos\varphi_1 + \cos(\omega t) \cdot \sin\varphi_1\right] + A_2\left[\sin(\omega t) \cdot \cos\varphi_2 + \cos(\omega t) \cdot \sin\varphi_2\right]$$

$$x(t) = \sin(\omega t)\Big[\underbrace{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}_{A\cos\delta \ (1)}\Big] + \cos(\omega t)\Big[\underbrace{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}_{A\sin\delta \ (2)}\Big]$$

$\Downarrow$

$x(t) = A \sin(\omega t) \cdot \cos\delta + A \cos(\omega t) \cdot \sin\delta$ felismerhető, hogy ez $\sin(a+b)$

$$\boxed{x(t) = \underset{\text{meg kell határozni}}{A} \sin(\underset{\omega \text{ u.a., mint kezdetben}}{\omega} t + \delta)}$$

(1) $A \cos\delta = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$

(2) $A \sin\delta = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$

$$\sqrt{(1)^2 + (2)^2}: \ \underset{\text{amplitúdó}}{A} = \sqrt{(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 + (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2} = \boxed{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$A_1^2 \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + A_1^2 \sin^2\varphi_1 + A_2^2 \sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$\Rightarrow A_1^2 + A_2^2 \qquad \Rightarrow 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

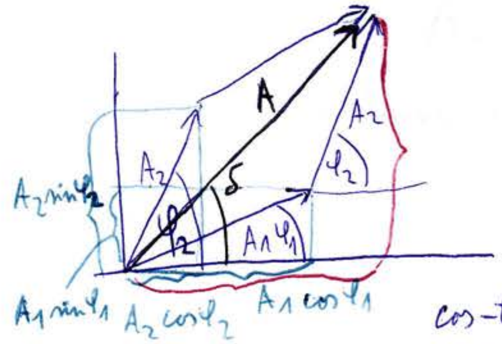
$$\frac{(2)}{(1)}: \ \boxed{\underset{\text{kezdőfázis}}{\operatorname{tg}\delta} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}}$$

Megjegyzés:
- ha a kezdőfázis $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor $A = \overbrace{A_1 + A_2}^{\text{maximális erősítés}}$
- ha $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi$, tehát ellentétes fázisúak $\Rightarrow A = \underbrace{|A_1 - A_2|}_{\text{maximális gyengítés}}$
- ha $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi$ és $A_1 = A_2 \Rightarrow \underbrace{A = 0}_{\text{kioltás}}$

ezgések jellemzése vektorábrával, komplex mennyiségekkel

→ vektorábra:

egyirányú rezgések összetétele szemléltethető úgy, hogy $\boxed{A}$ hosszúságú és kijelölt iránytól képest $\boxed{\varphi}$ szöget bezáró vektort rajzolunk le.



összeadni, kivonni úgy lehet, mint a vektorokat

cos-tétel: $\left[\left(\vec{A}=\vec{A_1}+\vec{A_2}\right)\rightarrow\left(\vec{A}\right)^2=\left(\vec{A_1}+\vec{A_2}\right)^2\right]$

$$\Rightarrow A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

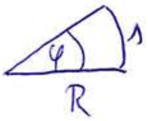
$$\operatorname{tg}\delta=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

→ komplex mennyiségek:

kihasználjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás és a körmozgás egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető.

körmozgás felírható:

$$\underline{r}(t)\begin{cases}x(t)=R\cos\varphi\\ y(t)=R\cdot\sin\varphi\end{cases}\qquad \varphi=\frac{s}{R}$$



$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\omega=\frac{\varphi}{t}$, mert egyenletes körmozgás

$$\underline{r}(t)\begin{cases}x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)\\ y(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)\end{cases}$$

→ $\underline{\varphi=\omega t}$

→ $\underline{A=R}$

↑ez is körmozgás, de láthatóan rezgőmozgás is

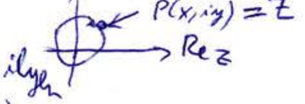
$$\underline{r}(t)=\begin{pmatrix}A\cos(\omega t+\varphi_0)\\ A\sin(\omega t+\varphi_0)\end{pmatrix}$$

ha a komponenseket adott pillanatban összeadjuk, a körpálya egyik pontját kapjuk

ennek mintájára írjuk fel:

$$\boxed{\underset{\sim}{Z(t)}=x(t)+iy(t)=A\left[\cos(\omega t+\varphi_0)+i\sin(\omega t+\varphi_0)\right]}$$

komplex szám; minden egyes pontnak megfeleltethető egy ilyen



felhasználva az Euler-féle összefüggést: $\underline{(e^{-i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi)}$

$$\boxed{Z(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}=Ae^{i\varphi_0}\cdot e^{i\omega t}}$$

$$z(t) = \boxed{A \cdot e^{i\varphi_0}} \cdot \boxed{e^{i\omega t}}$$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow *$

komplex amplitúdó : $A^* = Ae^{i\varphi_0} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

↳ a körmozgás, illetve a rezgőmozgás amplitúdóját és fázisszögét írja le
(kezdőfázis)

* $e^{i\omega t}$ függvény az egységsugarú körön történő mozgást írja le
$(e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$

így értelmezhető az előbbi is (rezgések összetétele)

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = A_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t} + A_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t} = \overbrace{\left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right)}^{Ae^{i\varphi}} e^{i\omega t}$$

ugyanaz a körfrekvencia

$$A = Ae^{i\varphi} = \left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right)$$

↖ új rezgés amplitúdója

<u>Lebegés jelensége</u> (nem azonos frekvenciájú párhuzamos (egyirányú) rezgések összetétele)

$\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$ és fontos, hogy csak kicsit térjenek el : $\boxed{|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1}$

$\boxed{A_1 = A_2 = A}$ $\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}$ $(\omega_1 \approx \omega_2)$

ekkor felírható : $x_1(t) = A\sin(\omega_1 t)$

$x_2(t) = A\sin(\omega_2 t)$

összegük:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = A\left[\underbrace{\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)}_{\text{ezt kellene kifejteni addíciós tétellel}}\right] = \longrightarrow$$

addíciós tételek:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \boxed{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ ← ezt kellene kifejezni valahogyan

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$

---

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

(2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\frac{(1)-(2)}{2}$: $\boxed{\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] = \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

ez még nem jó, ezt kellene kihozni:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

$$\rightarrow A\left[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right] = A\left[2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\right]$$

$$x(t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}\cdot\underbrace{\sin\left(\boxed{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}t\right)}$$

ha megcseréljük:

$$2A\cos\left(\overset{\Delta\omega}{\boxed{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) A^*(t)$$

ω → szt. közepe a két összetevőjének

$$\underline{A^*(t)} = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

periodikus „mozgást" végez az amplitúdó → periodikusan változik

megjegyzés:

→ ha $A_1=A_2$, akkor van olyan hely, ahol $A^*(t)=0$

→ ha $A_1\neq A_2$, akkor nincs olyan hely, ahol $A^*(t)=0$

még vizsgálható: $A^*(t)$ -nek a periódusideje

↳ $2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

ez akkor 1, ha $\cos(2\pi) = \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

$\Rightarrow 2\pi = \frac{\Delta\omega}{2}t$

$\left(T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)$

→ akkor 0, ha $\cos(\pi) = \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

$\Rightarrow \pi = \frac{\Delta\omega}{2}t$

Fourier sorfejtés → minden periodikus függvény felbontható sin és cos függvények összegére

(minden függvényt, ami periodikus, át lehet alakítani úgy, hogy 2π szerint legyen az: $\left(x := \frac{2\pi}{T}t\right)$)

1) keresünk azt a számsorozatot, amelyre

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)}$$

2) integráljuk ezt az egyenlőséget a periodicitási intervallumon, tehát (-π-től π-ig).

→

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx}_{\frac{a_0}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{0 \quad \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{0 \quad \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}\Big)$$

„előző" oldalról

$$\boxed{\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

3) Határozzuk meg a_k, b_k együtthatókat

Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített index; szorozzuk meg az előbbi egyenlőséget $(\cos kx)$-mel és integráljuk $[-\pi, \pi]$-n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx}_{0 \quad \left[\sin kx\cdot\frac{1}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx}\Big)$$

ezt a két integrált kell vizsgálni

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx \overset{n\neq k}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\Big[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\Big]dx = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} + \underbrace{\left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0}\Bigg)$$

$$\overset{n=k}{=} \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2} + \frac{\cos 2kx}{2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \underbrace{\frac{\sin 2kx}{4k}}_{0}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi$$

hasonló számolással megkapható, hogy $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx = 0$

$$\boxed{\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$ ← Fourier-sor

↳ szorozzuk meg $(\sin kx)$-szel, majd integráljuk $[-\pi, \pi]$-n. Ugyanilyen számolással megkapjuk, hogy:

$$\boxed{\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx}$$

(a_0), (a_k), (b_k) ⇒ Fourier együtthatók

Egymásra merőleges rezgések

$$\underline{r}(t) \begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_1 t) \\ y(t) = b \cdot \cos(\omega_2 t + \delta) = b \cos(\omega_2 t) \cdot \cos\delta - b \sin(\omega_2 t) \cdot \sin\delta \end{cases}$$

→ először vizsgáljuk, hogy $\boxed{\omega_1 = \omega_2}$ és kifejezzük ki $(\cos \omega t)$-t az $x(t)$-ből

$\cos \omega t = \frac{x}{a}$ → ez írjuk be a második egyenletbe, $y(t)$-be

ahhoz, hogy megkapjuk a pályagörbét, ki kell küszöbölnünk az időt

$$\to \frac{y}{b} = \cos(\omega t) \cdot \cos\delta - \underbrace{\sin(\omega t)}_{\uparrow \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \sin\delta$$

emeljük négyzetre

előbb rendezni kell az egyenletet!!

$$\frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} \cdot \cos\delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin\delta \right)^2$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \cos^2\delta + \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \sin^2\delta \right] - \left[2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin\delta \cos\delta \right]$$

$$\to \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin\delta = \frac{x}{a} \cdot \cos\delta - \frac{y}{b} \quad \Big| \,{}^2$$

$$\overbrace{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sin^2\delta}^{\sin^2\delta - \sin^2\delta \frac{x^2}{a^2}} = \frac{x^2}{a^2} \cos^2\delta + \frac{y^2}{b^2} - 2\left(\frac{x}{a} \cos\delta \cdot \frac{y}{b} \right)$$

$$\sin^2\delta = \frac{x^2}{a^2} \left(\underbrace{\sin^2\delta + \cos^2\delta}_{1} \right) + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos\delta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\delta = \sin^2\delta}$$

ez ∀ esetben ellipszis, spec., ha $\delta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z}$, akkor $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

általános esetre kapott egyenlet: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta}$

vizsgálni kell a speciális eseteket, amikor $\sin, \cos = 0, = 1, = -1$!

ha $\delta = 0 + k\pi$, akkor

$$\delta=0 \longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}}=0 \quad \leftarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$$

$\to$ ekkor: $y = \frac{b}{a}x$

$$\cancel{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2xy}{ab}\right)}$$

$$\delta=\pi \longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2xy}{ab}}=0$$

$\to$ ekkor: $y = -\frac{b}{a}x$

ilyen esetekben ez úgynevezett lineáris rezgés

$$\nwarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0$$

$\Rightarrow$ itt a kialakult rezgés frekvenciája ($\omega = \omega_1 = \omega_2$) azonos és elliptikus rezgés alakul ki

$\to$ vizsgáljuk, ha $\omega_1 \neq \omega_2$, ① $(\omega+\Delta\omega)$ lebegés $\leftarrow$ két külön dolog!! ② és $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p}{q}$

① $x = a\cos(\omega t)$

lebegés

$$y = b\cos[(\omega+\Delta\omega)t+\delta] = b\cos[\omega t+(\delta+\underbrace{\Delta\omega t}_{})] = b\cos[\omega t+\delta(t)]$$

$$\underbrace{\delta(t)=\delta+\Delta\omega t}_{}$$

$\Rightarrow$ a kialakuló rezgés úgy értelmezhető, mintha azonos frekvenciájú rezgéseket összegeznénk, amelyeknek a fáziskülönbsége időben lassan változik

② $x = a\cos(\omega_1 t) = a\cos(\omega t)$

$y = b\cos(\omega_2 t+\delta) = b\cos\left(\frac{p}{q}\omega t+\delta\right)$ } ekkor $\boxed{T^* = q\frac{2\pi}{\omega}}$!

$$x(t+T^*) = a\cos(\omega t+\omega T^*) = a\cos(\omega t+2\pi q) = a\cos(\omega t) = x(t)$$

$$y(t+T^*) = b\cos\left(\frac{p}{q}\omega t+\frac{p}{q}\omega T^*+\delta\right) = b\cos\left(\frac{p}{q}\omega t+\delta+2\pi p\right) = y(t)$$

ilyenkor az eredő rezgés periodikus és a pálya zárt

(+) $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 2\omega$ és $\delta = 0 \Rightarrow$

$$x = a\cos(\omega t)$$

$$y = b\cos(2\omega t) = b(2\cos^2\omega t-1) = \underbrace{b\left(2\frac{x^2}{a^2}-1\right)}_{\text{ez parabola}}$$

$\cos(2\omega t) = \cos^2\omega t - \underbrace{\sin^2\omega t}_{(1-\cos^2\omega t)}$

ha $\delta \neq 0$, akkor az eredő rezgés negyedrendű zárt görbe, a befoglaló téglalap x irányú oldalát p-szer, az y irányú oldalát q-szor érinti a görbe

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Lissajous-görbe}}$ $\to$ származtathatók hengerre feltekert szinuszgörbének a koordináta-
8. rendszer alapsíkjaira való vetítéssel is

A dinamika alaptörvényei

5. tétel

Tehetetlenség törvénye (N.I.)

tapasztalat: a testek mozgásállapotát a sebesség nagysága és iránya jellemzi $\rightarrow \boxed{\underline{v}}$

a nyugvó testek mozgásba hozásához és a mozgó testek mozgásállapotának megváltoztatásához más testtel való kölcsönhatás szükséges.

pl. lejtőn lecsúszó test megáll, ha a talaj és a közte levő kölcsönhatás, tehát a súrlódási erő lefékezi

pl. légpárnás sínen mozgó kocsi szinte alig veszít a sebességéből

→ Tehetetlenség törvénye: minden test nyugalomban ($\underline{v}=0$) marad vagy egyenes ($\underline{v}=áll$) vonalú egyenletes mozgást végez mindaddig, amíg más testtel való kölcsönhatás ennek a megváltoztatását ki nem kényszeríti.

Inerciarendszer fogalma (következik az előzőből)

vonatkoztatási rendszer ↗ gyorsuló
↘ inercia ↔ érvényes a tehetetlenség törvénye

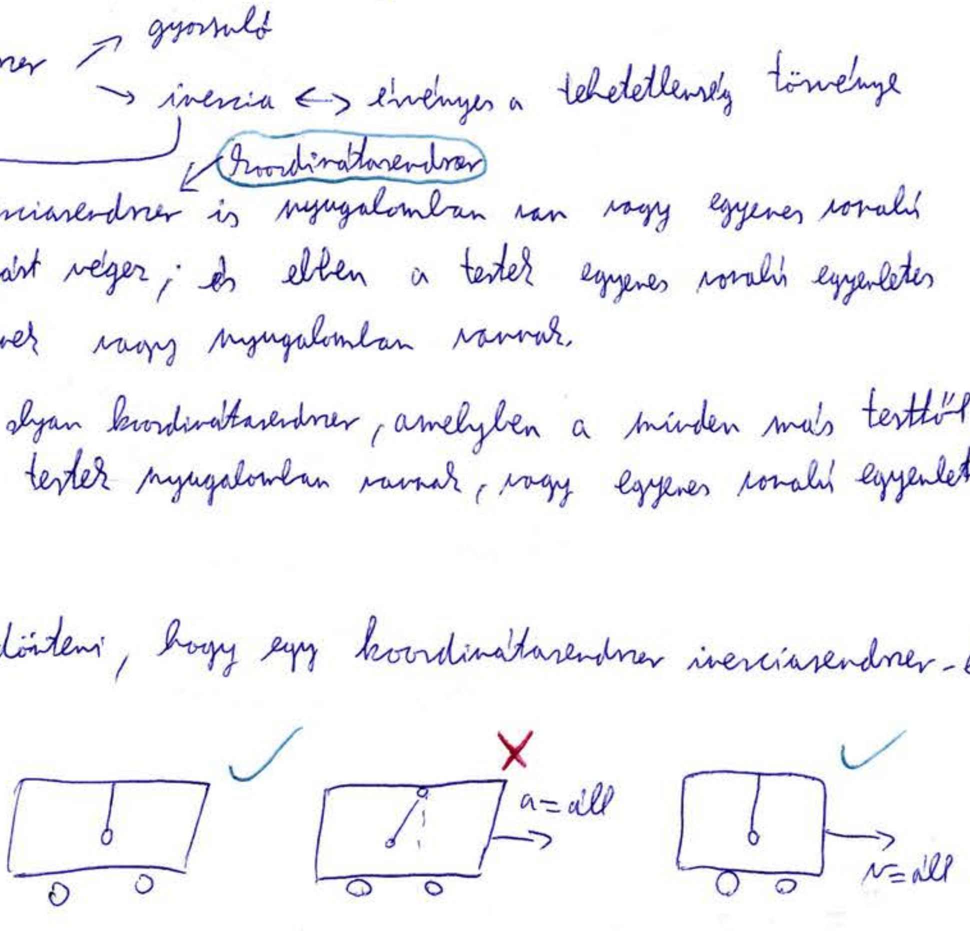
(koordinátarendszer)

↳ maga az inerciarendszer is nyugalomban van vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez; és ebben a testek egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek vagy nyugalomban vannak.

(mindig található olyan koordinátarendszer, amelyben a minden más testtől távol elhelyezkedő testek nyugalomban vannak, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek.)

hogyan lehet eldönteni, hogy egy koordinátarendszer inerciarendszer-e?

→ fonálinga



A dinamika alapegyenlete

- erő fogalmának bevezetése ↗ empirikusan, mérési utasítással definiáljuk (korlátozott az érvényességi kör)
  ↘ dinamika alapegyenletével együtt értelmezzük

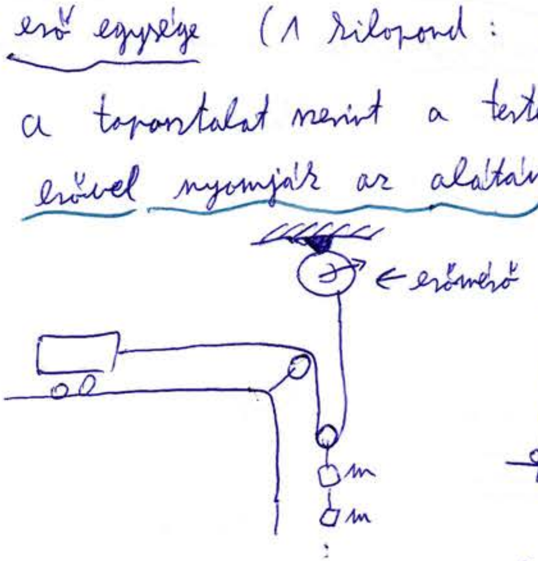
(CARNAP)

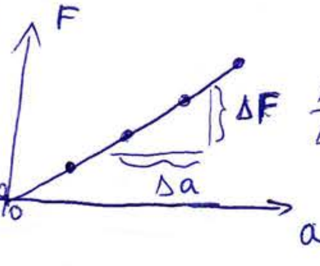
- Carnap-kritériumok, meg kell adni:
  - → az egyenlőség definícióját
  - → a kisebb-nagyobb reláció definícióját
  - → a zérupont (0 szint) definícióját
  - → az egység definícióját
  - → a skálatörvényt

} rugós erőmérő (pl.)

- erő egysége (1 kilopond: 1 dm³ 4°C-os desztillált víz által kifejtett erő)

a tapasztalat szerint a testek adott földrajzi helyen jól meghatározott erővel nyomják az alátámasztást vagy húzzák a felfüggesztést.





$\frac{\Delta F}{\Delta a} = m$ ↳ tehetetlen tömeg mérése

↳ erő mérése: rugós erőmérő

→ tapasztalat: F ~ a lineáris kapcsolat van
az arányossági együttható (az egyenes meredeksége) viszont a különböző testek esetén eltérő.

→ a gyorsulás vektormennyiség → az erő is!

→ az erő gyorsító hatását vizsgálva:

$\frac{F}{a} = m$ mennyiség a tömeg, ami a test gyorsítással szembeni ellenállását mutatja ⇝ a tömeg a test tehetetlenségének mértéke

- Newton II. törvénye → az előbb vizsgált speciális eset általánosan is igaz.

$\boxed{\underline{F} = m \cdot \underline{a}}$ → pontszerű test gyorsulása egyenesen arányos a rá ható erővel és fordítottan arányos a test tömegével.

- Newton megfogalmazása: $\underline{I} = m \cdot \underline{v}$

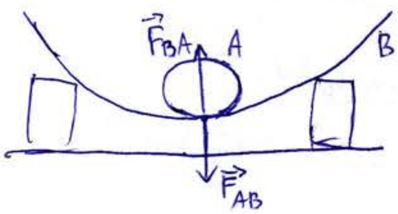
$$\underline{F} = \dot{\underline{I}} = \frac{d\underline{I}}{dt}$$

→ klasszikus mechanika ~ tömeg állandó

→ relativisztikus értelemben ~ $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

A hatás–ellenhatás törvénye (N. III.)

(I. → nincs kh.
II. → kh. erőssége)



$$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$$

A természetben a kölcsönhatások egyidejűek és párban keletkeznek, közös a hatásvonaluk, de ellentétes irányba hatnak azonos nagysággal

az erő és az ellenerő támadáspontja mindig két különböző testen van.

Az erőhatás függetlenségének elve (szuperpozíció elve)

- valóban additívek-e az impulzusderiváltak? – igen ✓ (tapasztalat)

(gyakran nevezik N. IV.-nek)

$$\boxed{\sum_k \underline{F}_k = \underline{F} = \frac{d\underline{I}}{dt}}$$

→ ez azonban csak akkor „telik meg tartalommal", ha az erőket sikerül az erőt kifejtő test jellemző paramétereivel megadni → erőtörvény

Newton axiómák kialakulásának rövid történeti áttekintése

Mozgásegyenlet fogalma, kezdeti feltételek

- dinamika alaptörvénye – kapcsolat az erő és a test gyorsulása között

ismerjük az erőket
↓
következtethetünk a test mozgására

→ a test kinematikai jellemzői ismertek
↓
következtethetünk az erőre

→ erőtörvények

- tapasztalat szerint az erők a kölcsönhatás természetétől függetlenül, pusztán az erőt kifejtő test meghatározott paramétereinek függvényében megadhatók
- ha a dinamika alaptörvényébe beírjuk az erőtörvényeket, valamint a gyorsulás helyébe a helyvektor második deriváltját, megkapjuk a mozgásegyenletet. → ez differenciálegyenlet
- ahhoz, hogy a mozgást pontosan leírjuk, ismernünk kell valamely pillanatban (kezdeti) a mozgás kinematikai jellemzőit.
  ↳ általában: $\underline{r}, \underline{v}$ szükséges, ez 3 dimenzióban 6 adat.

Nevezetes erőtörvények

szabad erők	– van rá összefüggés
kényszererők	– nincs

1. állandó erő (a Föld közelében)

$$\underline{F} = m\underline{g}$$

2. rugóerő (lineáris erőtörvény)

$$\underline{F} = -Dx$$

– a csavarrugó által kifejtett erő arányos és ellentétes irányú a rugó megnyúlásával.

