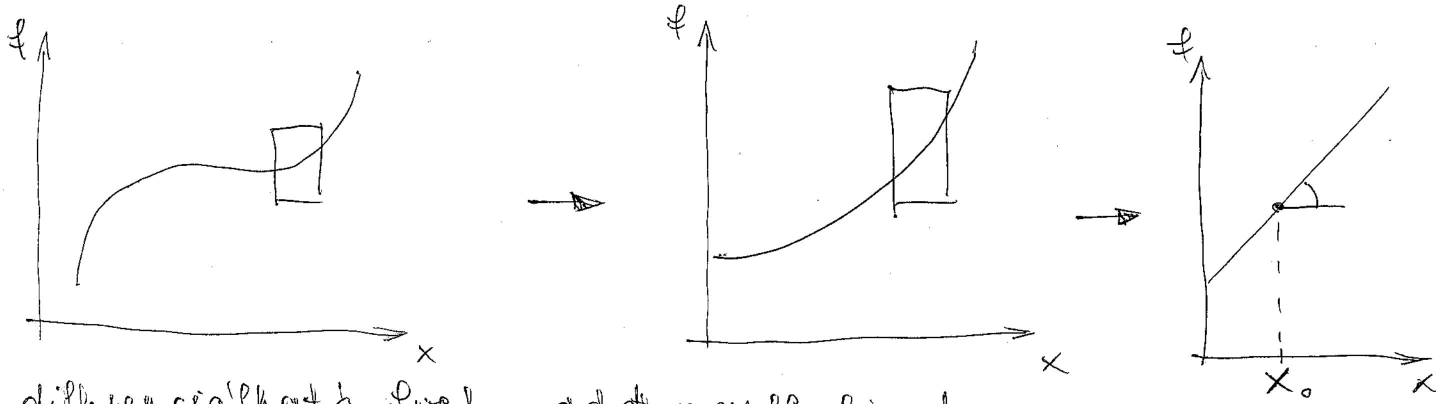
09. 09. | EA

Tematika:
- matematikai bevezetés
- kinematika
- dinamika
- pontrendszerek
- merev testek

Ajánlott: Tasnádi, S., Bérces – Általános fizika: Mechanika I.

Matematikai bevezető



differenciálható fvek, adott pontbeli derivált

D Fv. diffható, ha ~~egy adott~~ a pont környezetében
↳ egy adott pontban
lineáris fv-nyel leírható.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \left(= \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f \right) \boxed{= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Pl. $\boxed{f(x) = c} \rightarrow \frac{c - c}{x - x_0} \boxed{= 0} = f'(x)$

Tanulság: a derivált fv - ből nem tudjuk egyértelműen „visszaállítani” az eredetit.

Pl: $\boxed{f(x) = x} \rightarrow \boxed{f'(x) = 1}$

$f(x) = x^2 \rightarrow \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$

$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$

Kinematika

Esemény: $3+1=4$ (tér + idő)
A klasszikus mechanikában az idő független.

Derékszögű koordinátarendszerben: $\boxed{(x,y,z)=\underline{r}}$

$$\boxed{\underline{r}_1+\underline{r}_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)}$$

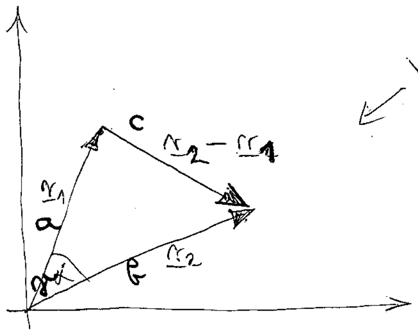
$$\boxed{\lambda\cdot\underline{r}=(\lambda x,\ \lambda\cdot y,\ \lambda z)\qquad \lambda\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{|\underline{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Pl.: $|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=$

$$=\underbrace{x_1^2+y_1^2+z_1^2}_{|\underline{r}_1|^2}+\underbrace{x_2^2+y_2^2+z_2^2}_{|\underline{r}_2|^2}-2\underbrace{(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)}_{\underline{r}_1\underline{r}_2\ \to\ \text{skalárszorzat}}=$$

$$=|\underline{r}_1|^2+|\underline{r}_2|^2-2\cdot\underline{r}_1\underline{r}_2$$



Vektorok kivonása

$$\boxed{\begin{aligned}&|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^2=\\&=|\underline{r}_1|^2+|\underline{r}_2|^2-2|\underline{r}_1||\underline{r}_2|\cos\alpha\end{aligned}}$$

↳ **Koszinusztétel**

"3+1" $\Longrightarrow$ $\underline{r}(t)$ függvény!