3. gravitációs erő (Newton fedezte fel)

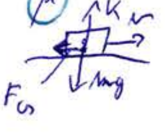
$$\underline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \left(\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}\right)$$

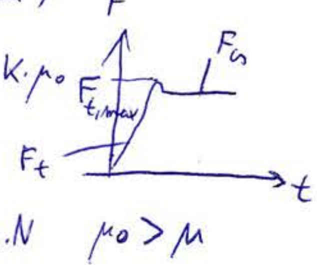
4. súrlódási erő

→ testek mozgásba hozásával → tapadási

→ amikor a testek elmozdulnak egymáshoz → csúszási

$(F_{t,max})$
$\updownarrow$
$S_0 = K \cdot \mu_0$





$F_{cs} = \mu \cdot N \qquad \mu_0 > \mu$

→ tapadási – a testek mozgásba hozását akadályozza, ezért ellentétes irányú a testre ható erőkre, nagysága pedig olyan, hogy az egyensúlyt fenntartsa (egy bizonyos pontig).
– a hatásvonala az érintkező felületekbe esik

→ csúszási – függ az érintkező felületek anyagi minőségétől (jó közelítéssel csak ettől) és az elcsúszó felületek relatív sebességének irányával ellentétes

! → mindkettő erőtörvény hiányos → ismernünk kell a test mozgását, hogy meghatározhassuk N-et.

5. Közegellenállási erő

→ a folyadékokban és gázokban a mozgó testekre a közeg a sebességgel arányos, ellentétes irányú erőt fejt ki → hatványfüggvény

~ kis sebességeknél első hatvánnyal arányos $\underline{F}_k = -k\underline{v}$

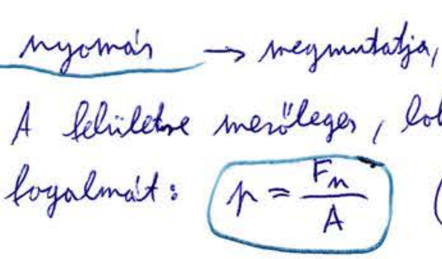
~ nagy sebességeknél második hatvánnyal arányos $\underline{F}_k = -k v \frac{\underline{v}}{v}$

⊕ $F_k = 6\pi$

Kényszererő

A kényszert megvalósító test által kifejtett erőt nem tudjuk előre erőtörvényből megadni, az erő csak a mozgás, illetve az egyensúly körülményeinek ismeretében adható meg.

1. sima lap által kifejtett erő



Kísérletekből megállapítható, hogy a sima lapok mindig a síkjukra merőleges erőt fejtenek ki

2. nyomás → megmutatja, hogy egységnyi felületen mekkora erő hat.

A felületre merőleges, lokális terhelés jellemzésére vezessük be a nyomás fogalmát: $\boxed{p = \frac{F_n}{A}}$ (F_n a kiválasztott felületre merőleges erő)

3. Kényszererő és súrlódási erő

ha a kényszerfelület nem sima, akkor a felület a rajta mozgó testre nem csak normális irányú, hanem a súrlódás miatt érintő menti erőt is kifejt. → ezt az erőt célszerű mindig felületre merőleges és a felületbe eső erőre felbontani

! gyakran csak a normális irányú komponenst szokás kényszererőnek nevezni.

4. Fonalerő → ideálisan a fonal hajlékony és nyújthatatlan

csak fonalirányú erő lehet a kényszererő

↖ csak gömbfelületen mozoghat → az erő itt is mindig merőleges a felületre.

Mozgások dinamikai feltétele:

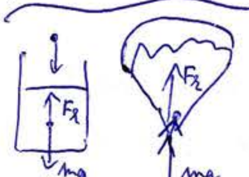
→ egyenes vonalú egyenletes $v=$ áll

$$\sum F_i = m\ddot{x} = 0$$

→ egyenes vonalú egyenletesen változó $a=$ áll

$$\sum F_i = m\ddot{x} = c \quad (\text{konstans})$$

Nevezetes erőtörvények (kiegészítés)



$$ma = m\dot{v} = mg - F_k(v)$$

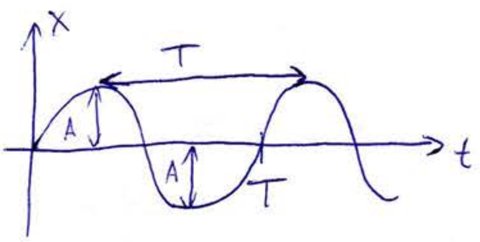
$$m\dot{v} = mg - kv^{\alpha} \quad (\alpha=1,\ \alpha=2)$$

→ folytatás a 8. tételben

Rezgőmozgás

6. tétel

Harmonikus rezgőmozgás jellemzése



$$x(t) = \overset{\text{amplitúdó}}{A} \sin(b\cdot t + \overset{\text{kezdőfázis}}{\varphi_0})$$

- egyetlen rezgés esetén $\varphi_0 \overset{!}{=} 0$

$$x(t) = A \sin(b\cdot t)$$

- egy teljes rezgés ideje: T
- N rezgés t idő alatt $\rightarrow f = \frac{N}{t}$, ha $\rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T}}$ $\quad [f] = \frac{1}{s}$ jele Hz
- b arányossági tényező meghatározása: periodicitás felhasználásával (2π)

$$A\sin(b\cdot t) = A\sin b(t+T) = A\sin(b\cdot t + \underbrace{b\cdot T}_{\text{ennek } 2\pi\text{-nek kell lennie}}) = A\sin(b\cdot t + 2\pi)$$

$$\rightarrow b\cdot T = 2\pi$$

$$\rightarrow b = \boxed{\frac{2\pi}{T} =: \omega} = 2\pi\cdot f$$

ω a rezgőmozgás körfrekvenciája

- felírható $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t + \varphi_0\right) = A\sin(2\pi\cdot f\cdot t + \varphi_0)}$$

- sebesség és gyorsulás: deriválással kaphatók $\left(v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\right)$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\boxed{A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)} = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$\Rightarrow$ rezgőmozgás kinematikai feltétele: $\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot x(t)}$

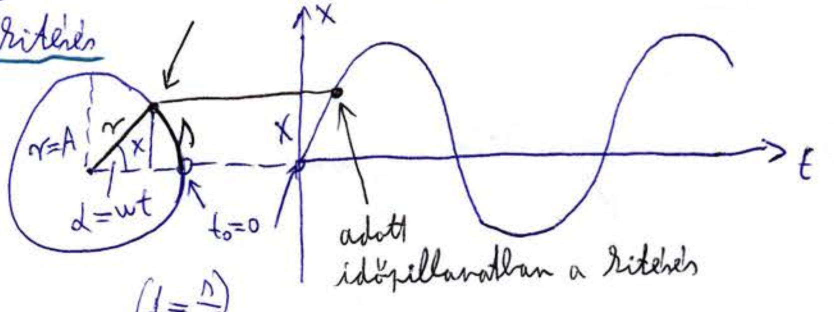
- sebesség- és gyorsulásamplitúdó:

$$v_{max} = A\omega$$

$$a_{max} = A\omega^2$$

Körmozgás és rezgőmozgás kapcsolata

• kitérés



$\left(\alpha = \frac{s}{r}\right)$

$s = \alpha \cdot r = r\omega t$

$\left(\frac{\alpha}{t} = \omega\right)$ | ekkor a rezgőmozgás kitérése

$x(t) = r \sin(\omega t)$

$\alpha = \frac{s}{R}$

$\sin \alpha = \frac{x}{R}$

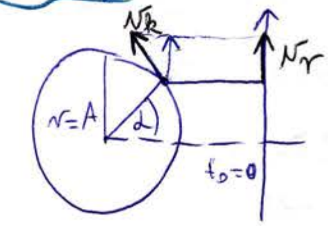
$\hookrightarrow x = R \sin\alpha =$

$= A \sin(\omega t)$ ✓

$r = A$

$x(t) = A \sin(\omega t)$

• sebesség



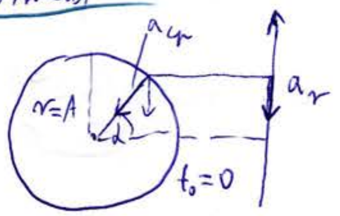
$v_k = r\omega$

$v_r = r\omega \cos(\omega t)$

$\updownarrow$

$v_r = A\omega \cos(\omega t)$

• gyorsulás



$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

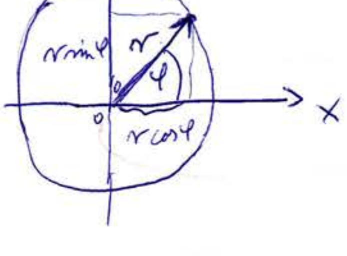
$a_r = r\omega^2 \sin(\omega t)$

↓, -' előjel és $r = A$

$a_r = -A\omega^2 \sin(\omega t)$

$a_r = -\omega^2 x$

• egyenletes körmozgás és rezgőmozgás



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow[A=r,\ \varphi=\omega t]{\text{felhasználva}} \underline{r} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t) \\ A\sin(\omega t) \end{pmatrix} \leftarrow \text{rezgő-mozgás}$$

$(|\underline{r}| = r)$

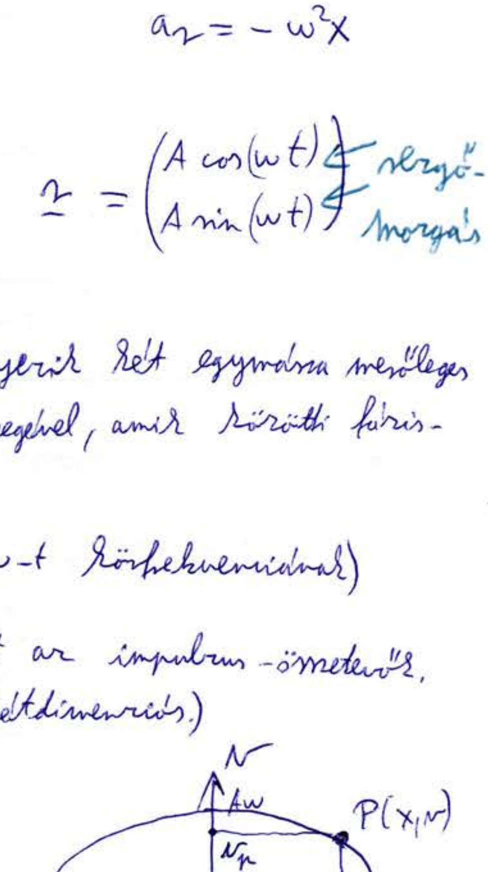
$\Rightarrow$ egyenletes körmozgás megegyezik két egymásra merőleges harmonikus rezgőmozgás összegével, amik közötti fáziskülönbség $\frac{\pi}{2}$.

(ezért nevezik a rezgőmozgás képletébe írt ω-t körfrekvenciának)

Fázistér — a koordinátái a helykoordináták mellett az impulzus-összetevők. (Így az egydimenziós mozgások fázistere kétdimenziós.)

harmonikus rezgőmozgás leírása:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \sin(\omega t + \varphi) \\ \frac{v}{A\omega} &= \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \uparrow^2, + \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$



a fázissíkon ábrázolt görbét, ami a mozgást írja le, trajektóriának nevezzük

Lineáris erőtörvény

$$\boxed{\vec{F} = -D\vec{r}} \rightarrow \overset{\text{erő}}{F} = -\underset{\text{rugóállandó}}{D}\cdot \overset{\text{kitérés}}{x}$$

rugó megnyúlása viszonylag kis alakváltozás mellett arányos a nyújtó erővel

milyen mozgást végez a test, ha a lin. erőtv-nek megfelelő erő hat?

$$\boxed{m\ddot{x} = -Dx}$$

rendezzük át az egyenletet:

$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$ másodrendű, homogén lineáris differenciálegyenlet

látható, hogy az egyenlet megoldása olyan függvény, amelynek az idő szerinti második deriváltja arányos önmagával.

→ ilyen függvény például a sin és cos

→ keressük a megoldást ezek lineárkombinációjaként

$$x(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ ← ha sin vagy cos segítségével írható fel a függvény, akkor sejthetjük, hogy (harmonikus) rezgőmozgást végez a test

$$\hookrightarrow A\left[\sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi\right]$$

ha megfeleltetjük egymásnak a kettőt

$$a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t) \equiv (A\cos\varphi)\sin(\omega t) + (A\sin\varphi)\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (1)\ a_1 = A\cos\varphi \qquad (2)\ a_2 = A\sin\varphi$$

fejezzük ki ezekből A-t és φ-t

$$\sqrt{(1)^2+(2)^2}:\ \sqrt{\underbrace{A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi}_{A^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1})}} = \boxed{A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$\frac{(2)}{(1)}\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

mikor teljesül a diff. egyenlete, hogy $x(t)$ megoldása? – ehhez helyettesítsük be $\ddot{x}(t)$-t az egyenletbe

$$-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi) + \frac{D}{m}A\sin(\omega t+\varphi) = 0$$

$$\hookrightarrow A\sin(\omega t+\varphi)\left[\frac{D}{m} - \omega^2\right] = 0 \quad !\ \forall t\text{-re}! \iff \text{ha } \boxed{\frac{D}{m} - \omega^2 = 0}$$

3.

$$\underbrace{\frac{D}{m} - \omega^2 = 0}$$

$$\downarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \xrightarrow{\text{amiből}} T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

tehát azt kaptuk, hogy $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ alakú függvények közül azok teljesítik ezt a feltételt, aminek a körfrekvenciája $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\Rightarrow$ ez pedig harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele

$F = ma$ felhasználásával

tudjuk, hogy $\ddot{x} = a = -\omega^2 x$

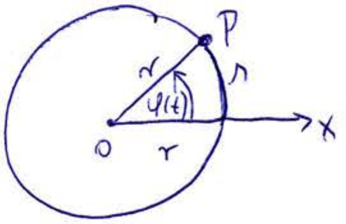
ha erőkkel fejezzük ki:

$$m\ddot{x} = \boxed{F_r} = -m\omega^2 x = \boxed{-Dx}$$

dinamikai feltétel

Körmozgás

7. tétel



a test egy meghatározott sugarú körön mozog (a kör kerületén)

Egyenletes körmozgás

- egy körülfordulás ideje: T
- N fordulathoz t idő szükséges, akkor $f = \frac{N}{t}$ ⇝ spec. $\boxed{f = \frac{1}{T}}$
- $\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} = áll}$ mert egyenletes k. m.
- $\omega := \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ $\left(\varphi = \frac{s}{r}\right)$ → ezt felhasználva: $\frac{\overset{v}{\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t}}}}{r} = \boxed{\frac{v}{r} = \omega}$

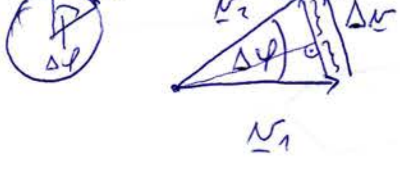
  mivel $\varphi = áll$, ezért $\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}}$

  szögsebesség

  $\boxed{v = r \cdot \omega}$

  kerületi sebesség

- mivel $\vec{v}$ iránya minden pillanatban más, ezért a test gyorsul



$|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| = v$ $\quad |\Delta \underline{v}| = \Delta v$

$\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{\Delta v}{2}}{v_1}$ → fejezzük ki Δv-t

$$\boxed{\Delta v = 2 v \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

- ! kis szögek esetén $(\Delta\varphi \ll 1)$ használható a közelítés: $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$

$$\boxed{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2v\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2}}}{\Delta t} = v \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \boxed{v \cdot \omega}$$

felhasználva, hogy $v = r\omega$ ⟶ $\boxed{a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}}$ $\boxed{= a_{cp}}$

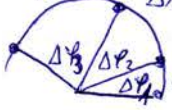
a gyorsulás iránya megegyezik $\Delta\underline{v}$ irányával és így belátható, ha $\Delta\varphi \to 0$, hogy $\underline{a} \perp \underline{v}$-re és a kör középpontja felé mutat.

⇒ a centripetális (középpont felé mutató) gyorsulás

Egyenletesen gyorsuló körmozgás

$s = k t^2$

$\varphi = b t^2$



Megfigyelhető, hogy az idő négyzetével arányos ívet futott be és a szögelfordulása is t^2-tel arányos

→ ez formailag megegyezik az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgásnál kapott összefüggéssel, ahonnan tudjuk, hogy: $\boxed{k = \frac{a_t}{2}}$ (a_t – tangenciális)

$$\Rightarrow \boxed{s = \frac{a_t}{2} t^2}$$

$$\boxed{v = a_t \cdot t}$$

$\boxed{a_t = \text{áll}}$ ← ez a gyorsulás a sebesség nagyságának megváltozásából ered

a_{cp} ← ez pedig az irányváltozás következménye

→ vizsgáljuk, hogy mi lehet b arányossági tényező

$$\omega := \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = 2bt$$

$$\beta := \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = 2b \Rightarrow \beta = 2b$$

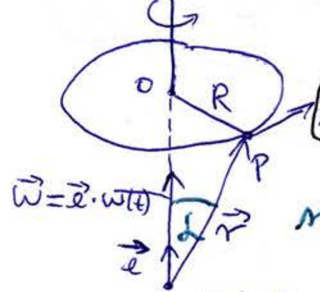
ahonnan $\boxed{b = \frac{\beta}{2}}$

így felírható, hogy: $\boxed{\varphi = \frac{\beta}{2} t^2}$ $\boxed{\omega = \beta \cdot t}$ $\boxed{\beta = \text{áll}}$

Szögsebességvektor

$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{t} = R\,\omega(t) \cdot \vec{t}$ ← érintő egységvektor

↑ pillanatnyi szögsebesség



Q (tetszőleges, forgástengelyen levő pont)

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

$\sin\alpha = \frac{R}{r} \rightarrow R = r\sin\alpha$

$$v(t) = R\,\omega(t) = (r\sin\alpha) \cdot \omega(t) = \overbrace{r \cdot \omega(t) \cdot \sin\alpha}^{\text{vektoriális szorzat definíciója}}$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow$$

$$|\vec{r}| \quad |\omega(t) \cdot \vec{e}|$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \omega \cdot r\sin\alpha = \boxed{\omega \cdot R = v}$$ ✓

fontos, hogy $\vec{e}, \vec{r}, \vec{v}$ jobbsodrású rendszert alkosson!

Körmozgás leírása polárkoordinátákkal (síkbeli) → követő → nem követő

- 

$\underline{r}(x,y) \longrightarrow \underline{r}(r,\varphi)$

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ ezt normáljuk $\boxed{\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}$

↕ síkbeli polárk. egységvektorai

$\underline{e}_\varphi$-t úgy kapjuk, hogy $\underline{e}_r$-et deriváljuk:

$$\dot{\underline{e}}_r = \begin{pmatrix} -\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = \dot\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\underline{e}_\varphi} \rightsquigarrow \boxed{\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}}$$

kapcsolat a két vektor között: $\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{e}}_r &= \dot\varphi\cdot\underline{e}_\varphi \\ \dot{\underline{e}}_\varphi &= -\dot\varphi\,\underline{e}_r \end{aligned}}$

- körmozgás jellemzése együttforgó/követő polárkoordinátákkal

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} = R\cdot\underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = (R\cdot\underline{e}_r)^{\bullet} = \dot R\,\underline{e}_r + R\cdot\dot{\underline{e}}_r = \dot R\,\underline{e}_r + R\cdot\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi$$

$$\hookrightarrow \underline{v}(R,\varphi) = \begin{pmatrix} \dot R \\ R\dot\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ha } R=\text{áll}} \boxed{\underline{v}(R,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \end{pmatrix}}$$

kerületi sebesség

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = (\dot R\,\underline{e}_r + R\cdot\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi)^{\bullet} = \ddot R\,\underline{e}_r + \dot R\,\dot{\underline{e}}_r + \dot R\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi + R\ddot\varphi\,\underline{e}_\varphi + R\dot\varphi\,\dot{\underline{e}}_\varphi =$$

$$= \ddot R\,\underline{e}_r + \dot R\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi + R\ddot\varphi\,\underline{e}_\varphi + \dot R\dot\varphi\,\underline{e}_\varphi + R\underbrace{\dot\varphi\cdot(-\dot\varphi\,\underline{e}_r)}_{-R\dot\varphi^2\underline{e}_r} =$$

$$= (\ddot R - R\dot\varphi^2)\,\underline{e}_r + (2\dot R\dot\varphi + R\ddot\varphi)\,\underline{e}_\varphi$$

$$\hookrightarrow \underline{a}(R,\varphi) = \begin{pmatrix} \ddot R - R\dot\varphi^2 \\ 2\dot R\dot\varphi + R\ddot\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ha } R=\text{áll}} \boxed{\underline{a}(R,\varphi) = \begin{pmatrix} -R\dot\varphi^2 \\ R\ddot\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ R\beta \end{pmatrix}}$$

a_{cp}

a_t

$\dot\varphi^2 = \omega^2$

$\ddot\varphi = \beta$

$\underline{v}$-re $\nearrow 0\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow v_x = -R\dot\varphi\sin\varphi$

$\searrow R\dot\varphi\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow v_y = R\dot\varphi\cos\varphi$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} -R\dot\varphi\sin\varphi \\ R\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$

ha ezt vissza szeretnénk transzformálni síkbeli polárkoordinátákba (nem követő)

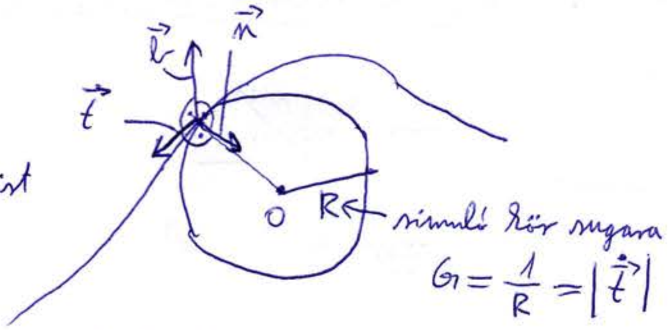
pl. $\underline{a}$-ra $\rightarrow (\ddot R - R\dot\varphi^2)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow a_x = (\underset{\uparrow 0}{\ddot R} - R\dot\varphi^2)\cos\varphi - (\underset{\uparrow 0}{2\dot R\dot\varphi} + R\ddot\varphi)\sin\varphi$

$\hookrightarrow (2\dot R\dot\varphi + R\ddot\varphi)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow a_y = (\underset{\uparrow 0}{\ddot R} - R\dot\varphi^2)\sin\varphi + (\underset{\uparrow 0}{2\dot R\dot\varphi} + R\ddot\varphi)\cos\varphi$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} -R\ddot\varphi\sin\varphi - R\ddot\varphi^2\cos\varphi \\ R\ddot\varphi\cos\varphi - R\dot\varphi^2\sin\varphi \end{pmatrix}$

Körmozgás leírása kísérő triéderben

- kísérő triéder vektorai: $\underbrace{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}}$ lokális ortonormált bázist alkot



$\leftarrow$ simuló kör sugara

$G = \frac{1}{R} = |\dot{\vec{t}}|$

erre illesztjük rá az együttforgó polárkoordináta-rendszert, ahogyan az O pontbeli szemlélő látja az eseményeket.

$$\boxed{\vec{t} = \vec{e}_\varphi} \quad \left(\rightsquigarrow \dot{\vec{t}} = \dot{\vec{e}}_\varphi = \underbrace{-\dot{\varphi}\vec{e}_r} \right)$$

$$\boxed{\vec{e}_r = -\vec{n}} \longrightarrow \underline{\dot{\vec{t}} = \dot{\varphi} \cdot \vec{n}} \quad \left(|\dot{\vec{t}}| = G = \dot{\varphi} \right)$$

- körmozgás leírása

körmozgásnál van rá $(v = R \cdot \dot{\varphi} = R \cdot \omega)$

$$\boxed{\underline{v} = v \cdot \underline{t} = (R\dot{\varphi})\,\underline{t}} \left(= (R\dot{\varphi}) \cdot \underline{e}_\varphi \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$, mint a követő pkr-ben

$$\frac{d}{dt} \hookrightarrow \boxed{\underline{a} = \dot{v} \cdot t + v\dot{\underline{t}} = \underbrace{\dot{v}\,\underline{t}}_{\dot{v} \cdot \underline{e}_\varphi} + \underbrace{v\dot{\varphi} \cdot \underline{n}}_{(-v\dot{\varphi}\,\underline{e}_r)}} \nearrow \begin{pmatrix} \overset{-R\dot{\varphi}^2}{\overbrace{-\dot{v}\dot{\varphi}}} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{cp} = -R\omega^2 \\ a_t = R \cdot \beta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\underline{e}_\varphi$ irányú

(Körmozgás és rezgőmozgás kapcsolata → előző tételben)

Körmozgás dinamikai feltétele:

$$a_{cp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} = v\omega$$

$$F_{cp} = m\,a_{cp} = -m r \omega^2$$

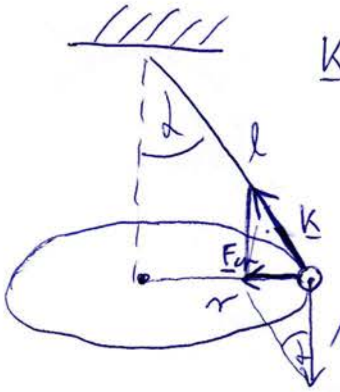
↙ a testre ható erők eredője $\underline{F}_{cp}$

$$\boxed{\underline{F}_{cp} = \sum_k \underline{F}_k = m\,\underline{a}_{cp}}$$

⇒ a centripetális erő a(z) (egyenletes) körmozgást végző testre ható erők eredőjével egyezik meg. !! ez nem „hat"!!