(tetszőleges háromszögben:)
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$$

$\boxed{09.11.}\ \boxed{EA}$

$\underline{r}(t)$ függvény

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} \ (\rightarrow \text{sebesség}) = \left(\underbrace{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}_{\dot{x}} ; \underbrace{\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}}_{\dot{y}} ; \underbrace{\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}}_{\dot{z}} \right)$$

Sebesség:

$$\boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}$$

(csak ha idő szerinti deriváltról van szó!)

Gyorsulás:

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

Pl.: $\underline{a} = (0, 0, -g)$ → Hogyan változik $\underline{v}(t)$?

$$\underline{v}(t) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0} - gt)$$

$((-gt + c))$

v_{x_0}, v_{y_0}: valami konstans

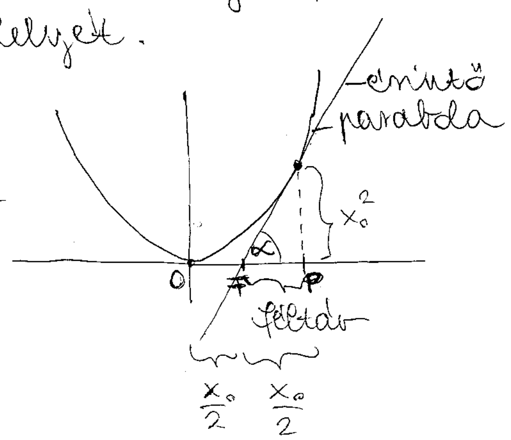
$$\underline{v}(0) = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$$

(ezt a 6-ot tudjuk befolyásolni)

$$\underline{r}(t) = \left(x_0 + v_{x_0} t \,;\ y_0 + v_{y_0} t \,;\ z_0 + v_{z_0} t - \frac{g}{2} t^2\right)$$

Kísérlet: Vektorszkóp: 3 különböző helyen méri a (hang, vagy más) jel terjedési sebességét, háromszögeléssel számolja ki a test helyét.

Megj.:



(Hf: kiszámolni)

$\overline{FP}$ = féltáv

$\mathrm{tg}\,\alpha = 2x_0$

$$\frac{x_0^2}{\overline{FP}} = 2x_0 = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\frac{x_0}{2} = \overline{FP}$$

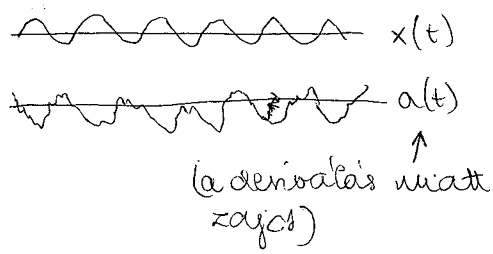
$f(x_0) \mapsto x_0^2$
(parabola)

Pl.: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

$v_{y_0} = 0$

$$\underline{r}(t) = \Big(\underbrace{v_{x_0} t}_{x} \ ; \ 0 \ ; \ \underbrace{v_{z_0} t + \frac{g}{2} t^2}_{z}\Big) \qquad \left[t = \frac{x}{v_{x_0}}\right] \downarrow$$

$$\boxed{z = \frac{v_{z_0}}{v_{x_0}} x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{x_0}}\right)^2} \longrightarrow \text{parabola}$$



Harmonikus rezgőmozgás (kísérlet):

azért nincs általánosítva, mert (komponensen) ?

$$a = -\omega_0^2 x$$

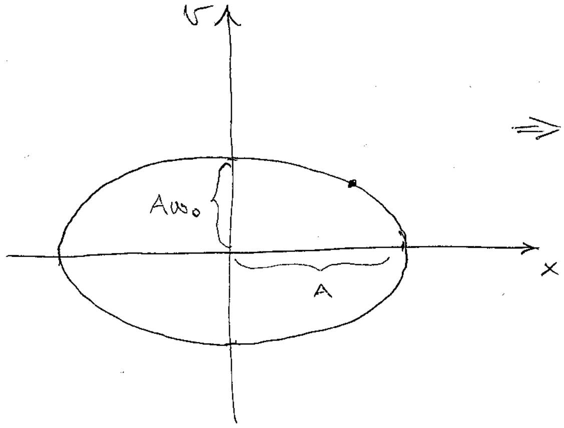
$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A \sin\varphi \\ v(0) &= A\omega_0 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \frac{x(0)}{v(0)} = \mathrm{tg}(\varphi) \cdot \frac{1}{\omega} \ ;$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{v}{A\omega_0} &= \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega_0}\right)^2 = 1} \longrightarrow \underline{\text{ellipszis}}$$

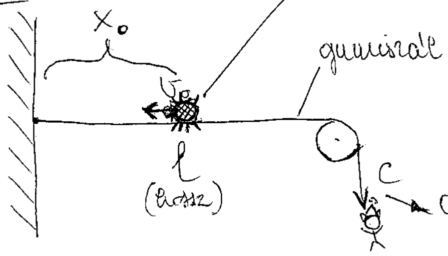


$\Rightarrow$ <u>fázistér</u>

? $A = \sqrt{v(0)^2 + x(0)^2} = \sqrt{A^2 \sin^2\varphi + A^2\omega_0^2 \cos^2\varphi} = \frac{A^2}{\omega^2}$

$A \cdot \frac{v(0)}{A}$

Pl.: (diffegyenlet) egy kis pók v_0 sebességgel nekiindul az ellenkező irányba



gonosz manó húzza le a gumiszálat (egyenletesen nyúlik örökre)

(a sebesség arányos a faltól mért távolsággal)

$$v_0(x) = \frac{x}{\ell} c$$

$$v = \frac{x}{\ell} c - v_0 \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{\ell} c - v_0$$

Melyik az a fv, amelyiknek deriváltja arányos a fv-nyel?

Keressük a fv-t a köv. alakban:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\lambda t} + B \\ \dot{x} &= \lambda A e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \qquad \lambda \cdot A e^{\lambda t} = \frac{c}{\ell}\left[A e^{\lambda t} + B\right] - v_0$$

$$\left[\lambda = \frac{c}{\ell}\right] \quad \left[\frac{c}{\ell} B = v_0\right]$$

$$B = \frac{\ell}{c} v_0$$

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{c}{\ell} t} + \frac{\ell}{c} v_0$$

(ez a fv minden A-ra jó)
(tehát $t=0$-ban tudnunk kell, hol volt a pók),

$x(0) = x_0$, így:

$$x_0 = A + \frac{\ell}{c} v_0 \longrightarrow A = x_0 - \frac{\ell}{c} v_0$$

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{\ell}{c} v_0\right] e^{\frac{c}{\ell} t} + \frac{\ell}{c} v_0$$

Ha $x_0 < \frac{\ell}{c} v_0 \longrightarrow \exists T: x(T) = 0$ (a pók eléri a falat)

Ha $x_0 > \frac{\ell}{c} v_0 \longrightarrow \exists T: x(T) = \ell$ (a pók leesik)

$$\underbrace{\frac{c}{\ell} x_0}_{} < v_0$$

a pók alatti kezd. gumi sebessége

09. 17. | G4. | 4.61. szoba (É)

2 ZH, a 7. a 12. héten, az 1. kb. a 6. héten (őszi szünet környéke)

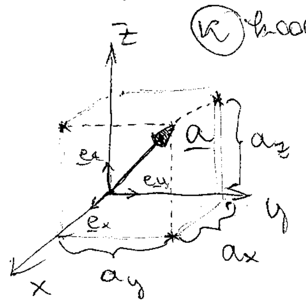
A ZH-k 50-50 pontosak (min. 40-40%!).