F_{cp} -t adhatja szabaderő ↗ gravitációs pl. műholdak
és/vagy
kényszererő → fonál, rúd, kör alakú sín

Kúpinga



$\underline{K} + m\underline{g}$ vektorok összege adja $\underline{F}_{cp}$-t

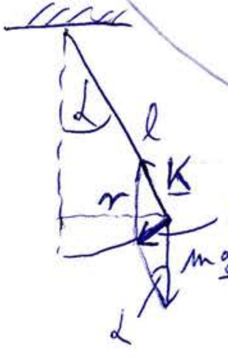
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{cp}}{mg} \rightarrow F_{cp} = \cancel{m}g\operatorname{tg}\alpha = \cancel{m}\overbrace{r\omega^2}^{a_{cp}}$$

$$\boxed{g\operatorname{tg}\alpha = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r}$$

$$\uparrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\overset{l\sin\alpha}{r}}{g\operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\alpha}{g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}}$$

Fonálinga



~~$F_{cp} = \cancel{m}g\sin\alpha = \cancel{m}r\omega^2$~~ ~~$\rightarrow g\sin\alpha = \overbrace{r\omega^2}^{a_{cp}} = r\frac{4\pi^2}{T^2}$~~

~~$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\sin\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\alpha}{g\sin\alpha}} =$~~

~~$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$~~

↑ Ez itt nem jó (csak a végeredmény ...)

Súrlódás, közegellenállás

8. tétel

Bevezetés

- A testek mozgásba hozását illetve a mozgó testek elmozdulását akadályozza az alátámasztó felület. → súrlódási erő
- Hasonlóképpen folyadékokban és gázokban is fellép egy fékező erő
  → közegellenállási erő

Tapadási súrlódási erő

- függ
  - → az érintkező felületek nagyságától
  - → ezek anyagi minőségétől
  - → a felületet összenyomó erőtől
- kísérlettel kimutatható, hogy a test mozgásba hozásához szükséges erő az érintkező felületekre merőleges összenyomó erővel arányosan nő.
- S tapadási súrlódási erő hatásvonala az érintkező felületekbe esik. Iránya és nagysága olyan, hogy a testre ható erők ellenében az egyensúlyt fenntartsa. → de csak egy határig:

$$\boxed{S \leq F_{t,max} = \underbrace{\mu_0 N}_{}}$$

- $\boxed{F_{t,max} = \mu_0 \cdot N}$-et Coulomb-féle súrlódási törvénynek is nevezik
- ha a húzóerő nagyobb, mint $F_{t,max}$, akkor a test mozgásba jön.

$$\boxed{F > F_{t,max}}$$

- az adott erőtörvény közelítő jellegű, mert az erőnek az érintkező felületek nagyságától való függetlensége csak bizonyos mértékig teljesül.
  ↳ módosul μ_0 értéke
- μ_0 függ az érintkező felületek helyi tulajdonságaitól

hiányos az erőtörvény

- a felírt erőtörvény nem elegendő a súrlódási erő meghatározásához, mindig szükség van az adott probléma esetén fellépő többi erőre is!!!

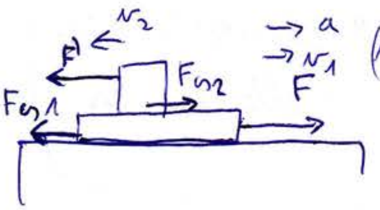
Csúszási súrlódási erő

- függ
  - → az érintkező felületek nagyságától
  - → ezek anyagi minőségétől
  - → a felületeket összenyomó erőktől
  - → sebességtől? — tapasztalat szerint viszonylag széles sebességtartományban független (jó közelítéssel)
- kísérleteket végezve megállapítható, hogy az érintkező felületek nagyságától függetlennek tekinthető
- nagysága arányos a felületre merőleges nyomóerővel, tehát

$$\boxed{S = \underbrace{F_{cs} = \mu \cdot N}}$$

Ez a Coulomb-féle súrlódási törvény

- iránya: a felületek relatív sebességének irányával ellentétes
-

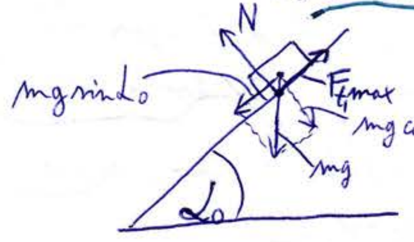


$(v_1 - v_2 > 0)$

- az erőtörvény hiányos, csak a mozgás ismeretében adható meg.

Tömegpont mozgása lejtőn és a súrlódási együttható mérése

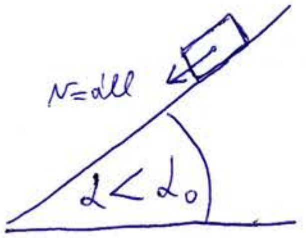
- a csúszási/tapadási súrlódási tényező nagyban függ a felületek lokális tulajdonságaitól — pl. szennyeződés
- tapadási súrlódási tényező mérése lejtővel
  1.) kis hajlásszög beállítása
  2.) hajlásszög növelése, amíg le nem csúszik a test
  3.) állítsuk be úgy a hajlásszöget, hogy a test éppen nyugalomban maradjon
  ↳ ekkor az egyensúlyt $F_{t,max}$ tartja fenn



$mg \sin \alpha_0 = \mu_0 \, mg \cos \alpha_0$

$\hookrightarrow \boxed{\mu_0 = tg\, \alpha_0}$

• csúszási súrlódási tényező mérése lejtő segítségével



ismételjük meg az előző kísérletet azzal a különbséggel, hogy $\alpha < \alpha_0$! és hogy a testet infinitezimálisan kis lökéssel indítjuk el lefelé a lejtőn.

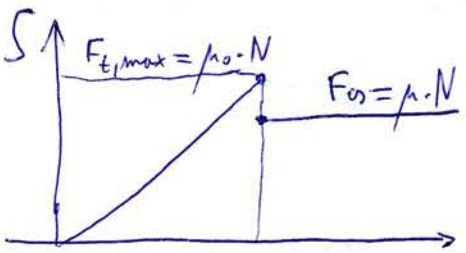
figyelni kell arra, hogy $\boxed{\Sigma \underline{F}_i = \underline{0}}$ legyen, tehát $\underline{v}$=áll, mert akkor van egyensúly:

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$$

$$\hookrightarrow \boxed{\mu = \operatorname{tg}\alpha}$$

!! μ_0, μ mérése pontatlan!!

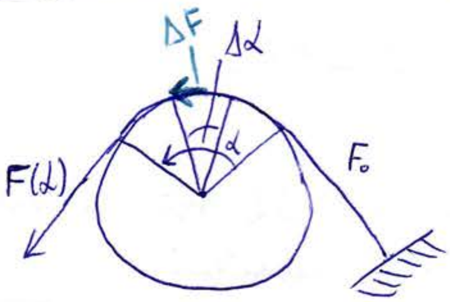
A két súrlódási erő

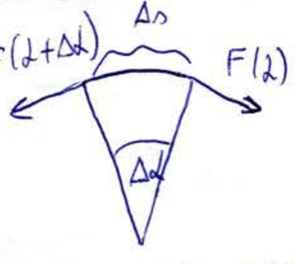


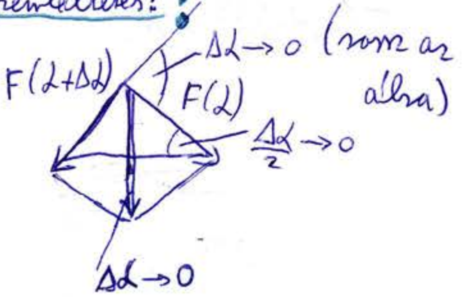
$\boxed{\mu_0 > \mu}$

Kötélsúrlódás (később, 4,5,6. oldal)

ez itt csak a számoláshoz szemléltetés:







$$F(\alpha+\Delta\alpha) < F(\alpha)$$

$$\Delta F = F(\alpha+\Delta\alpha) - F(\alpha) = \Delta S = -\mu_0 \cdot \Delta N$$

(kiválasztunk egy pontot, ahol felírjuk:

$$F_0 = \underbrace{F(\alpha)}_{\text{ez az érték folyamatosan csökken}} + \underbrace{\Delta S(\alpha)}_{\text{ez nő}}$$

)

ezt kellene meghatározni

a kisvesszők ΔF nagyságú eltérése ΔN meghatározásánál elhanyagolható!

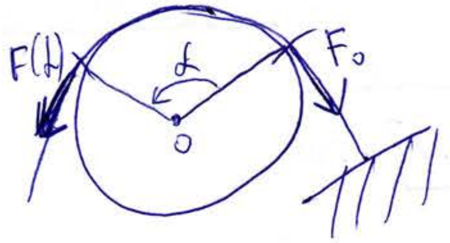
$$\Delta N = 2 \cdot F \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\mu_0 \qquad \sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \simeq \frac{\Delta\alpha}{2}$$

így: $\Delta F = -\cancel{2} \cdot F \cdot \frac{\Delta\alpha}{\cancel{2}}\mu_0$

$$\frac{\Delta F}{\Delta\alpha} = -\mu_0 F \rightsquigarrow \boxed{\frac{dF}{d\alpha} = -\mu_0 F} \rightarrow \underline{\dot{F} = -\mu_0 F} \text{ differenciálegyenlet}$$

Kötélsúrlódás

$$\boxed{F_0 = \Delta S(\alpha) + F(\alpha)}$$



- Tudjuk, hogy a kötél nem csúszik meg, ezért az erők egyensúlyban vannak. (ha a határhelyzetre írjuk fel – de ez jó lesz)

- Tudjuk, hogy minél több kötelet tekerünk rá a hengerre, annál kisebb lesz az az erő, amivel a végét tartanunk kell, hogy az egyensúly fennmaradjon, tehát, hogy tapadjon a kötél.
- Fel kellene írni egy adott pontra (tetszőleges) az erőket:

ki kell vonni az eddigi pontig ható súrlódási erőt

ez az erő $\underbrace{F_0 - \Delta S(\alpha)}_{\uparrow \text{ kezdeti egyenletből}} = F(\alpha)$

ez itt $F(\alpha+\Delta\alpha)$ lesz

$(F(\alpha+\Delta\alpha) < F(\alpha))$

⇒ ahhoz, hogy továbbra is fennálljon az egyensúly, teljesülnie kell ennek:

$$F(\alpha) = F(\alpha+\Delta\alpha) + \Delta S(\alpha)$$

rendezzük át az egyenletet:

$$\underbrace{F(\alpha+\Delta\alpha) - F(\alpha)}_{\Delta F} = -\Delta S = -\mu_0 \cdot \boxed{\Delta N}$$

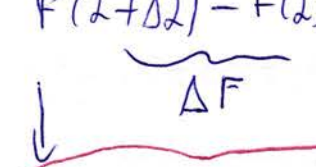
az adott Δα szöghöz tartozó felületi nyomóerő

ezt kellene meghatározni!

$$\boxed{\Delta F = -\Delta S = -\mu_0 \cdot \Delta N}$$

→ ha ki tudjuk fejezni ΔF-et, meg tudjuk adni ΔN-et.

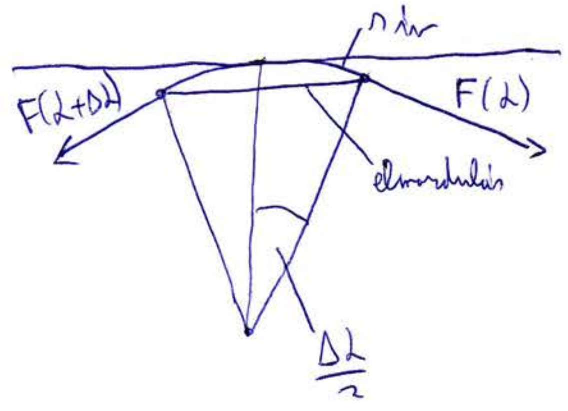
húr – ennek itt ΔF-nek kell lennie, ami megegyezik −ΔS-sel



$$\cancel{\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\Delta F}{2}}{R} \rightarrow \Delta F = 2R\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = -\Delta S = -\mu_0 \Delta N}$$

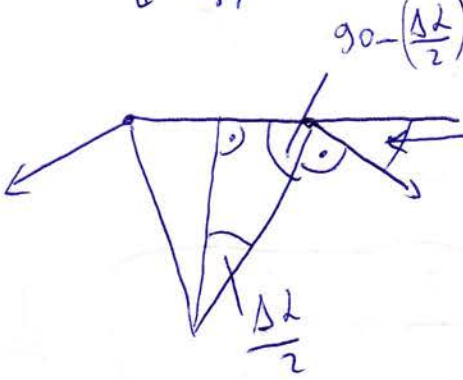
→ folytatás a következő oldalon → $\cancel{\Delta N = \frac{-2R\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\mu_0}}$

→ Meg kellene határozni ΔN-et, ehhez pedig kell egy jó rajz:



• alkalmazzuk az első közelítést, tehát $s_{ív} \approx$ elmozdulás

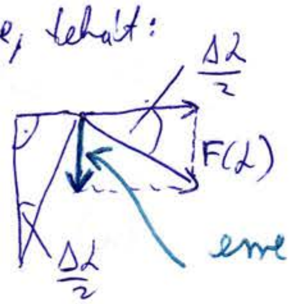
↓ így



ennek itt $\frac{\Delta\alpha}{2}$-nek kell lennie, mert $180 = 90-\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)+90+x$

• Azt tudjuk, hogy a körvonal adott pontjában az erő mindig érintőirányú.

• Célszerű lenne felbontani az $F(\alpha)$ erőt vízszintes és függőleges komponensekre, tehát:



erre az erőre van szükségünk!

• $F(\alpha)$ vízszintes komponensével most nem kell foglalkozni, viszont a függőleges komponens értéke nagyon fontos, mert az aktuális felületdarab ezzel fejti ki az ellenerejét, tehát ΔN kényszererőt.

vezessük be ezt a jelölést

Ahogyan látjuk az ábráról: $F(\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = F_{\parallel}(\alpha)$

Most alkalmazzuk a második közelítést, mivel $\frac{\Delta\alpha}{2}$-vel tartunk a 0-ba, ezalatt ΔF konstansnak vehető.

Tudjuk, hogy egy pontban a nyomóerőt kettő $F(\alpha)$ erő függőleges komponense adja, így: $\boxed{\Delta N = 2\cdot F_{\parallel}(\alpha) = 2\cdot F(\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}$

Ha ez megvan, akkor alkalmazzuk a harmadik közelítést, mivel kis szög $\frac{\Delta\alpha}{2}$, ezért a sin-a közelíthető így: $\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$.

- Az így kapott egyenlet: $\boxed{\Delta N} = 2F \cdot \frac{\Delta\alpha}{2} = \underline{F \cdot \Delta\alpha}$

- Visszatérve: $\Delta F = -\mu_0 \cdot \Delta N = -\mu_0 \cdot F \cdot \Delta\alpha$

$\downarrow$ átrendezve

$$\frac{\Delta F}{\Delta\alpha} = -\mu_0 \cdot F$$

$\downarrow$ $\Delta\alpha \to 0$

$$\boxed{\frac{dF}{d\alpha} = -\mu_0 \cdot F}$$ differenciálegyenlet

A megoldása megadja a kötélerő változását a középponti (α) szög függvényében.

$F' = -\mu_0 \cdot F$ $\longrightarrow$ a derivált láthatóan arányos kezdeti függvénnyel ($F(\alpha)$)

(megoldás e^{valami} lesz)

$F' + \mu_0 F = 0$

(előjel, −')

$e^{-\mu_0 \alpha}$ ← változó!

A differenciálegyenlet megoldása $F = e^{-\mu_0 \alpha}$

ell.: $F' = \left(e^{-\mu_0 \alpha}\right)' = e^{-\mu_0 \alpha} \cdot (-\mu_0)$

- Felírható az eredmény: $F = F_0 \cdot e^{-\mu_0 \alpha}$

ha felhasználjuk, hogy:

$\alpha = \frac{l}{R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F = F_0 \cdot e^{-\mu_0 \frac{l}{R}}}$

Közegellenállási erő folyadékokban és gázokban

- A folyadékokban és gázokban a közeg a test relatív sebességével ellentétesen erőt fejt ki → közegellenállási erő

(• az erőtörvények pontos alakja csak a hidrodinamikai törvények ismeretében érthetők meg.) → 1 speciális eset: gömbre ható közegellenállási erő

- Kis sebességgel mozgó gömbre ható közegellenállási erő $\boxed{F \sim v}$

$$\boxed{\underline{F} = -k\underline{v}}$$

$(v^1 = v^1)$

ahol $$k = 6\pi\cdot\underset{\substack{\uparrow\\\text{a közeg dinamikai viszkozitása (belső súrlódása)}}}{\eta}\,\underset{\substack{\uparrow\\\text{gömb sugara}}}{r}$$

Stokes-féle közegellenállási törvény $(\underline{F}_k = -6\pi\eta r\underline{v})$

- Nagy sebességek esetén (egy bizonyos sebesség felett a mozgó gömb mögött örvények keletkeznek, így megnő a közegellenállási erő)

$$\boxed{F \sim v^2}$$

ilyenkor az eddigi lineáris rész mellé hozzáadódik a sebesség négyzetével arányos rész. ρ sűrűségű, $\underline{v}$ relatív sebességű, r sugarú gömbre ilyenkor:

$$\boxed{F = 6\pi\eta r v + 0{,}225\,\underbrace{r^2\pi}_{A}\,\rho v^2}$$ erő hat

ha nagy a sebesség, akkor egyértelműen a négyzetes tag dominál, így a lineáris elhanyagolható

$$\boxed{\underline{F} = -\underset{\substack{\uparrow\\\text{alaktényező}}}{k}\,A\,\rho\,v^2\cdot\overset{\text{ez csak az irányt adja}}{\frac{\underline{v}}{v}}}$$

- Felhasználva az előbb említett törvényeket, vizsgáljuk meg, hogy mi történik egy folyadékban vagy levegőben elejtett test, ha az adott közegellenállási erő érvényességi tartományában vizsgálódunk.

- viszkózus közegben kezdősebesség nélkül eső test mozgása

→ mozgásegyenlet: $ma = \underbrace{mg}_{\uparrow} \underbrace{- kv}_{\nwarrow}$ közegellenállási erő

nehézerő

↓ célszerű felírás

$$\boxed{m\dot{v} = mg - kv}$$

látható, hogy v akkor lesz maximum, ha a gyorsulás éppen 0, ami akkor van, ha $mg - kv = 0$, tehát $v = \frac{mg}{k}$

↳ ezt átalakítva: $\frac{mg}{k} - v = 0 \quad /\cdot(-1)$

$$\underbrace{v - \frac{mg}{k}}_{} = 0$$

ezt behelyettesítve az egyenletbe: ← $\boxed{z := v - \frac{mg}{k}}$ ↖ ez konstans

$$\boxed{m\dot{z} = -k z}$$

↳ $\boxed{\dot{z} = \dot{v}}$

$$\dot{z} = \frac{-k}{m} z$$

látható, hogy $\dot{z} \sim z$-vel, ezért a megoldás: $z = C e^{-\frac{k}{m}t}$ ←

kezdeti feltételekből kell megadni

↓ $t = 0$-ban $v(0) = 0$, tehát

$$z(0) = 0 = v - \frac{mg}{k}$$

↳ $\underline{C = -\frac{mg}{k}}$ → amiből $\boxed{z = \frac{-mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}}$

vissza kell írni v-re, tehát $v = z + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right] =$

$\left(s = \int_0^t v_{max}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) dt\right)$

megoldás: $\boxed{v = v_{max}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]}$

<u>kezdetnél</u>

$ma = m\dot{v} = mg - kv^{\alpha} \quad (\alpha = 1)$ → átrendezve: $\dot{v} = g \boxed{-\frac{k}{m}} v$ ← kiemeljük

$$\dot{v} = g - \frac{k}{m} v \qquad \dot{v} = -\frac{k}{m}\Big(\underbrace{-\frac{mg}{k} + v}_{z}\Big)$$

$\dot{v} + \frac{k}{m} v = g$ ← elsőrendű inhomogén lineáris diff. egyenlet $\quad \boxed{\Rightarrow \dot{z} = -\frac{k}{m} z}$

- négyzetes ellenállástörvény hatása alatt eső test mozgása

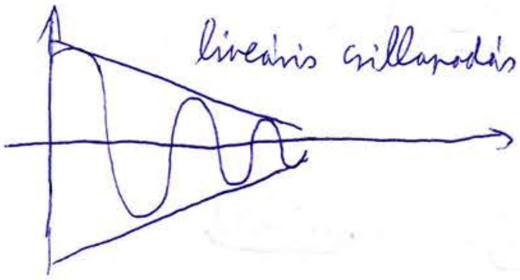
$$ma = m\dot{v} = mg - k'v^{\alpha} \quad (\alpha = 2)$$

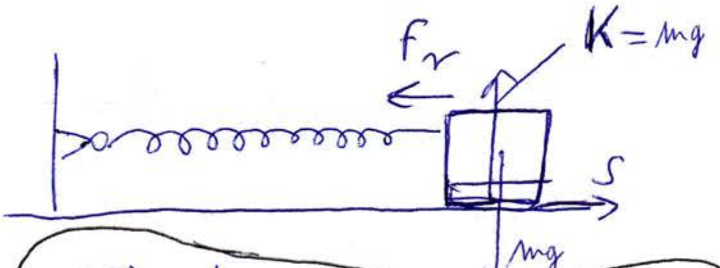
$$m\dot{v} = \underbrace{mg - k'v^2}_{} \qquad mg - kv^2 = 0$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k'}}$$

az egyenlet integrálásával megoldható ...