∀ órán lesz hf. → ebből 2-t be kell majd adni (9-9 pont)
(~4-5. héten és ~10. héten)

- Kovács – Párkányi: Fizika példatár I.
- google drive gyakver

Vektoralgebra

$\underline{a}$



$\underline{a}$ = téglatest testátlója

$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ egységvektorok

$|\underline{e}_x| = |\underline{e}_y| = |\underline{e}_z| = 1$

$a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$

$$\underline{a} = \underbrace{a_x \cdot \underline{e}_x}_{\underline{a}_x} + \underbrace{a_y \cdot \underline{e}_y}_{\underline{a}_y} + \underbrace{a_z \cdot \underline{e}_z}_{\underline{a}_z} \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}_{K} \equiv (a_x ; a_y ; a_z)_{K} \longrightarrow \text{a K ocm.r.-ben érvényes!}$$

oszlopvektor | sorvektor

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad \cancel{K}$$ ← az abszolútérték NEM függ a reprezentációtól

Összeadás:

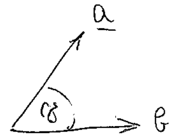
$$\underline{a} \pm \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Skalárral szorzás:

$$\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Skalárszorzat:

$$\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}^3 = c \in \mathbb{R}$$



$\underline{a} \cdot \underline{b} = c := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$

definíció ↗

Pl. munka
($\cos\gamma = 0 \to$ nincs munkav.)

következmény ↘

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(M) $\underline{a} \cdot \underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\underline{a}|^2$

$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$

(M) Ha $\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a}\underline{b} = 0$

Példa:

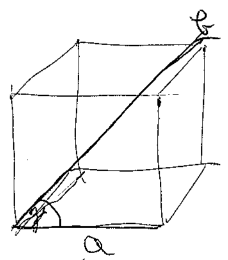
$\boxed{1.}$ $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cos\gamma = ?$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} \cdot \sqrt{\underline{b} \cdot \underline{b}} \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{2 + 6 + 0}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$\boxed{2.}$

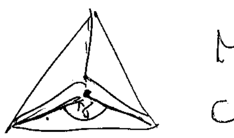


Mennyi egy él és a testátló által bezárt szög?

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

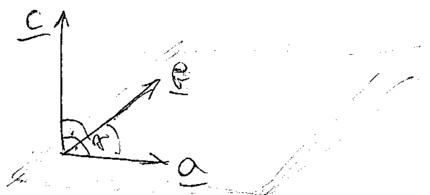
$\boxed{Hf.}$ tetraéder:



Mennyi a középpontból egy-egy csúcsba mutató vektorok által bezárt szög?

Vektoriális szorzat

$$\underline{a}\times\underline{b} = \underline{c} := |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot \sin\gamma \cdot \underline{e}_c \qquad \underline{c}\perp\underline{a} \qquad \underline{c}\perp\underline{b}$$



$$\underline{a}\times\underline{b} \; (K) = \begin{array}{c} (x) \\ (y)^{*} \\ (z) \end{array}\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z^{*} b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

* hogy lenne megjegyezni? (végtelen permutációk) y után következik a z

Házi: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\underline{a}\times\underline{b} = ?$

Vegyes szorzat:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} = (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z =$$

$$= (a_z c_y - a_y c_z) b_x + (a_x c_z - a_z c_x) b_y + (a_y c_x - a_x c_y) b_z =$$

$$= \begin{pmatrix} a_z c_y - a_y c_z \\ a_x c_z - a_z c_x \\ a_y c_x - a_x c_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = -(\underline{a}\times\underline{c})\cdot\underline{b} = (\underline{c}\times\underline{a})\cdot\underline{b}$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} \longleftrightarrow (\underline{c}\times\underline{a})\underline{b}$$

ciklikusan permutáljuk a vektorokat

$(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c} = d$ = az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ által kifeszített parallelepipedon térfogata

(M) vektort vektorral nem osztunk

Mf: $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} \underline{b} = ? \\ \underline{c} = ? \end{array}\right\}$ $\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}$ és $\underline{b}\underline{c} = 0$

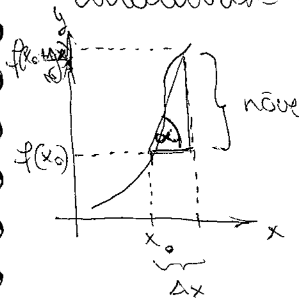
09.18. Gy

Differenciálszámítás

$f(x) : x \longmapsto y$ $\qquad D_f \subset \mathbb{R}$

$\quad D_f \qquad\quad R_f$ $\qquad R_f \subset \mathbb{R}$

folytonos, egyváltozós függvényekkel foglalkozunk, amelyek általában az idő függvényei



növekmény: $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \Delta x \to 0 \qquad -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$-\infty < \text{tg}\,\alpha < \infty$

(D) $\text{tg}\,\alpha_{x_0} := \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \in \mathbb{R} \quad = f'(x)_{x=x_0}$

$I \subset D_f \; : \; \forall x_0 \in I \; : \; f'(x)_{x=x_0}$

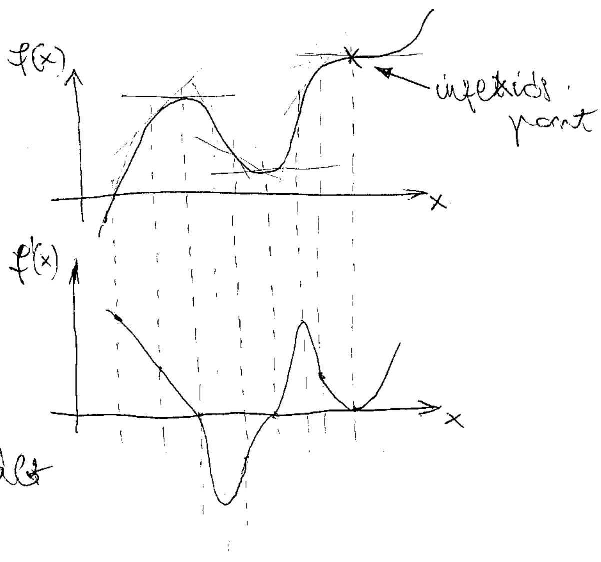
folytonos (diffható) intervallum

$x \longmapsto f'(x)$: derivált függvény

$x \longmapsto \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$: második derivált

$\Downarrow$

$\dfrac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = \ddot{f}$ (idő szerinti deriváltnál!)



Szabályok:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(\lambda \cdot f(x))' = \lambda \cdot f'(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
3. * $(\lambda_1 f(x) \pm \lambda_2 g(x))' = \lambda_1 f'(x) \pm \lambda_2 g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$
6. ** $((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$
7. ⤳

* lineáris kombináció, ** láncszabály

7. $x = f^{-1}(f(x)) \quad / \frac{d}{dx}$

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\left[f^{-1}(f(x))\right]$$

$$1 = \frac{d}{df} f^{-1} \cdot \frac{df}{dx}$$

Pl. 1) $f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a$

2.) $f(x) = x^n \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ [Biz: lsd. 3. oldal]

itt picit máshogy gondolkodtunk.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n \cdot x^{n-1} \cdot \cancel{h} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + h^n}_{\mathcal{O}(h^2) \equiv 0} - \cancel{x^n}}{h}$$

A h-t nem hagyjuk el!
(Nem hagyhatjuk el!)
Viszont a $h^2, h^3 \ldots h^n$-t igen, mert $\mathcal{O}(h^2) \equiv 0$

(1) $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \Rightarrow$ Euler formula
$i^2 = -1$

(2) $e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$ ((komplex konjugált))

(1)+(2) $= \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad$ (1)−(2) $= \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$e^x \rightarrow$ az egyetlen olyan fv, ahol minden x_0 értékre az iránytangens megegyezik a helyettesítési értékkel $(f(x_0))$