- állandó súrlódási erővel csillapított rezgőmozgás





$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A_0 \\ v(0) = \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{kezdeti feltételek}$$

mozgásegyenlet: $ma = m\underset{(x-x_0)^{\cdot\cdot}}{\ddot{x}} = -Dx \boxed{\pm} \mu mg = -D\left(x \mp \underbrace{\frac{\mu mg}{D}}_{\boxed{x_0}}\right)$

a súrlódási erő mindig ellentétes irányba hat, mint a relatív sebesség

ez felírható

$$\boxed{x = \boxed{x_0} + \boxed{C} \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha)} \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

rezgés amplitúdója

a tapadási súrlódási erő eddig tartja

$$\frac{d}{dt} \downarrow$$

$$\dot{x} = C\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \rightarrow \dot{x}(0)\text{-ban} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

↓ szélső helyzetből indítjuk a rezgést ~> cos fv írja le

$$\Rightarrow x = x_0 + C \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot t)}_{} \wedge x(0) = A_0 \longrightarrow \boxed{C = A_0 - x_0}$$

t=0-ban, tehát $x_0 + C = \underbrace{x(0)}_{A_0}$

$$x = x_0 + A_0\cos(\omega_0 t) - x_0\cos(\omega_0 t)$$

$\boxed{x(0) = A_0}$ ✓

$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dots$?

egyik egyenlet: $m\ddot{x} = -Dx + \mu mg = -D\Big(\underbrace{x - \frac{\mu mg}{D}}_{\boxed{x_1}}\Big)$

másik egyenlet $m\ddot{x} = -Dx - \mu mg = -D\Big(\underbrace{x + \frac{\mu mg}{D}}_{\boxed{x_2}}\Big)$

így kapjuk: $m\ddot{x} \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -Dx_1 = -D(x - x_0) \\ m\ddot{x}_2 = -Dx_2 = -D(x + x_0) \end{cases}$

$(\ddot{x} = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2)$

$$\boxed{A_{i+1} = A_0 - 2ix_0} \leftarrow$$

Tömegpont mozgására vonatkozó tételek

9. tétel

Impulzus:

$$\boxed{\underline{I} = m \cdot \underline{v}} \quad [I] = kg \cdot \frac{m}{s} \quad (\text{vektormennyiség})$$

Erőlökés:

$$\boxed{\Delta \underline{I} = \underline{F} \cdot \Delta t}$$

Az impulzus megváltozását az erőlökés okozza

$$(m\underline{v}_2 - m\underline{v}_1 = \underline{F} \cdot \Delta t)$$

(szemléltetés:
pohár alól kihúzzuk ki gyorsan a papírlapot)

Impulzustétel:

Ha egy testre $\underline{F}(t)$ erő hat T ideig, akkor

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = \underline{F}(t)$$

↗ átszorzunk dt-vel, $d\underline{I} = \int_0^T \underline{F}(t)\,dt$

ennek a mozgásegyenletnek az integrálásával kapjuk a test impulzusának megváltozását.

$$\frac{\Delta \underline{I}}{\Delta t} = \underline{F}(t) \rightsquigarrow \Delta \underline{I} = \underline{F}(t)\,\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta I = \underbrace{\int_0^T \underline{F}(t)\,dt}_{\text{erőlökés}}}$$

A tömegpont impulzusának megváltozása egyenlő az erőlökéssel

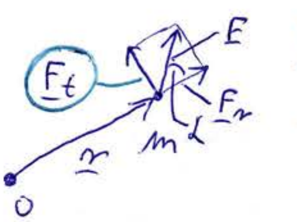
megjegyzés: amennyiben $\underline{F}(t) = 0$, akkor $\underline{I} = \text{állandó}$ ⇒ impulzus megmaradásának tétele

Forgatónyomaték

Az erő forgató hatásának jellemzésére vezetjük be

$$\boxed{\underline{M} := \underline{r} \times \underline{F}}$$

erőnyomaték



$\underline{F}_t$-től függ a forgatónyomaték

$$|\underline{M}| = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin\alpha$$

Impulzusmomentum

- dinamika alaptörvénye: $\underline{F} = \frac{d\underline{I}}{dt}$ $\quad / \cdot \underline{r}\times$

$$\Downarrow$$

$$\underline{r}\times\underline{F} = \underline{r}\times\frac{d\underline{I}}{dt}$$ a differenciálás lineáris művelet

$$\Downarrow$$

$$\underline{r}\times\frac{d\underline{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}\times\underline{I}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}\times\underline{I}\right) = \frac{d\underline{r}}{dt}\times\underline{I} + \underline{r}\times\frac{d\underline{I}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}\times\underline{I}\right) = \underbrace{\underline{v}\times\underline{I}}_{0} + \underline{r}\times\frac{d\underline{I}}{dt} \quad \left(\to \cancel{\frac{d}{dt}}\left(\underline{r}\times\underline{I}\right) = \underline{r}\times\cancel{\frac{d}{dt}}\,\underline{I}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{r}\times\underline{I} = \underline{r}\times m\underline{v} =: \underline{N}}$$ ← impulzusnyomaték

- $\dot{N} = \left(\underline{r}\times\underline{I}\right)^{\cdot} = \dot{\underline{r}}\times\underline{I} + \underline{r}\times\dot{\underline{I}} = 0 + \underline{r}\times\underline{F} = \underline{M}$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{d\underline{N}}{dt}}$$ ← impulzusmomentum-tétel

Az impulzusnyomaték időszerinti deriváltja a forgatónyomaték

- hasonlóan az erőlökéshez: forgatólökés

$$\boxed{\Delta N = \int_0^T M\,dt}$$

Centrális erőtér fogalma

- impulzusmomentum-tételből → $\underline{M}=0 \Rightarrow \underline{N}=$ áll
- egy tetszőleges pontra felírva
  - → ha $\underline{M}=0$, akkor erre a pontra $\underline{N}=$ áll lesz
  - → a forgatónyomaték és az impulzusmomentum is felírható tetszőleges pontokra.
  - → az impulzusmomentum-tétel ∀ inerciarendszerbeli pontra érvényes
  - → De! az impulzusmomentum megmaradása függ a referenciaponttól

- mikor marad meg az impulzusmomentum? ($\underline{N}$ = áll?)

→ nézzük meg, hogy mikor zérus a testre ható forgatónyomatékok eredője

$$\boxed{\sum_i \underline{r} \times \underline{F}_i = \underline{r} \times \sum_i \underline{F}_i}$$

egy adott pontban vizsgálódunk

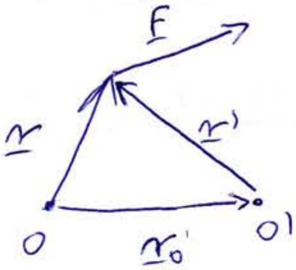
1) ha $\sum_i \underline{F}_i = 0$, tehát az adott pontban az erők eredője 0.

2) ha $\underline{r} = 0$

3) ha $\boxed{\underline{r} \parallel \underline{F}_e}$ → ez azt jelenti, hogy az erő hatásvonala egybeesik a helyvektor hatásvonalával, tehát az átmegy az origón a mozgás minden pillanatában

⇒ centrális erő → az ilyen erők centrális erőteret alkotnak

⊕ Forgatónyomatékhoz kiegészítés



$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \overset{\text{disztributív}}{(\underline{r}_0 + \underline{r}') \times \underline{F}} = \underline{r}_0 \times \underline{F} + \underline{r}' \times \underline{F}$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{r}'$$

forgatónyomaték transzformáció

Munka $W = \underline{F} \cdot \underline{r}$ skaláris szorzat ($W = F \cdot s$)

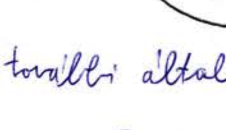
↓ általánosítás, ha $\underline{F} \neq$ áll és a pálya görbe vonalú, de ($\underline{F} \parallel \Delta \underline{r}$) F párhuzamos az elmozdulással

$\delta W_i = F_i \Delta s_i$

akkor $W = \sum_i \delta W_i = \sum_i F_i \cdot \Delta s_i$

$$\boxed{W = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_i F_i \Delta s_i = \int_0^s F \, ds}$$

↓ további általánosítás

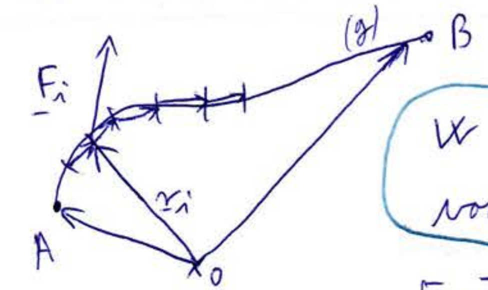


$\Delta \underline{r}_i$ – elmozdulásvektor

α_i – $\underline{F}_i$ és $\Delta \underline{r}_i$ vektorok közbezárt szöge

csak ez az összetevő számít → kifejezhető skaláris szorzatként

$$W = \int_0^r (F_i \cos\alpha_i)\, dr_i \longrightarrow \text{átírható} \quad W = \int \underline{F} \cdot d\underline{r}$$



W az $\underline{F}$ erő (g) görbe mentén vett vonalintegrál

$$[W] = \frac{kg\, m^2}{s^2}$$

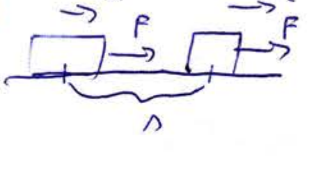
Kinetikus energia és a munkatétel

dinamika alaptörvénye !
$\swarrow \underline{r}\times \quad \searrow \Delta\underline{r}\cdot$
$\underline{N}, \dot{\underline{N}} = \underline{M} \quad W, E$

→ impulzustétel: $\underline{F} = \frac{d\underline{I}}{dt}$ $\quad / \cdot \underbrace{\Delta\underline{r} = \underline{v}\cdot\Delta t}_{\text{elemi elmozdulás}}$

$$\underbrace{\delta W}_{\text{elemi munka}} = \underline{F}\cdot\Delta\underline{r} = \underbrace{\frac{d\underline{I}}{dt}}_{m\frac{d\underline{v}}{dt}}\cdot\underline{v}\cdot\Delta t = m\,\frac{d\underline{v}}{dt}\,\underline{v}\,\Delta t \quad \left(\frac{d\underline{v}}{dt}\Delta t = \Delta\underline{v}\right)$$

$$\delta W = m\cdot\underline{v}\cdot\Delta\underline{v} = \underline{F}\cdot\Delta\underline{r}$$



(ez itt a füzetből van:)

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \\ s &= \frac{v_2 + v_1}{2}\cdot\Delta t \end{aligned}\right\} F\cdot s = m\,\frac{v_2+v_1}{2}\cdot\frac{v_2-v_1}{1} =$$

$$= m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2$$

$$\boxed{E_{kin} := \frac{1}{2}mv^2}$$

→ használjuk fel, hogy

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m(\underline{v}+\Delta\underline{v})^2 - \frac{1}{2}m\underline{v}^2 \doteq m\,\underline{v}\cdot\Delta\underline{v}\ \left(+\ \frac{1}{2}m(\Delta\underline{v})^2\right)$$

≈ 0 elhanyagolható

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\left(\frac{1}{2}m\underline{v}^2\right) = m\,\underline{v}\cdot\Delta\underline{v} = \delta W}$$

$$\sum \delta W = \boxed{W = \frac{1}{2}m\underline{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\underline{v}_1^2}$$

← ha összeadjuk az elemi munkára kapott járulékokat a teljes pálya mentén

→ eredmény: A pontszerű testre ható erők eredőjének munkája megegyezik a test kinetikus energiájának megváltozásával

Teljesítmény

A munkavégzés intenzitásának jellemzésére vezessük be:

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \qquad (\bar{P} - \text{átlagos teljesítmény}) \qquad [P] = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{\Delta t} = \frac{\underline{F}\cdot\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \underline{F}\cdot\underline{v}}$$

Áttekintés

$\dot{\underline{J}} = \underline{F}$	$\underline{J}_2 - \underline{J}_1 = \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(t)\,dt}^{\text{erőlökés}}$	impulzustétel
$\dot{\underline{N}} = \dot{\underline{M}}$	$\underline{N}_2 - \underline{N}_1 = \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}(t)\,dt}^{\text{forgatólökés}}$	perdülettétel
$\dot{E}_k = P = \underline{F}\cdot\underline{v}$	$E_{k2} - E_{k1} = \underbrace{\int_{①}^{②} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r}}_{\text{munka}} = W_F(1 \to 2)$	energiatétel

deriváltas alak

integráltas alak

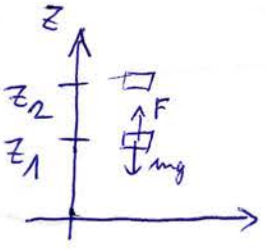
Nevezetes erőterek munkái

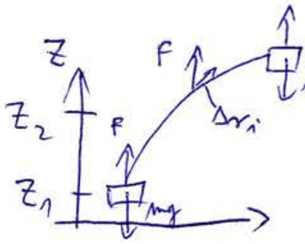
- konstans erő

gravitációs erő

$$W_F = \underset{\overset{\|}{mg}}{F}\,(z_2 - z_1) > 0$$

$$W_{mg} = -mg\,(z_2 - z_1)$$

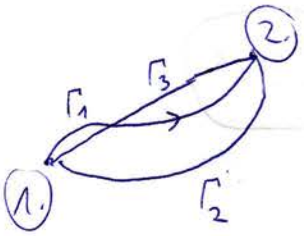




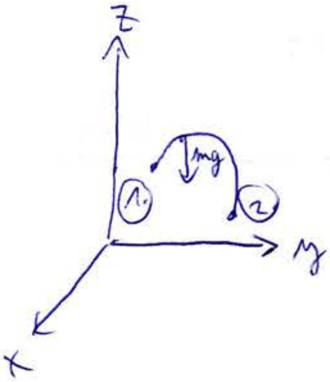
$$\Delta W_F = \underline{F}\cdot\Delta\underline{r}_i \longrightarrow W_F = \underline{F}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta\underline{r}_i = \underline{F}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

$$W_F = \begin{pmatrix}0 & 0 & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2 - x_1\\ y_2 - y_1\\ z_2 - z_1\end{pmatrix} = F(z_2 - z_1)$$

$$(\underline{F} = m\underline{g}) \qquad W_{mg} = -m\underline{g}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = -mg(z_2 - z_1)$$



$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ esetén ugyanannyi a munka és csak a kezdő- és végponttól függ



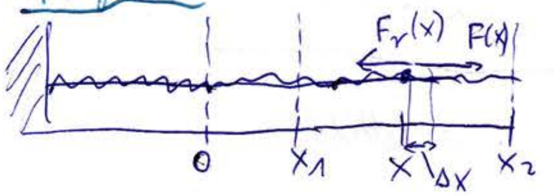
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{mg}(1\to 2) = mg(z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgz_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgz_2}$$

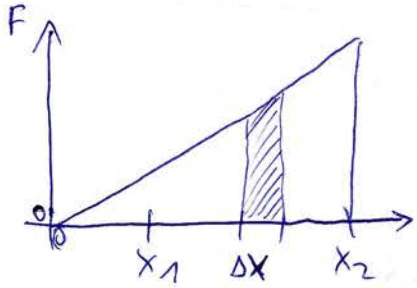
mechanikai energiamegmaradás tétele

$E_p = mgz + E_0$ $\boxed{E_{kin} + E_{pot} = \text{áll}}$

- Rugó (1)



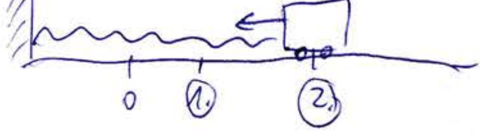
$$\Delta W_F = F\cdot\Delta x = Dx\cdot\Delta x$$



$$W_F(1\to 2) = \frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2$$

$$W_{F_r}(1\to 2) = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right)$$

- Rugó (2)



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{F_r} = -\frac{1}{2}\left(Dx_2^2 - Dx_1^2\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Dx_2^2}$$

rugó esetében $E_{pot} + E_{kin} = \text{áll}$

Rezgés
- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E_0$

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\hookrightarrow \dot{x}(t) = v(t) = A\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}\underset{\uparrow m\omega^2}{D}A^2\sin^2(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}\overset{D}{\widehat{m\omega^2}}A^2 = \boxed{\frac{1}{2}DA^2}$$

- munkavégzés centrális erőtérben

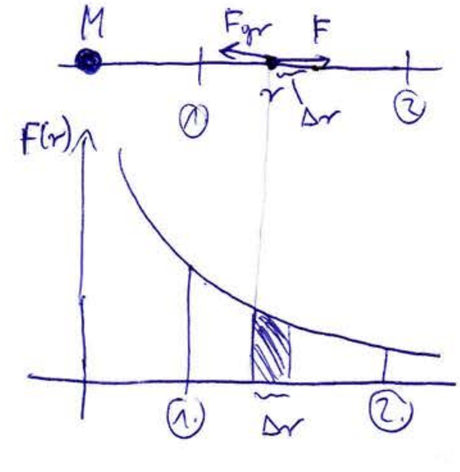
$$\underline{F}(\underline{r}) = \underline{F}(|\underline{r}|) = F(r)\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$$

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -Dr \\ F_{grav.} &= -\gamma\frac{mM}{r^2} \\ F_c &= k\frac{Qq}{r^2} \end{aligned}\right\} F(r) = c\cdot r^{\alpha}$$

$$W_F = \underline{F}(\underline{r})\cdot\Delta\underline{r} = F(r)\,\Delta r$$

$$W_F(1\to 2) = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\gamma m M}{r^2}\,dr = \gamma m M(-1)\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$W_{F_{gr}}(1\to 2) = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$



$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \gamma m M\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma\frac{mM}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \gamma\frac{mM}{r_2}}$$

$$\boxed{E_p = -\gamma\frac{mM}{r}} \quad \boxed{E_k + E_p = E_0}$$

Potenciálfüggvény bevezetése

$\boxed{\oint_g \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0}$ ← ha ez jellemző az erőtérre, akkor a tér pontjaihoz hozzárendelhető $E_p(\underline{r})$ skalármező.

$E_p(\underline{r})$ skalármező → potenciális energia-függvény

$$\int_A^B \underline{F}\,d\underline{r} = -\int_0^A \underline{F}\,d\underline{r} + \int_0^B \underline{F}\,d\underline{r} = E_p(\underline{r}_A) - E_p(r_B)\ \Big(= -\big[E_p(r_B) - E_p(r_A)\big]\Big)$$

($E_p(\underline{r})$ függvény − $\underline{F}$ erő munkáját adja meg.)

pl. $E_p(x) = \frac{1}{2}Dx^2$

$E_p(h) = mgh$

Az olyan erőterek, amikben teljesül $\overbrace{\oint_g \underline{F}(r)\,d\underline{r} = 0}^{\text{def 1.}}$, tehát amikhez hozzárendelhető potenciálfüggvény, konzervatív, vagy potenciálos erőtereknek nevezzük

$\forall\,\Gamma_1\,\Gamma_2$  $\overbrace{\int_{\Gamma_1}\underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{\Gamma_2}\underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r}}^{\text{def 2.}}$

A mechanikai energia megmaradásának tétele

$\underline{F}(\underline{r})$ konzervatív erő $\underline{r}_A$ és $\underline{r}_B$ között mozog a test

$$\boxed{\int_A^B \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_B) - \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_A)}$$

felírható így is:

$$E_p(r_A) - E_p(r_B) = \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_B) - \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_A)$$

$$\hookrightarrow \boxed{E_p(\underline{r}_A) + \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_A) = E_p(\underline{r}_B) + \frac{1}{2} m \underline{v}^2(\underline{r}_B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m \underline{v}^2 + E_{pot} = \text{állandó}}$$

(+)

ha $\oint_g \underbrace{\underline{F}(\underline{r})}\, d\underline{r} = 0$ $\left(-\int_0^r \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} =: E_p(r) \right)$

$\uparrow$ $\underline{F}(\underline{r})$ vektormező gradiens, tehát $\exists\ \phi(\underline{r})$ skalármező, amelyre

$$\underline{\nabla} \phi = -\underline{F}(\underline{r})$$

$(\underline{\nabla})_k = \partial_k$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{$\underline{F}(\underline{r})$ vektormező előáll egy skalármező negatív gradienseként}}$

---

vázlat

→ 1.) új fogalmak bevezetése, N, $M^{\underline{r}\times}$ ← din. alaptétele

→ 2.) E_{kin} és munkatétel ← $\Delta r.$

→ 3.) Potenciálfüggvény

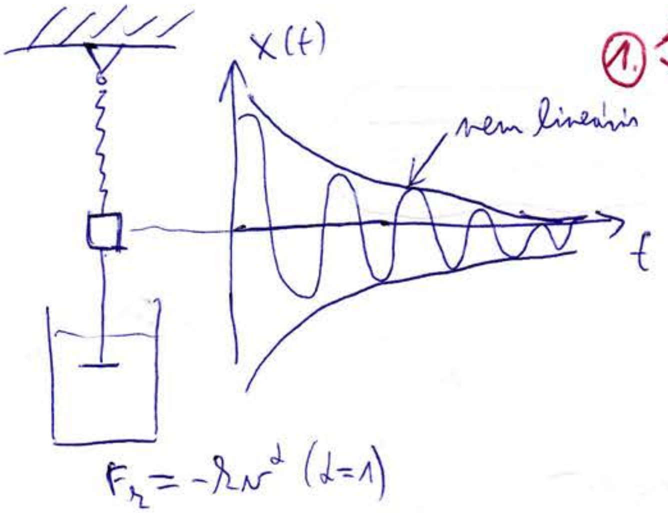
(+) disszipatív erő

$\oint_g \underline{F}\, d\underline{r} \neq 0$ pl. súrlódási, közegellenállási erők

Csillapodó rezgések, kényszerrezgések

10. tétel

Sebességgel arányos csillapítás



$F_s = -kv^{\alpha}$ $(\alpha = 1)$

① $\boxed{m\ddot{x} = -Dx - kv}$ ← mozgásegyenlet

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2\beta}\dot{x} + \underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2}x = 0}$$ ← 0-ra kell rendezni

$\frac{k}{m} = 2\beta$ → csillapítási tényező

$\frac{D}{m} = \omega_0^2$

- Ez az egyenlet másodrendű, lineáris, homogén, állandó együtthatós differenciálegyenlet.
- Ahogy a kísérlet mutatja, amit a vertikális kinematográf rajzolt, látható, hogy rezgőmozgás az eredmény, de olyan, aminek az amplitúdója is változik.

↳ feltételezzük, hogy a megoldás felírható ilyen alakban:

② →

$$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \hookrightarrow \dot{x}(t) = \dot{A}\sin(\omega t + \varphi) + A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \hookrightarrow \ddot{x}(t) = \ddot{A}\sin(\omega t + \varphi) + \dot{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) + \dot{A}\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

↓ átrendezve

$$\ddot{x}(t) = (\ddot{A} - A\omega^2)\sin(\omega t + \varphi) + 2\dot{A}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

↓ Ezeket az egyenleteket be kell írni a kezdeti mozgásegyenletbe

③

$$\cos(\omega t + \varphi)[2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega] + \sin(\omega t + \varphi)[\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + A\omega_0] = 0$$

↓ Szorzat értéke akkor 0, ha valamelyik tényezője 0 ⟹ két egyenletet kapunk

(1) $2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega = 0$

$2\dot{A} + 2\beta A = 0$

④ $\boxed{\dot{A} + \beta A = 0}$ ← ez is egy differenciálegyenlet, de ezen látszik rögtön a megoldás

→ $\dot{A} = -\beta A \rightarrow \boxed{A(t) = C \cdot e^{-\beta t}}$

(2) $\ddot{A} - A\omega^2 + \omega_0^2 A + 2\beta\dot{A} = 0$ ← ⑤ tudjuk, hogy $A(t) = C\cdot e^{-\beta t}$

$\hookrightarrow \dot{A}(t) = -\beta\cdot C\cdot e^{-\beta t}$

$\hookrightarrow \ddot{A}(t) = \beta^2\cdot C\cdot e^{-\beta t}$

ezeket felhasználva ↑ ⑥

$\boxed{\beta^2}\cancel{C e^{-\beta t}} + \boxed{\omega_0^2}\cancel{C\cdot e^{-\beta t}} + \boxed{2\beta(-\beta)}\cancel{C e^{-\beta t}} - \cancel{C e^{-\beta t}}\boxed{\omega^2} = 0$

$\underbrace{\beta^2 - 2\beta^2}_{} + \omega_0^2 - \omega^2 = 0$

$-\beta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 = 0$

↓ $\omega^2 = -\beta^2 + \omega_0^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \longrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ ← ⑦

eddig tudjuk: $\boxed{x(t) = C e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)}$

$\boxed{K = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\beta t}}$ ← csillapítási hányados

ez is kell!!

$\tau = -\frac{1}{\beta}$ → relaxációs idő

az az idő, ami alatt a rezgés amplitúdója e-ad részére csökken

$K = e^{\beta T} \longrightarrow \Lambda = \ln K = \beta T$

mérhető

$\hookrightarrow \beta = \frac{\Lambda}{T}$ időbeli csillapítási együttható

- Csillapítás szerint több lehetőség van: ← ⑦

⑧ →

→ $\boxed{\beta > \omega_0}$ erős csillapítás $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < 0$, tehát komplex lesz a megoldás

karakterisztikus egyenletet kellene felírni

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $x = e^{\lambda t}$ alakban lehet keresni

állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet ↙ Bólyai könyvből

↳ általános alakja: $ay'' + by' + cy = 0$ $y = e^{\lambda x}$ alakban lehet keresni

↓ így

$e^{\lambda x}\underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{0} = 0$

$\Longrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ← karakterisztikus egyenlet

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ $y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}$

→ $x(t)\underbrace{[\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2]}_{0} = 0$

$\rightarrow \lambda_{12} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ↗ $-\beta + \omega$ ↘ $-\beta - \omega$

1 zérushely lehet

⑨ ↘

így x általános megoldása:

$x_{ált}(t) = C_1 e^{(-\beta+\omega)t} + C_2 e^{(-\beta-\omega)t} = e^{-\beta t}[C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}] = \boxed{C e^{-\beta t}\,\mathrm{sh}(\omega t + \varphi)}$

ha $t \to \infty$ $\overset{x}{\underset{0}{\downarrow}}$

→ karakterisztikus egyenlethez visszatérve $\boxed{\beta = \omega_0}$ ← ⑩

$$\Downarrow$$

$$x(t)\left[\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2\right]=0$$

$$\lambda_{12} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\beta$$

ilyenkor $y_1 = e^{\lambda x}$

$y_2 = x\, e^{\lambda x}$

$$Y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(c_1+c_2 x) \quad \left(\frac{y_1}{y_2} \neq \text{áll.}\right)$$

→ $e^{-\beta t}$ is megoldás és $-\beta e^{-\beta t}$ is

⑧ ilyenkor $\boxed{x_{ált}(t) = e^{-\beta t}\left[c_1+c_2 t\right]}$ ← ⑩

→ $\boxed{\beta < \omega_0}$ gyenge csillapítás

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \qquad 0<\beta<\omega_0$$

$$\boxed{x_{ált}(t) = C e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\cdot t + \varphi\right)}$$ ← ennek a grafikonja van felrajzolva

A csillapított rezgőmozgás energiaviszonyai

$$x(t) = A_0 \underbrace{e^{-\beta t}}_{A(t)} \cdot \sin(\omega t+\varphi)$$

$$\updownarrow \; C$$

$$\frac{d}{dt} \quad v(t) = -\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t+\varphi) + \omega A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t+\varphi)$$

$$\boxed{E_k(t)} = \frac{1}{2} m \left[v(t)\right]^2 = \boxed{\frac{1}{2} m A_0^2 e^{-2\beta t}\left[\beta^2 \sin^2(\omega t+\varphi) + \omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) - 2\beta\omega \sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)\right]}$$

$$E_{p_{max}} = \frac{1}{2} D A^2(t) \Rightarrow \frac{1}{2} D A_0^2 \cdot e^{-2\beta t}$$ ← de ez a maximális potenciális energia lenne

$$\left(A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}\right)$$

$$\boxed{E_p(t)} = \frac{1}{2} D x^2(t) = \boxed{\frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\beta t} \sin^2(\omega t+\varphi)}$$

→ energiák periódusidőre vett átlaga integrálással kaphatók meg

Kényszerrezgés jelensége

- folyadékos csillapítás → rezgőmozgás amplitúdója csökken

→ akkor, hogy $A(t) = \text{áll}$ legyen, periodikus erővel kell hatni a rendszerre, ami a súrlódásból (közegellenállásból) fakadó erőt kompenzálja

→ ekkor a mozgásegyenlet: $\boxed{m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x} + F_0 \sin(\underset{\uparrow}{\omega} t)}$ gerjesztő erő körfrekvenciája

↙ átrendezve: ①

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t}$$

másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$2\beta = \frac{k}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m}, \quad a_0 = \frac{F_0}{m}$$

- kísérlet elvégzése után → tapasztalatok ← ②

→ A rezgés kezdetétől eltelt bizonyos idő után a kényszerrezgés frekvenciája megegyezik a kényszerítő rezgés frekvenciájával.

→ Rögzített „kényszerítő" frekvencia mellett a test állandó amplitúdóval rezeg. A frekvenciát megváltoztatva a rezgés amplitúdója is változik

→ A kényszerítő rezgés és a kényszerrezgés között állandó fáziskülönbség van

- A kísérleti tapasztalatok alapján keressük a mozgást leíró függvényt a következő alakban:

kényszerítő rezgés körfrekvenciája

$$x(t) = \underset{\uparrow}{\boxed{A}} \sin(\boxed{\omega} t - \delta) \leftarrow ③$$

A ω-tól függ

a kényszerítő és kényszerített rezgés fáziskülönbsége

- Elő kell állítani $\boxed{\dot{x}(t)}$, $\boxed{\ddot{x}(t)}$ függvényeket, majd a mozgásegyenletbe helyettesítéssel kell megkeresni a megoldást ← ④

$$x(t) = A\sin(\omega t - \delta) = A\sin(\omega t)\cos\delta - A\cos(\omega t)\cdot\sin\delta \quad (\leftarrow \cdot\, \omega_0^2)$$

$$\frac{d}{dt}\ \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t)\cdot\cos\delta + A\omega\sin(\omega t)\cdot\sin\delta \quad (\leftarrow \cdot\, 2\beta)$$

$$\frac{d}{dt}\ \ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)\cdot\cos\delta + A\omega^2\cos(\omega t)\cdot\sin\delta$$

⑤ A kapott függvényeket kell behelyettesíteni; így rendezés után kapjuk: ∀ pillanatban!

$$\underset{\uparrow}{\boxed{A}} \sin(\omega t)\underbrace{\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + 2\beta\omega\sin\delta\right]}_{a_0} + A\cos(\omega t)\underbrace{\left[-(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta + 2\beta\omega\cos\delta\right]}_{\overset{!!!}{0}} \boxed{=} a_0\sin(\omega t)$$

ezt vizsgálva

0-val kell egyenlőnek lennie

$$\Rightarrow (1)\ A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta + 2\beta\omega\sin\delta\right] = a_0$$

és

$$(2)\ A\left[-(\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta + 2\beta\omega\cos\delta\right] = 0$$

ezt a két egyenletet kapjuk

$$\boxed{(1)^2+(2)^2} \Rightarrow A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2\cos^2\delta + 4\beta^2\omega^2\sin^2\delta + \cancel{2(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta\cdot 2\beta\omega\sin\delta}\right] +$$

$$+A^2\left[(\omega_0-\omega)^2\sin^2\delta + 4\beta^2\omega^2\cos^2\delta - \cancel{2(\omega_0^2-\omega^2)\cos\delta\, 2\beta\omega\sin\delta}\right] = a_0^2$$

$$A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = a_0^2$$

⑥ → ↳ $$\boxed{A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}} = A(\omega)$$

(2) → meghatározható a fáziskülönbség

⑦ → $$\boxed{\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

↑

$$2\beta\omega\cos\delta = (\omega_0^2-\omega^2)\sin\delta$$

$x(t) = A\sin(\omega t-\delta)$ egyenletet $\boxed{A(\omega)}$ és $\boxed{\delta = \operatorname{arctg}(\dots)}$ elégíti ki

↳ ennek megkaptuk egy partikuláris megoldását

→ Ahhoz, hogy a teljes megoldást megkapjuk, a homogén egyenlet általános megoldásához hozzá kell adni az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$\underset{\text{homogén}}{\boxed{x}} + \underset{\text{inhomogén}}{\boxed{y_0}}$ adja a megoldást

→ Így szükségünk van az előbb megoldott differenciálegyenlet (folyadékos csill.) általános megoldására is

⑧

$$\Rightarrow \text{felírható: } \boxed{x_{\text{ált}} = A_0 \underbrace{e^{-\beta t}}_{\text{ez lecseng}} \sin(\underbrace{\omega_{cs}}_{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} t+\varphi) + \underbrace{A\sin(\omega t-\delta)}_{\text{bizonyos idő múlva már csak ez számít}}}$$

Amplitúdórezonancia

$A(\omega)$ vizsgálata → hol lesz maximum?

$$A(\omega)=\frac{a_0}{\boxed{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

$f(\omega)$

ezt kell vizsgálni

$$f(\omega)=\left(\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}\right)^2\rightarrow\boxed{f(\omega)=(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}$$

$\uparrow^2$ nem változtatja a monotonitást

Ahol $f(\omega)$-nak minimuma van, ott lesz $A(\omega)$-nak maximuma

$f'(\omega)=0$ → itt lesznek szélsőértékek

$$f'(\omega)=2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot(-2\omega)+8\beta^2\omega=0$$

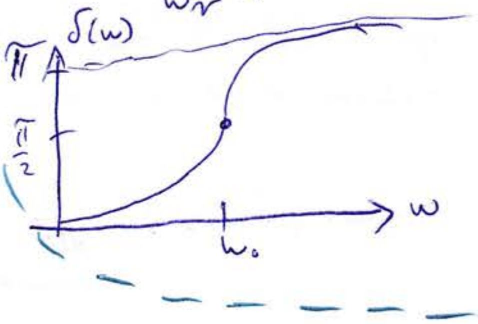
$$-\cancel{4}\omega_0^2\cancel{\omega}+\cancel{4}\omega^{\cancel{3}\,2}+\overset{2}{\cancel{8}}\beta^2\cancel{\omega}=0$$

$$-\omega_0^2+\omega^2+2\beta^2=0\rightarrow\boxed{\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta}<\omega_0}$$

Ezt felhasználva $A(\omega)_{max}$ megadható → $\boxed{A_{max}=\frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$

→ Látható, hogy $A_{max}\xrightarrow[0]{\sqrt{}}\infty$, tehát $\omega_0^2=\beta^2$

$\boxed{\omega_0=\beta}$



Sebességrezonancia

$$v_{max}(\omega)=A\cdot\omega=\frac{a_0\cdot\omega}{\boxed{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

itt ezt kell vizsgálni

⊕

$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2\Rightarrow$

$E_p=\frac{1}{2}Dx^2\Rightarrow$

} ha beírjuk ide a megfelelő alakokat, megkapjuk az energiákat

Impulzus és impulzusmomentum tétel pontrendszerre

11. tétel

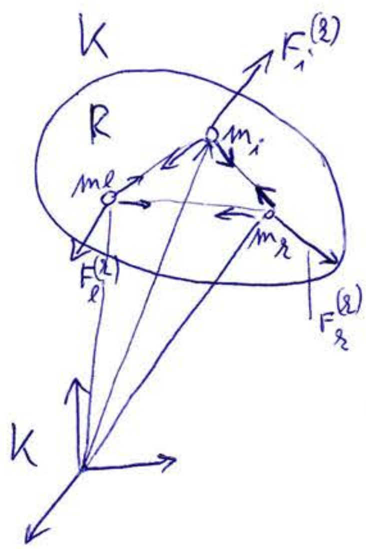
Pontrendszer fogalma

- pontszerű testek ⟶ kiterjedt testek (diszkrét pontokból állnak)

  ↓ fogalmak általánosítása

- a pontrendszer két eleme között ható erő mindig centrális
- pontrendszer tagjain belül → belső erők → R (rendszer)

  kívül → külső erők → K (környezet)



$\boxed{F_{ik} = -F_{ki}}$ belső erők - 2 index

i: az a pont, amelyre az erő hat

k: az a pont, ami az erőt kifejti

$\boxed{F_i^{(k)}}$ külső erők

(k): így jelöljük

Erők osztályozása

1) Definíció → pl. $\underline{F} = \frac{dI}{dt}$ $[F] = N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$

2) Támadáspont → az a pont, ahol az erőhatás a testet éri

3) Hatásvonal → az erővektor egyenese

4) csoportosítás

→ „hovatartozás" szerint → belső / külső } erő

külső ← a rendszerhez nem tartozó testek fejtik ki

→ támadáspont szerint → pontbeli, vonalmenti, felületi, ↓ térfogati

→ munkavégzés szempontjából → konzervatív: $\oint_g \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = 0$

→ disszipatív: $\neq 0$

⇝ az erőtörvény teljessége szerint

→ (szabad erő): van erőtörvény

→ (kényszererő): nincs erőtörvény, vagy csak (vagyon) hiányos

A pontrendszer impulzusa

- írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$\underline{F}_1^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{1j} = m_1 \ddot{\underline{r}}_1$$

$$\underline{F}_2^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{2j} = m_2 \ddot{\underline{r}}_2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j} \underline{F}_{ij} = m_i \ddot{\underline{r}}_i} \leftarrow \text{i-edik} \quad i \in \mathbb{N}$$

futó index

$$\vdots$$

$$\underline{F}_n^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{nj} = m_n \ddot{\underline{r}}_n$$

- adjuk össze ezeket az egyenleteket, tehát összegezzünk i-re is

$$\sum_i \underline{F}_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{i,j} \underline{F}_{ij}}_{\text{Newton III. tv-e értelmében} \to 0} = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i$$

- $$\boxed{\sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \underline{v}_i} \leftarrow \text{dinamika alaptörvénye pontrendszerre}$$

$$\boxed{\underline{I} = \sum_i m_i \underline{v}_i} \leftarrow \text{pontrendszer összimpulzusa}$$

A pontrendszerre ható külső erők eredője megegyezik a rendszer összimpulzusának időderiváltjával

$$\boxed{\underline{F}_e^{(k)} = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \frac{d\underline{I}}{dt}} \leftarrow \text{impulzustétel}$$

A tömegközéppont

- Lehet-e helyettesíteni a pontrendszert egyetlen pont mozgásával?
  ↳ ekkor a pontrendszer összimpulzusát egyetlen ponthoz kell rendelni

↳ ebben a pontban $\sum_i m_i = M$ a tömeg

- tömegközéppont jellemzői

↳ $\boxed{\underline{I} = M \frac{\sum_i m_i \underline{v}_i}{\sum_i m_i}}$

↳ $\underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underline{v}_0 = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum m_i}$

↳ $\sum_i \underline{F}_i^{(k)} = M_t \cdot \ddot{\underline{r}}_0 \quad (\underline{F} = m \cdot \underline{a})$

$\sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \frac{d \underline{I}_0}{dt} \quad (\underline{F} = \dot{\underline{I}})$

ezek az egyenletek nem adnak számot az egyes pontok mozgásáról és a rendszer belső változásairól

↳ $\boxed{\underline{r}_0 = \underline{r}_{tkp} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i}} \qquad \underline{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

↖ rendszer tömegközéppontja

Tömegközéppont tétele

Bármely pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer össztömege lenne benne egyesítve és rá a rendszerre ható külső erők eredője hatna:

$$\boxed{\underline{F}_e^{(k)} = M \underline{a}_{tkp} = M \ddot{\underline{r}}_{tkp}}$$

(ez egyenértékű az impulzustétel pontrendszerre megfogalmazott alakjával)

A tömegközéppont nevezetes tulajdonságai

→ ha a külső erők eredője zérus

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = 0 \quad \text{és} \quad \underline{a}_{tkp} = \ddot{\underline{r}}_{tkp} = 0$$

egyenes vonalú egyenletes mozgás

⇒ $\underline{I}$ = állandó és $\underline{v}_{tkp}$ = állandó → nyugalom

→ ha a rendszerre nem hatnak külső erők, akkor ezt zárt rendszernek nevezzük

! megjegyzés: gyakran akkor is zárt rendszerről beszélünk, ha az erők eredője zérus ---→ tkp megmaradása

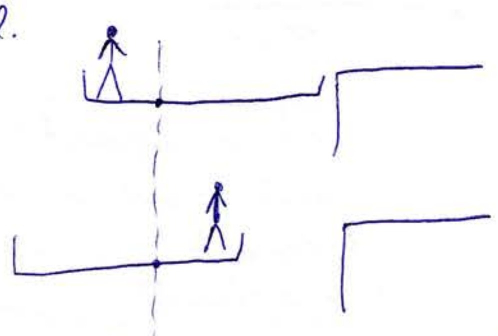
Tömegközéppont megmaradásának tétele:

$$\boxed{\text{Zárt rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van.}}$$

⇕ egyenértékű

Zárt rendszer összimpulzusa állandó

pl.



Pontrendszerre vonatkozó impulzusmomentum-tétel (perdülettétel)

- Írjuk fel az előbbi egyenleteket, de balról szorozzuk meg mindegyiket vektoriálisan $\underline{r}_i \times$-el:

$$\underline{r}_1 \times \underline{F}_1^{(k)} + \underline{r}_1 \times \sum_j \underline{F}_{1j} = \underline{r}_1 \times m_1 \ddot{\underline{r}}_1$$

$$\vdots$$

$$\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} + \underline{r}_i \times \sum_j \underline{F}_{ij} = \underbrace{\overbrace{\underline{r}_i \times m_i \ddot{\underline{r}}_i}^{\frac{d}{dt}(\underline{r}_i \times \underline{I}_i)\,!}}_{} \leftarrow i\text{-edik}$$

$$\vdots$$

$$\sum \quad \underline{r}_n \times \underline{F}_n^{(k)} + \underline{r}_{(n)} \times \sum_j \underline{F}_{nj} = \underline{r}_n \times m_n \ddot{\underline{r}}_n$$

$$\underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)}}_{\substack{\text{külső erők}\\ \text{forgatónyomatéka}}} + \underbrace{\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}}_{\substack{\text{belső erők}\\ \text{forgatónyomatéka}}} = \frac{d}{dt} \overbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{I}}^{\underline{N}}$$

- vizsgáljuk a belső erők forgatónyomatékát:
  → mindegyik párban erő-ellenerő forgatónyomatéka szerepel:

$$\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} + \underline{r}_j \times F_{ji} \underset{F_{ij} = -F_{ji}}{=} r_i \times \underline{F}_{ij} - r_j \times F_{ij} = (\underline{r}_i - \underline{r}_j)\,\underline{F}_{ij} = 0$$

$$\boxed{(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \parallel \underline{F}_{ij}}$$

a pontrendszer két belső pontja között centrális erő hat ⟷ minden belső pontot összekötő vektor ∥ a két pont között ható erővel így egyszerűsödik az egyenlet:

$$\underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)}}_{\underline{M}_e^{(k)}} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \underline{r}_i \times \underline{I}_i}_{\underline{N}}$$

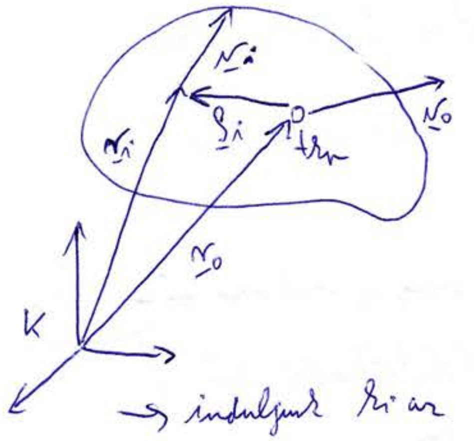
pontrendszerre vonatkozó impulzusmomentum-tétel *

$$\boxed{\underline{M}_e^{(k)} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)}} \qquad \boxed{\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{I}_i} \qquad \boxed{\underline{M}_e^{(k)} = \frac{d\underline{N}}{dt}}$$

↑ a rendszer összimpulzusmomentuma

* Pontrendszer össz-impulzusmomentumának idüderiváltja megegyezik a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak vektori összegével.

Pálya- és saját-impulzusmomentum (tömegközépponti koordinátarendszerben)



$$\dot{\underline{r}}_i = \underline{v}_i$$

$$\dot{\underline{\varrho}}_i = \underline{\varepsilon}_i$$

az ábráról: $\boxed{\underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i}$

$\boxed{\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \underline{\varepsilon}_i}$

→ induljunk ki az impulzusmomentum definíciójából: $\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i$

→ helyettesítsünk be $\underline{r}_i$-t és $\underline{v}_i$-t, így:

$$\boxed{\underline{N} = \sum_i (\underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i) \times m_i (\underline{v}_0 + \underline{\varepsilon}_i)}$$ ← el kell végezni a szorzást

$$\underline{N} = \sum_i \underline{r}_0 \times \underline{v}_0 \cdot m_i + \sum_i \underline{r}_0 \times m_i \underline{\varepsilon}_i + \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i \underline{v}_0 + \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{\varepsilon}_i m_i$$

$$\underline{N} = \underline{r}_0 \times \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \underline{v}_0 + \underline{r}_0 \times \underbrace{\sum_i m_i \underline{\varepsilon}_i}_{0} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \underline{\varrho}_i\right)}_{0} \times \underline{v}_0 + \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{\varepsilon}_i m_i$$

A tömegközéppont definíciójából következik, hogy a tömegközépponttal mozgó és a tömegközéppont origójú koordinátarendszerben ezek a mennyiségek 0-k.

$$\boxed{\underline{N} = \underbrace{\underline{r}_0 \times M \underline{v}_0}_{\underline{N}_p} + \underbrace{\sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i \underline{\varepsilon}_i}_{\underline{N}_s}}$$

$(\underline{N}_p = \underline{r}_{tkp} \times M \underline{v}_{tkp})$

- Pálya - impulzusmomentum tétel

$$\frac{d\underline{N}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}_0 \times M\underline{v}_0\right) = \underbrace{\dot{\underline{r}}_0 \times M\underline{v}_0}_{0} + \underline{r}_0 \times M\dot{\underline{v}}_0 = \underline{r}_0 \times M\underline{a}_0 = \underline{F}_e^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\underline{N}_r}{dt} = \underline{r}_{tkp} \times \underline{F}_e^{(k)}}$$

- Saját - impulzusmomentum tétel

az első tag itt is 0

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i\left(\underline{\varrho}_i \times m_i\underline{\xi}_i\right) = \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underbrace{\frac{d(m_i\underline{\xi}_i)}{dt}}$$

$$\Big(\underbrace{\sum_i \overset{\underline{\xi}_i}{\dot{\underline{\varrho}}_i} \times m_i\underline{\xi}_i}_{0} + \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i\dot{\underline{\xi}}_i\Big)$$

ez kifejezhető az i-edik pontra ható erőkkel

Fontos megjegyzés! - A tömegközépponthoz rögzített koordinátarendszer nem inerciarendszer!

$$\frac{d(m_i\underline{\xi}_i)}{dt} = \underline{F}_i + \underline{F}_i^{(t)}$$

ha a_0 gyorsulással mozog a rendszer $= -m_i\underline{a}_0$

i-edik pontra ható tehetetlenségi erő

i-edik pontra ható kölcsönhatás eredője

ha ezt most beírjuk $\frac{d\underline{N}_s}{dt}$-be:

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = -\Big(\underbrace{\sum_i m_i\underline{\varrho}_i}_{0}\Big) \times \underline{a}_0 + \underbrace{\sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i}$$

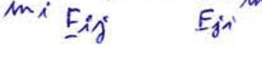
(tkp-i koordinátarendszer)

egyes tömegpontokra ható erők forgatónyomatékainak összege

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_i \underbrace{\underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i^{(k)}}_{\underline{M}_i} = \sum_i \underline{M}_i}$$

külső!