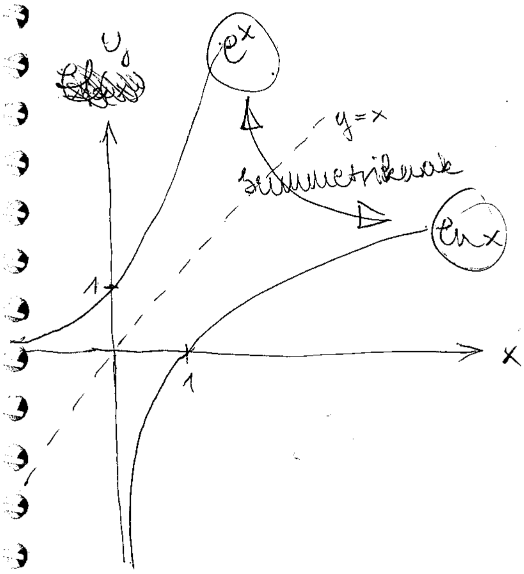
$$(\sin x)' = \frac{e^{ix} \cdot \cancel{i} + e^{-ix}(\cancel{-i})}{2\cancel{i}} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

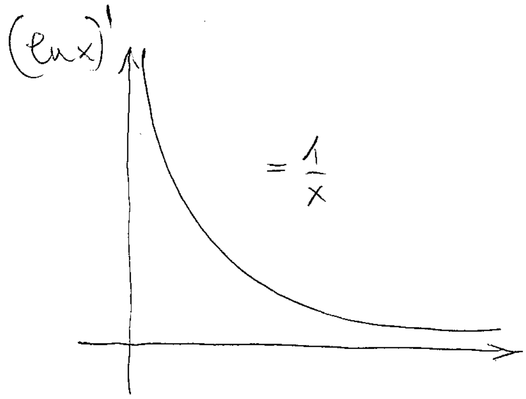
Hf: $(\cos x)' = \frac{i \cdot e^{ix} + (-i) \cdot e^{-ix}}{2} = \frac{i^2 e^{ix} \cancel{+1} (i)^2 e^{-ix}}{2i} = -\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i} =$

$= -\sin x$.

$$(\text{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Hf:
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sqrt{1+x^2} \\ g(x) &= e^{-x^2} \\ h(x) &= (\sin x)^x \\ k(x) &= \text{ctg}\, x \end{aligned}\right\}$$ mennyi a deriváltjuk?





Pl $f(x) = x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x \cdot \ln x}$

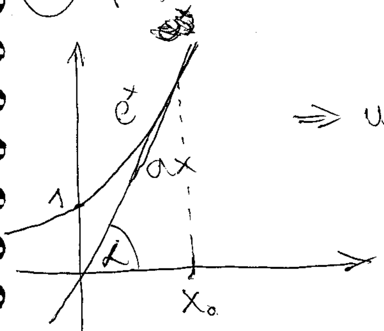
$$f'(x) = \left(e^{x \cdot \ln x}\right)' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Hf: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $\qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(ax)}}$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{a^3+x^3}}$ $\qquad k(x) = \text{tg}\sqrt{ax}$ $\qquad l(x) = \sin\sqrt{ax}$

$\Rightarrow$ deriváljuk!

M $f(x) = e^x$



$\Rightarrow$ milyen meredek az origón átmenő érintő?

$a = ?$

Az x_0 pontban:
$e^{x_0} = ax_0$

$$f'(x)_{x=x_0} = a$$

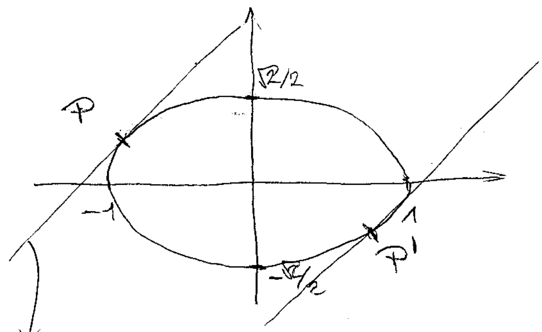
$$\underbrace{e^{x_0} = a \quad \text{és} \quad e^{x_0} = a x_0}$$

$$a x_0 = a \qquad \Rightarrow \qquad a = e^1 = 2{,}71\ldots$$
$$x_0 = 1$$

M

$x^2 + 2y^2 = 1 \rightarrow$ ellipszis

$$y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$$



$y = mx + p$
ahol $m = 1$ (1 meredekségű)

$P(x_p, y_p)$
(melyik p pontban érinti az 1 meredekségű egyenes az ellipszist?)

↳ vesszük az ellipszis pozitív felét (x tengely feletti részt)

$$f(x) = +\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$$

$$f'(x) = 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \cdot \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} \quad \Rightarrow -x$$

$$x^2 = 4 \cdot \left(\frac{1-x^2}{2}\right)$$

$$3x^2 = 2$$

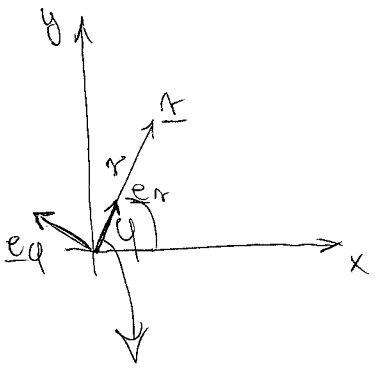
$$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow x_p = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y_p = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$P\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{1}{6}}\right) \quad \text{és} \quad P'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$$

$\boxed{09.23}$

Síkbeli
Polárkoordinátáк:



$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$
$$y(t) = r(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$
$$\frac{y}{x} = tg\varphi \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Vezessünk be egy $\underline{e}_r$ egységvektort (mindig az $\underline{r}$ irányába mutat (párh. vele), így függ az időtől!).

$$\underbrace{\underline{r} = \underline{e}_r \cdot r}_{\text{(szorzat deriváltja)}} \qquad \underline{e}_r = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

Sebesség:
$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \dot{\underline{e}}_r = (*) \quad \rightarrow \text{koordinátánként kell deriválni}$$

$$\dot{\underline{e}}_r = (-\dot{\varphi} \cdot \sin\varphi, \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi) = \dot{\varphi}(-\sin\varphi, \cos\varphi) =$$
$$= \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi \quad (\underline{e}_\varphi = \varphi \text{ irányú egységvektor})$$

$$(*) = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi \qquad \underline{e}_\varphi \perp \underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi$$

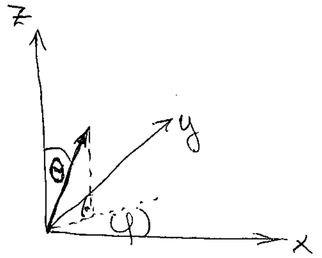
Gyorsulás:

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r} \cdot \underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi} \cdot \underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\underline{e}}_\varphi = (*)$$
$$\dot{\underline{e}}_\varphi = (-\dot{\varphi} \cdot \cos\varphi, -\dot{\varphi} \cdot \sin\varphi) = -\dot{\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi) = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r$$

$$(*) = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r$$

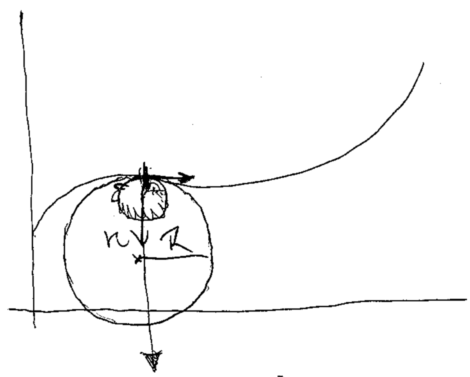
$$\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\underline{e}_\varphi$$

Térbeli polárkoordináták:



r, Θ, φ

Kísérő triéder



Bevezetjük a $\underline{t}$ egységvektort (tangens, érintő)

$\underline{v} = v \cdot \underline{t}$

$\dot{\underline{v}} = \dot{v}\underline{t} + v \cdot \dot{\underline{t}}$

(illeszkedő) Simulókör R sugarral
(ha az adott pontban kétszer diffható a fv, akkor fel lehet rajzolni

R = görbületi sugár

$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r$ $\quad (\underline{e}_\varphi = \underline{t})$

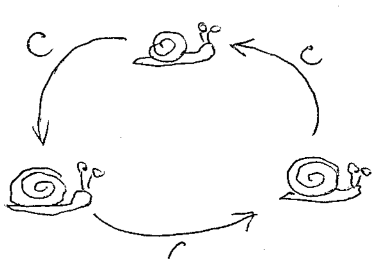
$\dot{\underline{t}} = -\dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r = \dot{\varphi} \cdot \underline{n}$