Az impulzusmomentum-tétel bizonyításakor használt érvelés miatt a belső erők forgatónyomatékainak összege zérus! ← $(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \,||\, \underline{F}_{ij}$ vagy $\underline{F}_{ji}$

↳ a belső erők:


$\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$, hatásvonaluk megegyezik, és minden esetben centrálisak ⟺ $(M = 0)$

Zárt rendszerre vonatkozó tételek

- zárt rendszer

$$\rightsquigarrow \text{ ha } \sum_i \underline{F}_i^{(k)} = 0$$ nem hatnak külső erők

$$\rightsquigarrow \text{ gyakran ez is } \sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \underline{F}_e^{(k)} = 0$$ külső erők eredője 0

- tömegközéppont és impulzus megmaradása

$$\underline{F}_e^{(k)} = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \frac{d\underline{I}}{dt} \overset{!}{=} 0 \implies \underline{I} = \text{áll}$$

$$\underline{F}_e^{(k)} = M \cdot \underline{a}_{tkp} = M \cdot \ddot{\underline{r}}_{tkp} \overset{!}{=} 0 \implies \underline{v} = \text{áll}$$

- impulzusmomentum-megmaradás tétele

$$\underline{M}^{(k)} = 0 \rightarrow \frac{d\underline{N}}{dt} = 0 \implies \underline{N} = \text{áll}$$

- mechanikai energiamegmaradás tétele $\rightsquigarrow$ később

$$E_k + \sum_i \Big(\underbrace{E_{p,i}^{(k)}}_{\text{0, ha zárt rendszer}} + E_{p,i}^{(b)} \Big) = \text{áll}$$

Forgózsámolyos kísérlet

Munkatétel pontrendszerre

12. tétel

Pontrendszer kinetikus energiája és felbontása, és munkatétel pontrendszerre

- kiinduló egyenlet : $\underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{ij} = m \ddot{\underline{r}}_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$
- kicsiny elmozdulás : $\boxed{\Delta \underline{r}_i}$ ezzel szorozzuk be a fenti egyenletet:

$$\underline{F}_i^{(k)} \cdot \Delta \underline{r}_i + \sum_j \underline{F}_{ij} \cdot \Delta \underline{r}_i = m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \Delta \underline{r}_i$$

→ vizsgáljuk először a jobb oldali tagot: $m_i \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{d\dot{\underline{r}}}{dt}}}{\ddot{\underline{r}}_i} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{\underline{r}} \cdot \Delta t}}{\underbrace{\Delta \underline{r}_i}} = m_i \frac{d\dot{\underline{r}}}{dt} \cdot \dot{\underline{r}} \cdot \Delta t =$

$$= m_i \boxed{\frac{d\underline{v}}{dt}} \cdot \underline{v} \boxed{\Delta t}$$

használjuk fel, hogy:

$$\underline{\Delta \left(\frac{1}{2} m \underline{v}^2 \right)} = \frac{1}{2} m \left[(\underline{v} + \Delta \underline{v})^2 - \underline{v}^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[\cancel{\underline{v}^2} + 2 \underline{v} \Delta \underline{v} + \underset{\approx 0}{\cancel{\Delta \underline{v}^2}} - \cancel{\underline{v}^2} \right] = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2} \underline{v} \Delta \underline{v}$$

$$= \boxed{m \underline{v} \cdot \Delta \underline{v}} = m \dot{\underline{r}} \cdot \Delta \dot{\underline{r}}$$

$$\left(m_i \ddot{\underline{r}}_i \Delta \underline{r}_i = m_i \frac{d\dot{\underline{r}}}{\cancel{dt}} \cdot \dot{\underline{r}} \cdot \overset{\cancel{dt}}{\underset{\sim}{\Delta t}} = m_i \, d\dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = m_i \dot{\underline{r}} \cdot \Delta \dot{\underline{r}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \left(\frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 \right) = m \ddot{\underline{r}}_i \cdot \Delta \underline{r}_i}$$

→ vizsgáljuk most a bal oldali tagokat:

$\sim \underline{F}_i^{(k)} \cdot \Delta \underline{r}_i = \delta W_i^{(k)}$ ← külső
$\sim \sum_j \underline{F}_{ij} \Delta \underline{r}_i = \delta W_i^{(b)}$ ← belső
} erők elemi munkája

→ összeadva:

$$\delta W_i^{(k)} + \delta W_i^{(b)} = \Delta \left(\frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 \right)$$

$$\boxed{\sum_i \delta W_i^{(k)}} \overset{*}{+} \boxed{\sum_i \delta W_i^{(b)}} = \Delta \left(\sum_i \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}}_i^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{kinetikus} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i^2}$$

(zárt rendszer $W^{(k)} = 0 \quad W^{(b)} = \Delta E_k$)

véges pályaszakaszon történő elmozdulás:

$$* \quad W^{(k)} = \int_g \underline{F}^{(k)}(\underline{r}) \, d\underline{r}$$

$$W^{(b)} = \int_g \underline{F}^{(b)}(\underline{r}) \, d\underline{r}$$

$$\hookrightarrow \boxed{W^{(k)} + W^{(b)} = \Delta E_k}$$

munkatétel (tömör)

úgy is lehet, hogy:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m \underline{v}_i^2 \right) \cdot \Delta t = \dot{E}_k \cdot \Delta t \quad \rightarrow$$

$$\Gamma\ m_i\ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \underline{F}_i^{(b)} \qquad \Big/ \cdot \underline{v}_i \cdot \Delta t \cdot = \Delta \underline{r}_i$$

$$\underbrace{m_i \dot{\underline{v}}_i}_{\frac{d}{dt}(m_i \underline{v}_i)}$$

deriválás miatt

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\tfrac{1}{2}} m_i \underline{v}_i^2\right)\cdot\Delta t = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} \cdot \Delta \underline{r}_i + \sum_i \underline{F}_i^{(b)} \Delta \underline{r}_i$$

$$\hookrightarrow \boxed{E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\dot{E}\cdot\Delta t = \Delta W^{(k)} + \Delta W^{(b)}} \quad \Big\rfloor$$

$$\boxed{\Delta E_{kin} = E_k(2) - E_k(1) = \Delta W^{(k)}(1\to2) + \Delta W^{(b)}(1\to2)} \quad \left(\oplus\ \dot{E}_k = P\right)$$

Munkatétel: A külső és a belső erők által a rendszeren végzett összes munka a pontrendszer mozgási energiájának megváltozásával egyenlők

Zárt rendszerre vonatkozó munkatétel

$$F_i^{(k)} = 0 \quad , \text{ tehát } \boxed{\Delta E_k = W^{(b)}}$$

A rendszer mozgási energiájának megváltozása a belső erők munkájának következménye

Mechanikai energiamegmaradás tétele pontrendszerre

Ha az erő konzervatív, akkor a munkavégzés nem függ az útvonaltól, csak a végponttól. $\left(\oint \underline{F}(r)\, d\underline{r} = 0\right)$

$\rightsquigarrow E_{p,i}^{(k)} \leftarrow$ ez a $^{(g)}$ külső erőkhöz rendelt potenciálfüggvény

$\rightsquigarrow E_{p,i}^{(b)} \leftarrow$ —"— belső —"—

figyelni kell az előjelekre

Kifejezhető:

$$\oplus\begin{cases} W^{(k)} = \int_{①}^{②} \underline{F}^{(k)}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = -\sum_i \Delta E_{p,i}^{(k)} = \ominus \sum_i \left[E_{p,i}^{(k)}(2) - E_{p,i}^{(k)}(1)\right] \\ W^{(b)} = \int_{①}^{②} \underline{F}^{(b)}(\underline{r})\, d\underline{r} = -\sum_i \Delta E_{p,i}^{(b)} = -\sum_i \left[E_{p,i}^{(b)}(2) - E_{p,i}^{(b)}(1)\right] \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{-\sum_i \Delta E_{p,i}^{(k)} - \sum_i \Delta E_{p,i}^{(b)} = \Delta E_k = E_k(2) - E_k(1)}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\sum_i\left(E_{p,i}^{(k)}(2) + E_{p,i}^{(b)}(2)\right) + E_k(2) \underset{2.}{=} \sum_i\left(E_{p,i}^{(k)}(1) + E_{p,i}^{(b)}(1)\right) + E_k(1)}$$

Potenciális erők hatására mozgó rendszerben a külső erőkhöz rendelt potenciális energia, a belső energia és a mozgási energia összege állandó:

$$\boxed{E_k + \sum_i \left(E_{p,i}^{(k)} + E_{p,i}^{(b)} \right) = \text{állandó}}$$ ← energiatétel pontrendszerre

Ha zárt a rendszer, tehát $\left(\sum_i\right) F_i^{(k)} = 0$, akkor

$$\boxed{E_k + \sum_i E_{p,i}^{(b)} = \text{állandó}}$$

ütközések (← pontrendszerekre vonatkozó tételek)

→ általában: ha két test között úgy lép fel mechanikai kölcsönhatás, hogy az egyéb erőhatások elhanyagolhatók

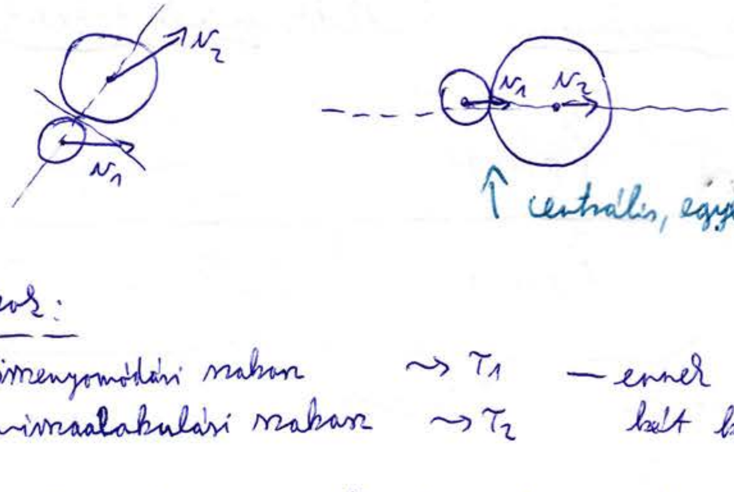
→ új fogalmak:

~ két test egy közös pontban érintkezik, és e pontban a két testhez húzható érintősík → ennek a síknak a normálvektora
↳ ütközési normális

→ centrális ütközés, ha az ütközési normális egyenese átmegy mindkettő test tömegközéppontján

→ egyenes ütközés, ha az ütköző testek sebességvektora az ütközési normális egyenesébe esik

pl.

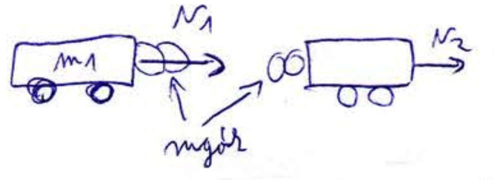


↑ centrális, egyenes ütközés

→ szakaszok:

~ összenyomódási szakasz ⇝ τ_1 — ennek a végén együtt mozog a két test, sebességük c
~ visszaalakulási szakasz ⇝ τ_2

fontos megjegyzés: az ütközés során a rendszer zárt, ezért c megegyezik a tömegközéppont sebességével --→ ütközések során célszerű tömegközépponti koordinátákat használni



zárt rendszer $c = áll = v_{tkp}$

Δv megadása

① → jelöljük: rendszerhez viszonyított ütközés előtti $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = v_1 - c \quad (\to v_1 = \varepsilon_1 + c) \\ \varepsilon_2 = v_2 - c \quad (\to v_2 = \varepsilon_2 + c) \end{array} \right.$

ütközés után $\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = u_1 - c \\ \delta_2 = u_2 - c \end{array} \right.$

felhasználjuk az erőlökés definícióját:

$\left(\underline{F} = \frac{dJ}{dt} \rightsquigarrow \int F\,dt = \Delta J \right)$

② $$\boxed{\int F(t)\,dt = \Delta J = m\,\Delta v}$$

írjuk fel mindkettő szakaszra

~ első:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\tau_1} F(t)\,dt = m_1 \overbrace{(c - v_1)}^{\Delta v} = -m_1 \varepsilon_1 \\ ! \ \ominus \displaystyle\int_0^{\tau_1} F(t)\,dt = m_2 (c - v_2) = -m_2 \varepsilon_2 \end{array}\right\} ③$$

a kocsik által egymásra kifejtett erők erő-ellenerő párt alkotnak

~ második:

a végén a sebesség, ami c-ről változott meg

$(\Delta v = v_2 - v_1)$ ezt alkalmazzuk

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\tau_2} F(t)\,dt = m_1 (u_1 - c) = m_1 \delta_1 \\ ! \ \ominus \displaystyle\int_0^{\tau_2} F(t)\,dt = m_2 (u_2 - c) = m_2 \delta_2 \end{array}\right\} ④$$

Egy ütközés annál inkább rugalmasnak tekinthető, minél tökéletesebb a deformáció visszaalakulása

⇒ ütközési szám: ⑤ $$\boxed{k = \frac{\int_0^{\tau_2} F(t)\,dt}{\int_0^{\tau_1} F(t)\,dt} = \boxed{\frac{u_1 - c}{c - v_1} = \frac{u_2 - c}{c - v_2}}}$$

→ felhasználva kifejezhetők a sebességek:

$$⑥ \left\{ \begin{array}{l} u_1 = (k+1)\,c - k v_1 \\ u_2 = (k+1)\,c - k v_2 \\ c = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \end{array} \right.$$

A centrális, egyenes ütközések energiaviszonyainak vizsgálata

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[u_1^2 - v_1^2\right] + \frac{1}{2} m_2 \left[u_2^2 - v_2^2\right]$$

① előzőleg bevezetett sebességek a tömegközépponti rendszerben viszonyítva:

$c = \varepsilon_1 - v_1 \leftarrow \varepsilon_1 = c - v_1$

$c = \varepsilon_2 - v_2 \leftarrow \varepsilon_2 = c - v_2$

$\delta_1 = u_1 - c \rightarrow c = u_1 - \delta_1$

$\delta_2 = u_2 - c \rightarrow c = u_2 - \delta_2$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow v_1 = \varepsilon_1 + c \qquad \Rightarrow u_1 = \delta_1 + c \\ &\Rightarrow v_2 = \varepsilon_2 + c \qquad \Rightarrow u_2 = \delta_2 + c \end{aligned}} \leftarrow ②$$

ezeket kell behelyettesíteni

③

$$\rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} m_1 (\delta_1 + c)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\delta_2 + c)^2 - \frac{1}{2} m_1 (\varepsilon_1 + c)^2 - \frac{1}{2} m_2 (\varepsilon_2 + c)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[\delta_1^2 + 2\delta_1 c + \cancel{c^2} - \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 c - \cancel{c^2}\right] + \frac{1}{2} m_2 \left[\delta_2^2 + 2\delta_2 c + \cancel{c^2} - (\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 c + \cancel{c^2})\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \delta_2^2 - \frac{1}{2} m_1 \varepsilon_1^2 - \frac{1}{2} m_2 \varepsilon_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 \cancel{2} \delta_1 c + \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \cancel{2} \delta_2 c -$$

$$- \cancel{\tfrac{1}{2}} m_1 \cancel{2} \varepsilon_1 c - \cancel{\tfrac{1}{2}} m_2 \cancel{2} \varepsilon_2 c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 \delta_1^2 + m_2 \delta_2^2\right) + c\left(\overbrace{m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2}^{0}\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 \varepsilon_1^2 + m_2 \varepsilon_2^2\right) - c\left(\overbrace{m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2}^{0}\right) =$$

④ $\rightarrow m_1 \varepsilon_1 + m_2 \varepsilon_2 = m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2 \overset{!}{=} 0 \leftarrow$ azért 0, mert mindkettőt a tkp-hez viszonyítva írtuk fel, amiről pedig tudjuk, hogy c = áll

tkp-hez viszonyított

kezdeti — folyamat utáni

sebességek

⑤ $\rightarrow \delta_1^2 = k^2 \varepsilon_1^2$ ← ütközési szám

$\delta_2^2 = k^2 \varepsilon_2^2$

ütközés utáni sebesség

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 k^2 \cdot \varepsilon_1^2 + m_2 k^2 \cdot \varepsilon_2^2 - \left(m_1 \varepsilon_1^2 + m_2 \varepsilon_2^2\right)\right] =$$

$$\boxed{\Delta E_k = \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_1 \varepsilon_1^2 + m_2 \varepsilon_2^2\right)}_{E_k^{tkp}}\left(k^2 - 1\right)}$$

→ ebből leolvasható

⑥
- $k = 1 \rightarrow \Delta E_k = 0 \rightarrow$ tökéletesen rugalmas
- $k = 0 \rightarrow \Delta E_k = \max \rightarrow$ tökéletesen rugalmatlan

('–' előjel → energiaveszteség)

$$E_k^{tkp} = \frac{1}{2}\left(m_1 \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2\right) \leftarrow$$ az ütközés előtti állapot

az ütköző testek mozgási energiájának összege lesz a tömegközéppont kinetikus energiája, mert a rendszer zárt, és érvényes a mechanikai energia-megmaradás

↓ így a tömegközéppontra felírva:

$$\Delta E_k = \left(k^2-1\right) E_k^{tkp}$$

$k=1$ ↙ E megmarad

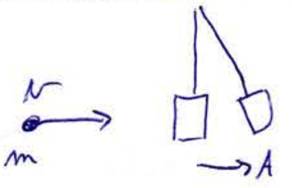
↘ $k=0$ E teljesen elveszik

→ az előző oldal alján levő kifejezés átalakítható

$$\xi_1 = v_1 - c \qquad \text{és} \qquad m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0$$
$$\xi_2 = v_2 - c$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_k = \frac{1}{2}\left(k^2-1\right)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1-v_2\right)^2}$$

Ballisztikus inga → lövedék sebességét lehet mérni



→ bifilárisan felfüggesztett ingatest:

→ inga fonálingának tekinthető

~ inga lengésideje mérhető külön $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

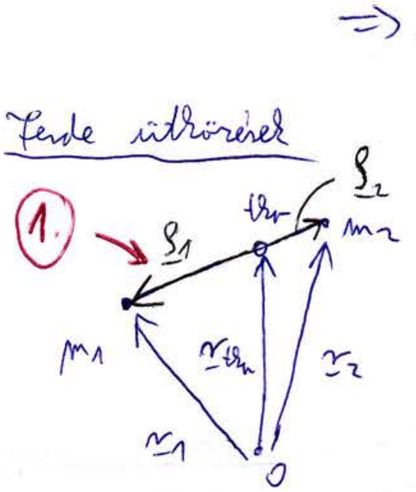
~ A-t tudjuk mérni a kísérlet során

↳ ismeretes $v_{max} = A\omega = A\,\frac{2\pi}{T}$

~ tökéletesen rugalmatlan ütközés $\rightarrow mv = (m+M)\,v_{max}$

$$\Rightarrow v = \left(1+\frac{M}{m}\right) A\,\frac{2\pi}{T}$$

Ferde ütközések



tömegközépponti rendszerben a testek helyvektorai:

③ ↗ $$\underline{\varrho}_1 = \boxed{\frac{m_2}{m_1+m_2}} \cdot \left(\underline{r}_1-\underline{r}_2\right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{\underline{\varrho}}_1 = \underline{\xi}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\underline{v}_1-\underline{v}_2\right)$$

↖ ez adja, hogy milyen hosszú a vektor

③ ↘ ④ $$\underline{\varrho}_2 = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\left(\underline{r}_1-\underline{r}_2\right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{\underline{\varrho}}_2 = \underline{\xi}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\underline{v}_1-\underline{v}_2\right)$$

tömegközéppont sebessége: $\underline{c} = \frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\underline{u}_1 + m_2\underline{u}_2}{m_1+m_2}$

② ↗

ezek után felírható:

(5.)

$$\underline{J}_1 = m_1 \underline{\xi}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

$$\underline{J}_2 = m_2 \underline{\xi}_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

bevezethetjük

$$\underline{J}_1^* = m_1 \underline{\delta}_1$$

$$\underline{J}_2^* = m_2 \underline{\delta}_2$$

mindkettő felírásra teljesül:

$$\Rightarrow \boxed{\underline{J}_1 = -\underline{J}_2}$$

$$\boxed{\underline{J}_1^* = -\underline{J}_2^*}$$

(6.)

→ A tömegközépponti rendszer szimmetrizálja az ütköző testek impulzusát, és ennek következtében az impulzusmegmaradás automatikusan teljesül.

→ tömegközépponti rendszerben a kinetikus energia megmaradását leíró összefüggés:

$$\boxed{\frac{\underline{J}_1^2}{2m_1} + \frac{\underline{J}_2^2}{2m_2} = \frac{\underline{J}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\underline{J}_2^{*2}}{2m_2}}$$

$$|\underline{J}_1| = |\underline{J}_2| = |\underline{J}_1^*| = |\underline{J}_2^*| = |\underline{J}| = |\underline{J}^*|$$

→ a tömegközépponti rendszerből szemlélve az ütköző testek impulzusának csak az iránya változhat meg

→ $\underline{J}_1 = m_1 \underline{c} + \underline{J}$ $\quad \underline{J}_1^* = m_1 \underline{c} + \underline{n} \cdot J$

$\underline{J}_2 = m_2 \underline{c} - \underline{J}$ $\quad \underline{J}_2^* = m_2 \underline{c} - \underline{n} \cdot J$

$\underline{n}$ egységvektor a tömegközépponti rendszerben adja meg a megváltozott impulzus irányát

Többszörös ütközések → biliárdgolyók

7 egyenlő tömegű, azonos hosszúságú fonalra, bifilárisan felfüggesztett golyók

Kísérlet kivitelezése és magyarázata

→ 1 golyót húzunk ki → 1 repül el a túloldalon

2 golyót → 2 repül el

⋮ ⋮

⇒ az ütközés hatása végigfut, ide-oda pattog, mert az ütközés közel tökéletesen rugalmas – (vannak golyók, amik mozognak, a többi áll)

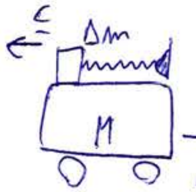
→ kettő vagy több golyót összeragasztunk ← ez a golyó 2m ≥ tömegű és így nem lesz érvényes az, hogy átadja az impulzusát és nyugalomban marad → (az összes golyó mozogni kezd)

Pontrendszerekkel kapcsolatos jelenségek

13. tétel

Rakétamozgás

- szemléltethető pl. lufival
  szénsavpatronos és vízsugárhajtású rakétamodellek

- 

$$\boxed{0 = M \cdot \underbrace{\Delta \underline{v}}_{\underline{v}_1-\underline{v}_0} + \underbrace{\Delta m}_{} \, \underline{c}}$$

$$\left(0 = M(\underline{v}_1-\underline{v}_0) + \left[\underbrace{(M+m)-M}_{M_1-M_0}\right] \underline{c}\right)$$

- rakéta mozgására felírva: (gravitációt elhanyagoltuk)

$$\boxed{\Delta v = -\frac{\Delta m}{m} \cdot c}$$

$$\text{vagy}\left(\Delta v = -\frac{\overbrace{\dot{m}(t) \cdot \Delta t}^{\Delta m}}{m(t)} c\right)$$

$$(m \cdot \Delta v = -\Delta m \cdot c)$$

$$d v = -\frac{dm}{m} \cdot c$$ ← ha integráljuk mindkét oldalt

$$\int_0^t d v = -c \int_0^t \frac{1}{m} \, dm$$

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_{0} = -c \cdot \underbrace{\left[\ln[m(t)] - \ln[m(0)]\right]}_{}$$

$$c\left[+\ln[m(0)] - \ln[m(t)]\right]$$

$$\boxed{v(t) = c \cdot \ln \frac{m(0)}{m(t)}} \quad \nwarrow \ln \frac{m(0)}{m(t)}$$

m(0) – kezdeti tömeg

m(t) – t idő múltán a tömeg

$$v_{max} = c \ln\left(\frac{m_0}{m_h}\right) = c \ln \underbrace{\left(\frac{m_ü + m_h}{m_h}\right)}_{} = c \ln K$$

(legyen v_g → a rakétából kiáramló gáz sebessége a rakéta mozgásához képest)

K ← ez a tömegarány megszabja a maximális sebességet

$$P_1 = m v$$

$$P_2 = (m - dm) \cdot (v + dv) + dm \cdot v_{gi}$$

$$dP = P_2 - P_1 = \cancel{mv} + m dv - v \, dm - \overbrace{\cancel{dm \, dv}}^{\approx 0} + dm \, v_{gi} - \cancel{mv} \overset{!}{=} 0$$

$$dP = dm(\underbrace{v_{gi} - v}_{v_g}) + m \, dv = 0$$

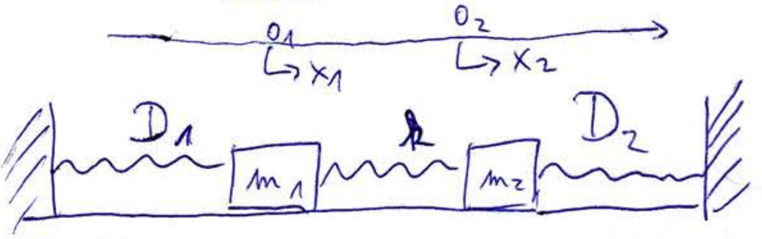
(legyen v_{gi} – a rakétából kiáramló gáz sebessége az inerciarendszerhez képest)

$$\Rightarrow dm \, v_g = -m \, dv$$

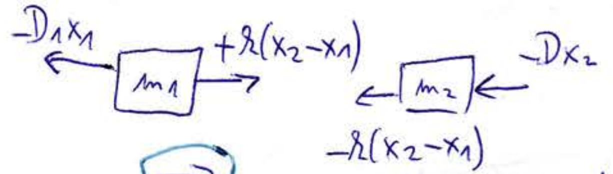
$$\boxed{-\frac{dm}{m} v_g = + dv}$$

Csatolt rezgések

• **bevezetés**: olyankor találkozunk csatolt rezgésekkel, amikor a rendszer tagjai saját egyensúlyi helyzetükből és egymáshoz is harmonikus erővel vannak kötve



(1.)



→ ebben az irányban mozdul el !!

• **tapasztalat**: ← (2.)

→ mindkét test rezgőmozgást végez

→ amikor az egyik test mozgási és potenciális energiájának összege nagy, a másiké kicsi

→ az energia periodikusan cserélődik a két test között

• **mozgásegyenletek**:

(3.)

$$m_1\ddot{x}_1 = -D_1x_1 \oplus k(x_2-x_1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -D_2x_2 \ominus k(x_2-x_1)$$

! !

igazából az a lényeg, hogy az egyik +, a másik pedig −

legyen $D_1=D_2$ és $m_1=m_2$

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + k(x_2-x_1)\\ (2)\ m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - k(x_2-x_1)\end{array}}$$

differenciálegyenlet-rendszer

csatolást $\boxed{\pm k(x_2-x_1)}$ erő hozza létre

! megfelelő új változó bevezetésével a csatolási tag kitranszformálható !

(4.)

$$(1)+(2) \rightarrow \boxed{m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = -D(x_1+x_2)}$$

$$(1)-(2) \rightarrow \boxed{m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)} = \underbrace{-D(x_1-x_2)}_{-Dx_1+Dx_2} + \underbrace{2k(x_2-x_1)}_{-2k(x_1-x_2)} = \boxed{-(D+2k)(x_1-x_2)}$$

új változó bevezetése:

$$u_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$$ ← a két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontjának mozgását adja meg

⑤

$$u_2 = \frac{x_1-x_2}{2}$$ ← ezt beírva a csatoló rugó megnyúlása jelenik meg

így felírhatjuk a két új mozgásegyenletet:

$$m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = -D(x_1+x_2)$$

$$m(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2) = -(D+2k)(x_1-x_2)$$

majd helyettesítés után:

$$\boxed{m\ddot{u}_1 = -Du_1} \quad \text{és} \quad \boxed{m\ddot{u}_2 = -(D+2k)u_2}$$

ezeket a differenciálegyenleteket külön-külön meg lehet oldani

$$\underbrace{\ddot{u}_1 = -\left(\frac{D}{m}\right)u_1 = -\omega_1^2 u_1} \qquad \underbrace{\ddot{u}_2 = -\left(\frac{D+2k}{m}\right)u_2 = -\omega_2^2 u_2}$$

mindkettő harmonikus
⑥ → rezgőmozgást ír le

$$u_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad u_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

vissza kell írni az
eredeti változókra

$$\boxed{x_1 = u_1 + u_2} \qquad \boxed{x_2 = u_1 - u_2}$$

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

⑦

ahol $\boxed{\omega_1^2 = \frac{D}{m}}$ és $\boxed{\omega_2^2 = \frac{D+2k}{m}}$

valamint A_1, A_2 és α_1, α_2 a kezdeti feltételekből határozhatók meg

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} \\ f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} \end{aligned}\right\} \text{normálfrekvencia}$$

ha kitaláljuk kezdeti feltételeket: pl.:

ezeket kellene illeszteni az egyenletekben $\longleftarrow$ $\underbrace{\left\{\begin{matrix} x_1(0)=A & v_1(0)=0 \\ x_2(0)=0 & v_2(0)=0 \end{matrix}\right.}_{⑧}$

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\ x_1(0)=A \rightarrow A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2 = A \\
&(2)\ x_2(0)=0 \rightarrow A_1\sin\alpha_1 - A_2\sin\alpha_2 = 0 \\
&(3)\ \dot{x}_1(0)=0 \rightarrow A_1\omega_1\cos\alpha_1 + A_2\omega_2\cos\alpha_2 = 0 \\
&(4)\ \dot{x}_2(0)=0 \rightarrow A_1\omega_1\cos\alpha_1 - A_2\omega_2\cos\alpha_2 = 0
\end{aligned}\right\}$$ ezeket az egyenleteket kapjuk

$(5) \rightarrow (1)+(2) \rightarrow 2A_1\sin\alpha_1 = A$

$(6) \rightarrow (3)+(4) \rightarrow 2A_1\omega_1\cos\alpha_1 = 0$

$(7) \rightarrow (1)-(2) \rightarrow 2A_2\sin\alpha_2 = A$

$(8) \rightarrow (3)-(4) \rightarrow 2A_2\omega_2\cos\alpha_2 = 0$

$(5)+(6) \rightarrow 2A_1\sin\alpha_1 + 2A_1\omega_1\cos\alpha_1 = A$ $\quad$ $(7)+(8) \rightarrow 2A_2\sin\alpha_2 + 2A_2\omega_2\cos\alpha_2 = A$

$(5)=(7) \rightarrow \cancel{2}A_1\sin\alpha_1 = \cancel{2}A_2\sin\alpha_2$ akkor teljesül, ha $A_1=A_2$ és $\alpha_1=\alpha_2=\alpha=\frac{\pi}{2}$

$(6)=(8) \rightarrow \cancel{2}A_1\omega_1\cos\alpha_1 = \cancel{2}A_2\omega_2\cos\alpha_2 \longrightarrow$ α értékének olyannak kell lennie, hogy a $\cos\alpha=0$ legyen $\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$

$2A_2 = A$ ekkor

$\hookrightarrow \boxed{A_2=\frac{A}{2}=A_1}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A_1=\frac{A}{2} & \alpha_1=\frac{\pi}{2} \\ A_2=\frac{A}{2} & \alpha_2=\frac{\pi}{2} \end{matrix}}$$

$$\left|\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}\right)$$

$\rightarrow \cos+\cos = 2\overset{+}{\cos}\cdot\overset{-}{\cos}$

$\rightarrow \cos-\cos = -2\overset{+}{\sin}\cdot\overset{-}{\sin}$

$\sin+\sin = 2\overset{+}{\sin}\,\overset{-}{\cos}$

$\sin-\sin = 2\overset{-}{\sin}\,\overset{+}{\cos}$

→ most felírhatjuk ezekre a mozgást leíró egyenletet:

$$⑨ \begin{cases} x_1(t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)\right] = A\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\overbrace{\omega_2-\omega_1}^{\Delta\omega}}{2}t\right) \\ x_2(t) = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)\right] = A\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\overbrace{\omega_2-\omega_1}^{\Delta\omega}}{2}t\right) \end{cases}$$

A két test mindegyikének mozgása különböző frekvenciájú rezgőmozgások eredője

→ gyenge csatolás esetén $\boxed{\frac{\kappa}{D} \ll 1}$ ← ⑩

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1^2 = \frac{D}{m} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \\
&\omega_2^2 = \frac{D+2\kappa}{m} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2\kappa}{m}}
\end{aligned}\right\} \omega_2-\omega_1 = \sqrt{\frac{D+2\kappa}{m}} - \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D}{m}}\left(\sqrt{1+\frac{2\kappa}{D}}-1\right) \approx \omega_1\frac{\kappa}{D}$$

$$! \boxed{\Delta\omega \simeq \omega_1\frac{\kappa}{D}} !$$

$\Delta\omega^2 \doteq \omega_2^2-\omega_1^2 =$

$= \frac{D}{m}+\frac{2\kappa}{m}-\frac{D}{m}$

$\omega_1 = \omega_0$ jelöléssel és közelítünk $\boxed{\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1}$

$$x_1(t) \approx \underbrace{\boxed{A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}}_{A_1}\cos(\omega_0 t)$$

ez hasonlít a lebegés jelenségéhez

$$x_2(t) \approx \underbrace{\boxed{A\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}}_{A_2}\sin(\omega_0 t)$$

Csatolt rezgések energetikai jellemzése

→ gyenge csatolás esetén → felfogható úgy, hogy

ilyenkor elhanyagolható a csatoló rugó energiája

⑪
$$\left.\begin{aligned} A_1(t) &= A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \\ A_2(t) &= A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{ felírhatók}$$

rövid idő alatt az amplitúdófüggvények keveset változnak !!

↳ összenergia $E_1(t) \cong \frac{1}{2}DA_1^2(t) = \frac{1}{2}DA^2\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) = E_0\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

$$E_2(t) \cong \frac{1}{2}DA_2^2(t) = \frac{1}{2}DA^2\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) = E_0\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$\boxed{E_0 - \text{összenergia}}$ energiafüggvények → $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ periódusidejűek

→ nem gyenge csatolás esetén (k összemérhető D-vel)

kezdeti mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x}_1 = -D_1x_1 + k(x_2 - x_1) \quad / \cdot \dot{x}_1$$
$$m\ddot{x}_2 = -D_2x_2 - k(x_2 - x_1) \quad / \cdot \dot{x}_2$$

!! ← ⑫

így:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1\cdot\dot{x}_1 &= -D_1x_1\dot{x}_1 + k\dot{x}_1(x_2-x_1) \\ m\ddot{x}_2\dot{x}_2 &= -D_2x_2\dot{x}_2 - k\dot{x}_2(x_2-x_1) \end{aligned}\right] \oplus$$

előtte rendezzük 0-ra mindkettőt!!

⇓

$$\left[m\ddot{x}_1\dot{x}_1 + D_1x_1\dot{x}_1 - k\dot{x}_1(x_2-x_1)\right] + \left[m\ddot{x}_2\dot{x}_2 + D_2x_2\dot{x}_2 + k\dot{x}_2(x_2-x_1)\right] =$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}D_1x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}D_2x_2^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2}\right] = 0$$

a belső ! fv deriváltja majd visszaadja az eredeti alakot

⑬

$$\boxed{V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2}$$

csatolási energia ← !

Normálrezgés, normálmódus

→ megfelelően megválasztott kezdőfeltételek mellett előfordulhat, hogy

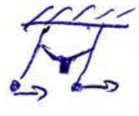
→ (1) $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = f_2$

vagy

→ (2) $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = f_1$

} mindkettő test ugyanazzal a frekvenciával rezeg

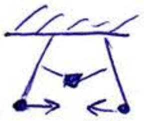
↑ normálrezgés vagy normálmódus



→ (1) esetben

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

} a két test úgy mozog, mintha nem lenne köztük csatolás
(a csatoló rugó hossza változatlan)

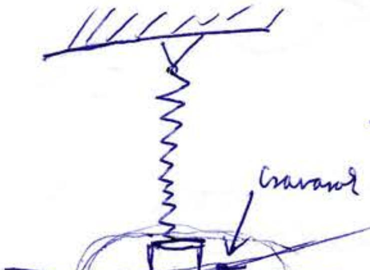


→ (2) esetben

$$x_1(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$x_2(t) = -A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

} $x_2(t) = -x_1(t)$ ⇒ ilyenkor a csatoló rugó hossza változik periodikusan

Wilberforce inga – lazán tekercselt 2-3 cm átmérőjű csavarrugóból és ráakasztott, a rugónál kissé szélesebb hengeres testből áll



- az inga hosszanti és csavarási rezgéseket is végezhet
- különleges tulajdonság: a hosszanti és csavarási rezgések csatolódnak és a két módus között az energia lebegésszerűen cserélődik

↓ kitérítjük, elengedjük, A amplitúdóval rezeg, ami egyre csökken, majd egyszer megáll, de eközben egyre erősebben torziós rezgésbe jön a rugó, amikor A→0, akkor csak ilyen torziós rezgés lesz

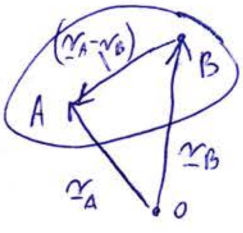
Merev testek kinematikája

14. tétel

Merev test fogalma

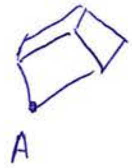
Olyan test, amelyre tetszőleges kölcsönhatás során fennáll, hogy bármely két pontjának távolsága állandó.

$$|\underline{r}_A - \underline{r}_B| = d(A,B)$$



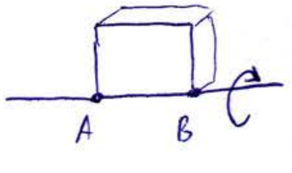
Szabadsági fokok száma

- rögzítsük az A pontot



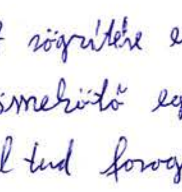
egy pont rögzítése esetén a merev test pontjai gömbfelületen tudnak elmozdulni

- rögzítsük a B pontot is



két pont rögzítése esetén még (A↔B)-t összekötő egyenes, mint tengely körül el tud forogni

- rögzítsünk még egy pontot, ami legyen C



→ ez már egyértelműen meghatározza a merev test helyzetét

mivel térben (dim=3) 3 adat kell

egy pont megadásához és 3 pontot kell meghatároznunk, ez összesen 9 adatot jelent (9 koordináta)

→ De! 3 adat nem független, ami ebből következik:

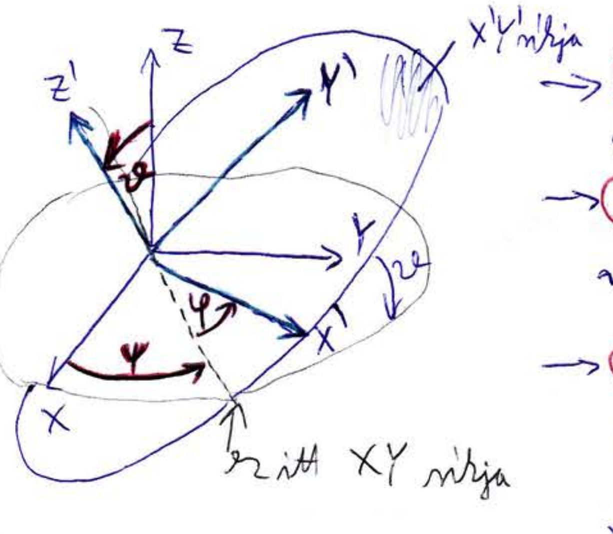
$$|\underline{r}_A - \underline{r}_B| = d(A,B)$$

$$|\underline{r}_A - \underline{r}_C| = d(A,C) \Rightarrow$$

$$|\underline{r}_B - \underline{r}_C| = d(B,C)$$

6 független adattal lehet jellemezni egy merev test helyzetét

Euler-szögek → Két, közös origójú, derékszögű koordinátarendszer egymáshoz viszonyított helyzetét egyértelműen jellemezhetjük az Euler-féle szögekkel



→ φ szög: z' tengely körüli forgatás, addig, amíg x' XY síkjába kerül
$\varphi\in[0,2\pi)$

→ ϑ szög: x' tengely körüli forgatás, hogy z' egybeessen z-vel
$\vartheta\in[0,\pi]$

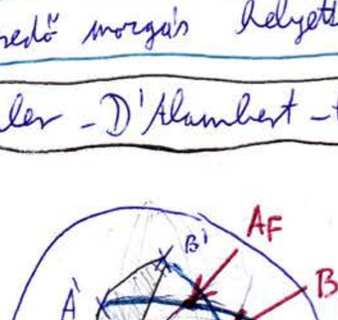
→ ψ szög: z' tengely körüli forgatás, hogy x' x tengellyel megegyezzen
$\psi\in[0,2\pi)$

(+ forgatásmátrixokkal is megadható)

Egy pontban rögzített merev test mozgása

- egy pontjában rögzített merev test pontjai gömbfelületen mozoghatnak
- az eredő mozgás helyettesíthető egy alkalmas tengely körüli forgatással

↑ Euler - D'Alambert - tétel



① O körül tetszőleges gömböt képzelünk

② A, B → A', B' rajta van a gömbfelületen

③ $d(O,A) = d(O,B) = d(O,A') = d(O,B')$ → zöld

④ AOA' és BOB' sík → kimetsz 2 főkört

⑤ $\widehat{AA'} \to A_F$ $\widehat{BB'} \to B_F$

↑ kijelöl két pontot, amelyekből az $\widehat{AA'}$ és $\widehat{BB'}$ főkörökre ⊥-en húzunk meg másik 2 főkört → T metszéspont

↳ piros

⑥ mivel T rajta van
- $\widehat{AA'}$ ív felezőkörén
- $\widehat{BB'}$ ív felezőkörén

$\Rightarrow d(T,A) = d(T,A')$

$\Rightarrow d(T,B) = d(T,B')$

továbbá tudjuk, hogy $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$, mert $\overbrace{d(A,B) = d(A',B')}^{\text{merev test}}$ (!íveinek!)

* egybevágó, ha távolságtartó trafóval leképezhetők egymásra pl. forgatás, eltolás, tükrözés

⑦ ⇒ ebből következik, hogy a két gömbi háromszög oldalainak a hossza megegyezik, tehát ATB és A'TB' Δ-ek egybevágók *

(8.) $ATA'\sphericalangle = BTB'\sphericalangle$ (← gömbi háromszögek egybevágósága miatt)

ha OT tengely körül A-t $ATA'\sphericalangle$-gel elforgatjuk → A'

ha B-t $BTB'\sphericalangle$ → B'

⇒ $\boxed{\text{alkalmas tengely : OT}}$

Charles tétel → transzláció és rotáció egyetlen csavarmozgással helyettesíthető

- merev test elmozdulása (tetszőleges mozgása) megvalósítható egymás utáni egyetlen transzlációval és rotációval.

Merev test síkmozgása (pl. gépek alkatrészei, egymással csúszóan kapcsolódó darabok)

- ha a merev test pontjai mindig ugyanazokban, a térben rögzített síkkal párhuzamos síkokban mozognak → a mozgás helyettesíthető két tetszőleges pont és az azt összekötő szakasz mozgásával ($f=3$)
- ez a mozgás is összerakható
  - ⇝ egy pont körüli forgatással (rotáció)
  - ⇝ haladó mozgással (transzláció) → során a pontok elmozdulásvektora, sebességvektora minden időpillanatban ugyanabba az irányba mutat

forgatás „és" transzláció a két pont között

$$\boxed{F_{A',\varphi} \circ T_{AA'} = F_{B',-\varphi} \circ T_{BB'} = F_{C,\varphi}}$$

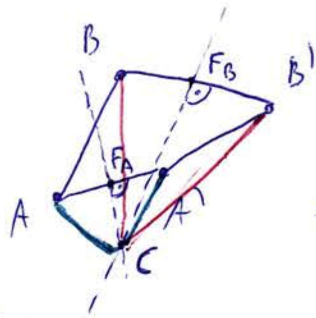
A' körül φ szögű

$$\Delta \underline{r}_A = \Delta \underline{r}_B = \Delta \underline{r}_P = \text{áll}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_A = \underline{v}_B = \underline{v}_P$$

- ha nem csak tiszta transzlációból áll a síkmozgás, akkor található olyan $\boxed{\text{pont}}$ a síkban, ami körül az eredő mozgás egyetlen forgatással megvalósítható
  ↳ Euler - D'Alambert tétel speciális esete

momentán centrum → a mozgás adott pillanatában kijelölhető egy olyan pont, amelyből szemlélve a merev test minden pontja körmozgást végez



$$d(A,B) = d(A',B')$$
$$d(CA') = d(CA)$$
$$d(CB') = d(CB)$$

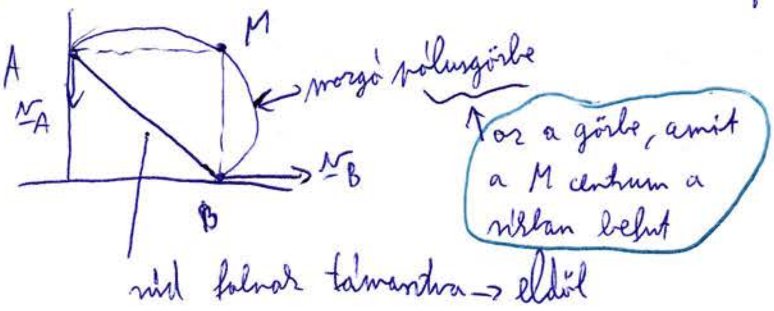
$$\Rightarrow ACB\triangle \ \boxed{\text{egybevágó}}\ A'CB'\triangle$$

$$\Rightarrow AOA'\sphericalangle = BOB'\sphericalangle$$

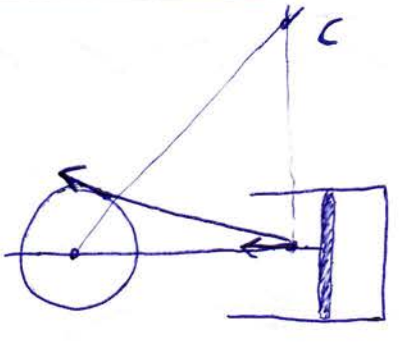
$$\boxed{\lim_{t \to t_0} C(t) = M(t_0)}$$

M ← pillanatnyi forgáspont

$AOA'\sphericalangle = BOB'\sphericalangle = \Delta\varphi$, ha Δt kicsi pl.



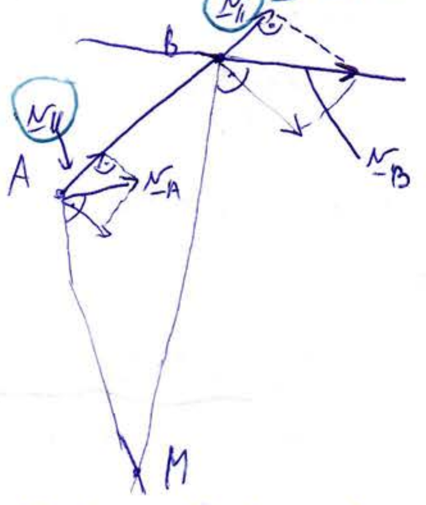
pl.



dugattyú

Sebességtér szerkesztése

- A merev test síkmozgása egyértelműen jellemezhető, ha ismerjük a test egyik (A) pontjának sebességét ($\underline{v}_A$) és egy másik (B) pont sebességének irányát.
  - → Momentáncentrum a két sebességvektor irányára merőleges egyenesek metszéspontja
  - → Az A pont sebességének az $\overline{AB}$ szakaszra eső vetülete ismert, és ugyanekkorának kell lennie a B pont sebességének $\overline{AB}$-re eső vetületének is

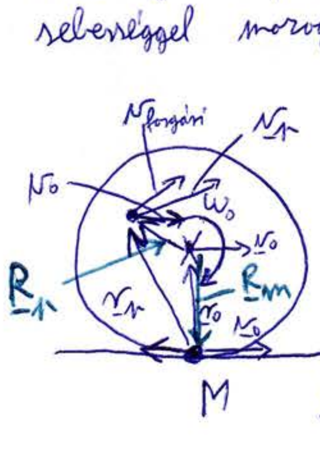


álló pólusgörbe: az a görbe, amelyet a momentáncentrum a síkon befut

mozgó pólusgörbe: a merev testhez rögzített síkon a momentáncentrum mozgó pólusgörbén fut.

Gördülő henger, tiszta gördülés fogalma

- tiszta gördülés, ha a határgörbének és a pályának az érintkezési pontja azonos sebességgel mozog.



tetszőleges P pontra

$$\underline{v}_p = \underline{v}_0 + \underline{\omega}_0 \times (\underline{r}_p - \underline{r}_0) = \underline{v}_0 + \underline{\omega}_0 \times \underline{R}_p$$

tiszta gördülés esetén M pont talajhoz viszonyított sebessége zérus

$$\underline{v}_m = \underline{v}_0 + \underline{\omega}_0 \times \underline{R}_m = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = R\omega_0 \qquad (\underline{v}_0 = -\underline{\omega}_0 \times \underline{R}_m)$$

($v_0 > R\omega_0$ csúszva g. <-> köszörülés)

behelyettesítve v_p-be

$$\boxed{\underline{v}_p} = -\underline{\omega}_0 \times \underline{R}_m + \underline{\omega}_0 \times \underline{R}_p = \underline{\omega}_0 \times \overbrace{(\underline{R}_p - \underline{R}_m)}^{\underline{r}_p} = \boxed{\underline{\omega}_0 \times \underline{r}_p}$$

4. P pont egyenletes körmozgást végez

Merev testek sztatikája

15. tétel

Merev test egyensúlyának feltétele

- sztatika -> merev testek egyensúlyának feltételeit vizsgálja, amikor a testre külső erők hatnak!
- $f = \{ r_i, F_i \}_{i=1}^{N}$ ← erőrendszer (jelölése)
- Pontrendszerre vonatkozó tételek:

-> impulzus: $$\boxed{\frac{dI}{dt}} = \frac{d\left(\sum_i m_i v_i\right)}{dt} = \sum_i F_i = F_e^{(k)}$$

-> impulzusmomentum: $$\boxed{\frac{dN}{dt}} = \frac{d\left(\sum_i r_i \times m_i v_i\right)}{dt} = \sum_i r_i \times F_i = \sum_i M_i = M_e^{(k)}$$

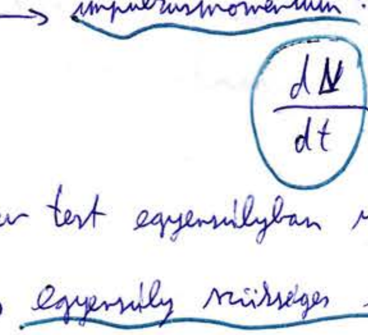
- merev test egyensúlyban van, ha bármelyik pontjának v_i sebessége zérus.

=> egyensúly szükséges feltétele:

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \sum_i F_i = 0 \leftrightarrow I = \text{áll} \\ \rightarrow \sum_i M_i = 0 \leftrightarrow N = \text{áll} \end{array}\right\} \text{ ha ezek teljesülnek } \left(\begin{array}{l} \nearrow v = \text{áll} / v = 0 \\ \searrow \omega = \text{áll} / \omega = 0 \end{array} \right)$$

Forgatónyomaték transzformáció

-



más középponti inerciarendszerre áttérve

$$\boxed{F = F' = \sum_i F_i}$$ ← ez ∀ felírható tetszőleges O pontra

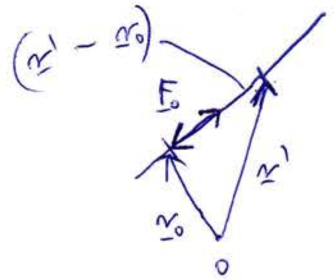
Viszont a forgatónyomaték a két origóban más és más

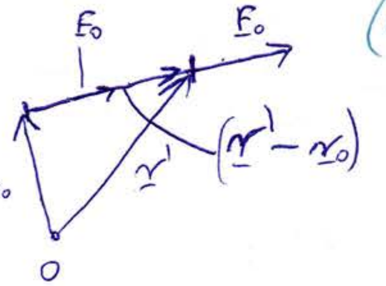
$$M' = \sum_i \underset{\substack{\uparrow \\ (r_i - r_0)}}{r_i'} \times F_i = \sum_i (r_i - r_0) \times F_i = \overbrace{\sum_i r_i \times F_i}^{M} - r_0 \times \overbrace{\sum_i F_i}^{F} = M - r_0 \times F$$

-> De! ha $\sum_i F_i = 0$, tehát a rendszer zárt, vagyis csak belső erők hatnak, akkor: $M' = M$, ami azt jelenti, hogy a forgatónyomaték tetszőleges pontra felírható.

- a forgatónyomaték fontos tulajdonsága, hogy csak az erő hatásvonalától függ, a támadásponttól viszont nem. $\boxed{[\underbrace{r_0}+\underbrace{(r'-r_0)}]\times F_0}$

↳ belátható: $r'\times F_0 = r_0\times F_0 + \underbrace{(r'-r_0)\times F_0}_{0} = r_0\times F_0$



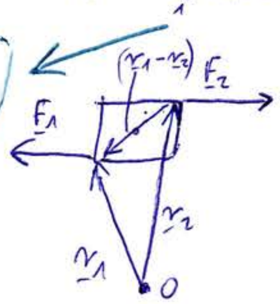


$(r'-r_0) \parallel F_0 \to 0$

Erőpár

- két erő, amelyre $\sum_i F_i = 0$, de a hatásvonaluk nem közös

$\boxed{F_1=F_2!}$



⇒ az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel

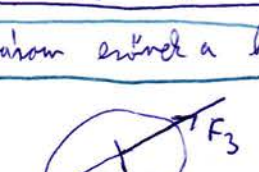
⇒ ha összesen csak 1 erőpár hat a testre, akkor az a tömegközéppontja körül forgó mozgást végez (gyorsuló)

$$M = r_1\times \underset{\boxed{F}}{F_1} + r_2\times \underset{\boxed{-F}}{F_2} = \underbrace{(r_1-r_2)}_{d}\times F = d\times F$$

!

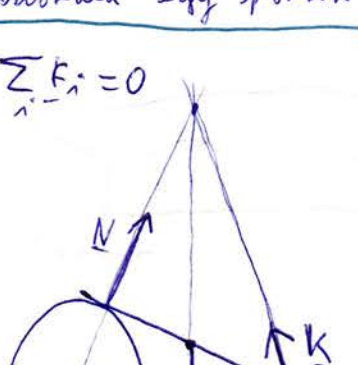
Merev test egyensúlya 3 erő esetén

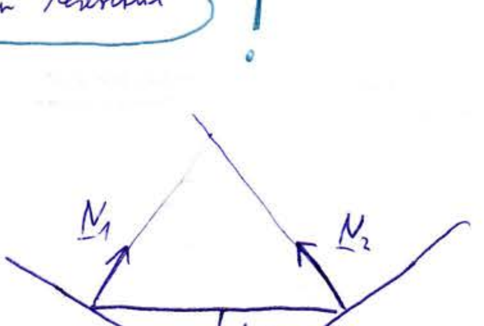
- a három erőnek a hatásvonala egy ponton menjen keresztül !



$\sum_i F_i = 0$

pl.

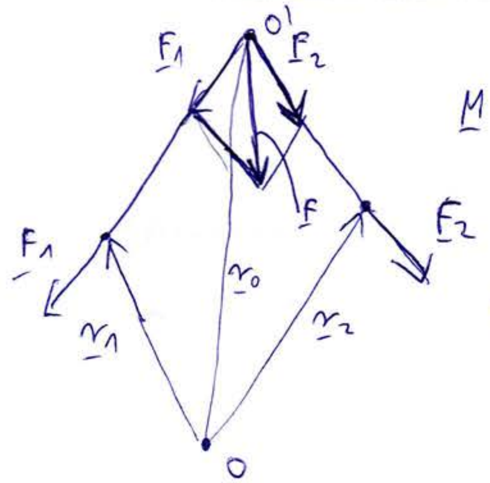




Egyenértékű erőrendszerek, erőrendszer redukció

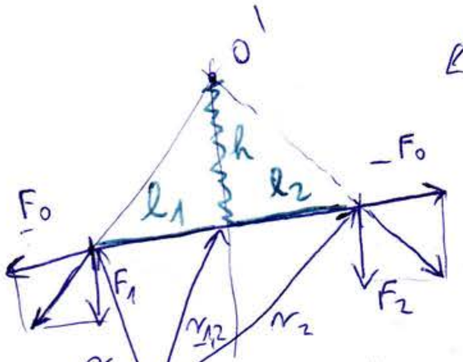
- $\{r_i, F_i\}_{i=1}^{N}$ erőrendszer helyettesíthető-e egyetlen erővel?

↳ tehát $F=\sum_i F_i$ erőt r_0 pontba helyezzük

- 

$$\underline{M} = \underset{0\,(\text{mert } \underline{r}=0)}{\underset{\sim}{\underline{M}'}} + \underline{r}_0 \times \underline{F} = \underline{r}_0 \times (\underline{F}_1 + \underline{F}_2) = \underline{r}_0 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_0 \times \underline{F}_2$$

↖ ha $\underline{F}_1$ és $\underline{F}_2$ erők (α) szöget zárnak be

- 

↙ ha $\underline{F}_1 \parallel \underline{F}_2$, akkor nulla erőt és nulla nyomatékot szolgáltató erőket kell felvenni, mint ahogyan az alábbi látható $(F_0, -F_0)$

↓ így megkapható O', az eredő erő hatásvonalának egy pontja.

→ egy másik pontját úgy számolhatunk, hogy felhasználjuk a (háromszöges) hasonlóságot

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{l_1}{h} \qquad \frac{F_0}{F_2} = \frac{l_2}{h}$$

$$\Rightarrow F_1 l_1 = F_2 l_2$$

$$r_{12} = \underline{r}_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = \frac{l_2 \underline{r}_1 + l_1 \underline{r}_2}{l_1 + l_2}$$

$$\boxed{\underline{r}_{12}} = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2}{F_1 + F_2} \quad \leftarrow \text{párhuzamos erőrendszer centruma}$$

↖ erőcentrum — „súlypont" számtani közép

- ha $\underline{F}$ erő a nehézségi erőből származik

$$\underline{r}_n = \frac{\sum m_i g_i \cdot \underline{r}_i}{\sum m g_i} \rightarrow \boxed{\text{súlypont}}$$

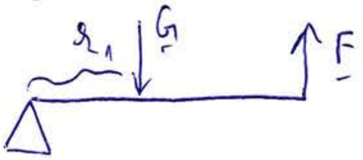
ha $g_i = g$ (homogén tér)

$$\underline{r}_0 = \frac{\sum m_i g_i r_i}{\sum m_i g_i} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \quad \text{Ha } g_i = g!$$

Egyszerű gépek

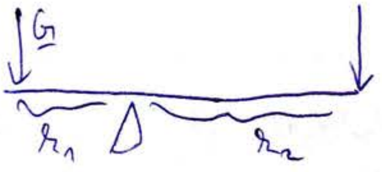
→ emelő. típusú

~ tengely körül forgatható merev test



$$\underline{F} \cdot r_2 = \underline{G} r_1$$

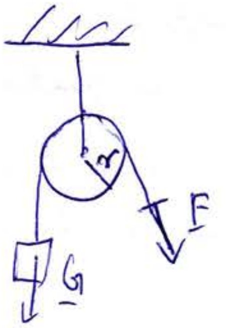
$$\hookrightarrow \underline{F} = \underline{G}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$



pl. mérlegek, feszítővasak, fogók, talicska

→ csigák

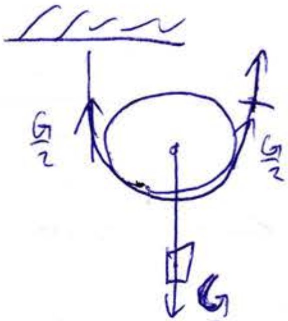
~ állócsiga



$$Gr - Fr = 0$$

$$F = G$$

~ mozgócsiga



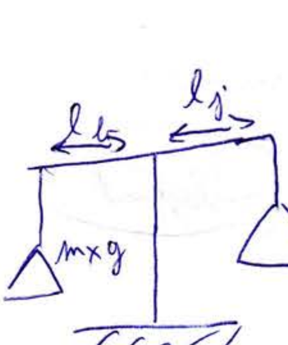
$$Gr - 2rF = 0$$

$$F = \frac{G}{2}$$

→ lejtő, ék

Mérlegelési módszerek

→ egyenlő karú mérleg



$$m_x g l_b = m g l_j$$

→ Gauss-féle eljárás (felcserélési módszer)

$$(1) \rightarrow \boxed{m_x g l_b = M_j g l_j} \quad (2) \rightarrow \boxed{M_b g l_b = m_x g l_j} \Bigg\} \; \xrightarrow{\frac{(2)}{(1)}} \; m_x = \sqrt{M_b \cdot M_j} \approx \frac{M_b + M_j}{2}$$

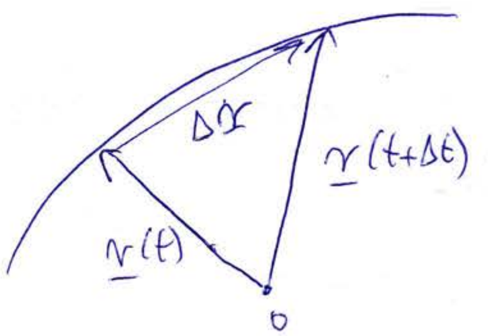
ha a hiba kicsi

Kísérő triéder

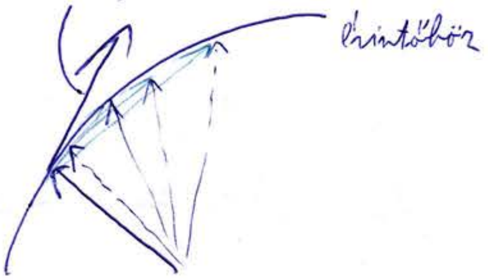
Most ezzel a jegyzettel csak kiegészítem az előzőt, mert az mind jó, amit ott leírtam, csak Bekes máshogy kérte tőlem a vizsgán.

$\underline{r}(t)$ helyvektor, adott t időpillanatban a pálya egy pontjába mutat

$r(t+\Delta t)$ $\Longrightarrow$ ebből a kettőből kellene kiindulni



$\rightsquigarrow$ ha $\Delta t \to 0$



mielőtt deriválnánk, maradjunk Δt-s nagyságrendben, nem dt-s ben!

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right) \searrow \frac{\Delta r}{\Delta t} = \underbrace{\left(\frac{\Delta r}{\Delta s}\right)}_{\text{ez pedig valamekkora hosszúságú, valamilyen irányban}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)}_{\text{ez } v_{\text{átlag}} \text{ adott } \Delta t \text{ alatt}}$$

⇓ ezek után jön, hogy $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$

érintő egységvektor

ha kicsiny távolságokról van szó, akkor $|d\underline{r}| = ds$

a kettő szorzata kiadja $\underline{v}$-t.

így az első tag $\underline{t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta r}{\Delta s}\right) = \left(\frac{dr}{ds}\right)$

a második tag: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\frac{ds}{dt}\right)$ ← v_{pill} sebesség ez után $\underline{t}$ vektor megvan, az kellene tovább deriválni; de először

$\underline{v}$-t ki tudjuk fejezni: $\boxed{\underline{v} = v \cdot \underline{t}}$

$\underline{a}$-t is ki tudjuk fejezni: $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \dot{v} \cdot \underline{t} + v \boxed{\dot{\underline{t}}}$

itt viszont elakadtam, nem tudtam, hogyan kellene. Most próbálkozom valamit, ha nem jön össze, akkor máskoron megmondom

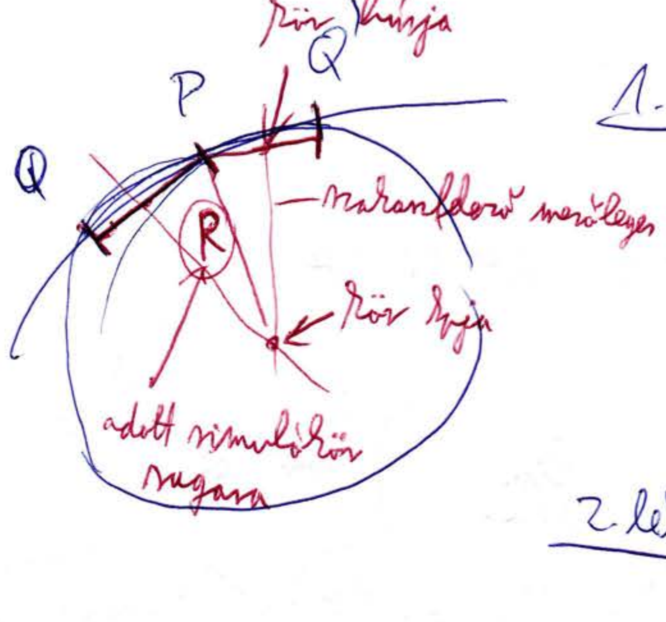
$$\cancel{\dot{\underline{t}} = \left(\frac{d\underline{r}}{ds}\right)'} \qquad \left(\underline{t} \cdot \underline{t} = 1\right)'$$

$$2\underline{t} \cdot \dot{\underline{t}} = 0 \Rightarrow \underline{t} \perp \dot{\underline{t}}$$

szerintem ezt most hagyom, mert sietnem kell, viszont a dgy-s füzetbe elküldöm. → kiegészítés később

az lenne a vége, hogy: $\underline{a} = \dot{v}\underline{t} + \boxed{\frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}}$ ← ez jön ki

a másik pedig → simulósík!



1. lépés rajzoljunk olyan kört, ami átmegy Q, P, Q' pontokon → ez a kör meghatároz egy síkot is
↳ hol van ennek a körnek a középpontja? → ábra

2. lépés
$$\left.\begin{aligned} Q &\to P \\ Q' &\to P \end{aligned}\right\}$$ tartank mindegyikkel a P pontba

⇒ eredmény a simulókör és ennek a körnek a síkja a simulósík

Tényleges kiszámítás → problémák

→ integrálás } ezeket nem mindig lehet elvégezni
→ invertálás }

$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ ← ezzel lehet

$\underline{r}(t) \qquad \underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) \qquad \underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) \qquad |\underline{v}| = v$

$s = \int |\dot{\underline{r}}|\, dt = \int v\, dt$

$v = \frac{ds}{dt}$

$$\underline{e} = \frac{d\underline{r}}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{\frac{d\underline{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\underline{v}}{v}$$

$$\underline{e}' = \frac{d\underline{e}}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\underline{e}}{dt} = \frac{1}{v}\cdot\frac{d\underline{e}}{dt} = \frac{1}{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{v}}{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\left[\frac{d\underline{v}}{dt}\cdot\frac{1}{v} + \underline{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{v}\left[\underline{a}\cdot\frac{1}{v} + \underline{v}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{dv}{dt}\right] = \longrightarrow$$

$v = \sqrt{v^2} = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}$ összetett fv deriváltja

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}}}\cdot\frac{d}{dt}(\underline{v}\cdot\underline{v})} = \frac{1}{2v}\cdot 2\underline{v}\cdot\underline{a} = \frac{\underline{v}\cdot\underline{a}}{v}$$

kiemelünk $\frac{1}{v^3}$-t

$$\rightarrow = \frac{1}{v}\left[\underline{a}\cdot\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\underline{v}\frac{\underline{v}\cdot\underline{a}}{v}\right] = \frac{1}{v^4}\left[v^2\cdot\underline{a} - \underline{v}(\cdot\underline{v}\cdot\underline{a})\right] =$$

$$= \frac{\underline{v}\times(\underline{a}\times\underline{v})}{v^4}$$

kiemelünk $\frac{1}{v^2}$-t

$$= \frac{1}{v^2}\left[\underline{a} - \frac{\underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{a})}{v^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left[\underline{a} - \underline{e}(\underline{e}\cdot\underline{a})\right] = \frac{1}{v^2}\underbrace{\left[\underline{\underline{I}} - \underline{e}\circ\underline{e}\right]}_{\underline{\underline{Q}}\text{ projektor}}\underline{a} =$$

$$= \frac{1}{v^2}\cdot\underline{a}_\perp$$

$|\underline{e}'| = G = \frac{1}{R}$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{v^2}|\underline{a}_\perp|$

$|\underline{a}_\perp| = \frac{v^2}{R}$