A simulókör középpontja felé mutató egységvektor: $\underline{n}$

$\dot{\underline{v}} = \dot{v}\underline{t} + \dot{\varphi} v \underline{n}$

$\dot{\underline{v}} = \dot{v}\underline{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}$ $\quad$ ($\underline{t}$: tangenciális, $\underline{n}$: normális komponens)

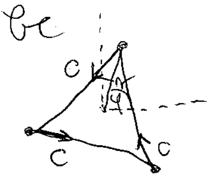
Példa: csigák (alakok) → kergetik egymást c sebességgel
↓
mikor találkoznak?

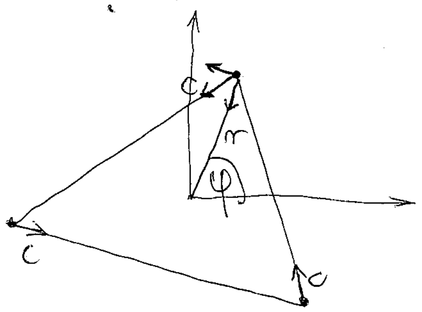


Másik példa: Kacsa egy valahova repülni akar, de mindig 1°-kal eltéveszti.

Csigás példa:

- a csigák mindig egyenlő oldalú háromszöget írnak be
- ez forog és zsugorodik
- célszerű polárkoordinátákat használni





$$v_r = -c\cdot\cos(30°) = \dot{r} \quad \text{(← időben nem változik)}$$

$$v_\varphi = c\cdot\sin(30°) = r\cdot\dot{\varphi} \quad \text{(← szintén konstans)*}$$

(*keressük azt a fv-t, amelyiknek a deriváltja konstans)

lineáris fv:

$$r(t) = r_0 - c\cdot\cos(30°)t$$

((Legy: ugyanez, csak $\cos(1°)$-kal))

találkoznak a csigák $r(T) = 0$ -ban

$$\Rightarrow r_0 = c\cdot\cos(30°)T$$

$$c\cdot\sin(30°) = \left(r_0 - c\cdot\cos(30°)\cdot t\right)\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{c\cdot\sin(30°)}{r_0 - c\cdot\cos(30°)t}$$

↑ szögsebesség?

ez a két t nem ugyanaz!

„fázisszög" – milyen szögből indultak a csigák

$$\varphi = \int_0^{t} \frac{c\cdot\sin(30°)}{r_0 - c\cdot\cos(30°)t}\,dt + \varphi_0$$

$$\left[\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_{x_0}^{x} = \ln(x) - \ln(x_0) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\ln\left(r_0 - c\cos(30°)t\right) = \frac{-1}{r_0 - c\cos(30°)t}\cdot c\cos(30°)$$

$$\frac{d}{dt}(-)\frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} \cdot \ln\left(r_0 - c\cdot\cos(30°)t\right) = [\dots]$$

$$\varphi(t) = -\operatorname{tg}(30°)\cdot \ln\left(\underbrace{r_0 - c\cdot\cos(30°)t}_{=r}\right)\Big|_0^r$$

$$\varphi = \operatorname{tg}(30°)\cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad \text{ahol} \quad r(t) = r_0 - c\cdot\cos(30°)t$$

↓

a középpont felé lineárisan közeledik, és ahogy közeledik(nek): Logaritmikus spirál

Mekkora a szögelfordulás, amikor találkoznak?

végtelen (matematikailag)

de: az elfordulási szög érzékeny a csigák méretére

a találkozási idő NEM —"— —"— —"—

$\boxed{09.24.}$

Dinamika

„A dinamika a mozgás okait vizsgálja"

Axiómák (Newton-axiómák)

1.) inerciarendszer: amelyben bármely magára hagyott test egyenes v. egy. mozg.-t végez (jó közelítéssel) tehát az inerciar.-t mindig az adott kísérlet szempontjából kell vizsgálni

2.) $\underline{F} = m\cdot\underline{a}$

$\underline{f} = \underline{a}$ ← ebbe eddig csak a gyorsulást definiáltuk

$\underline{g} \equiv \underline{f} - \underline{a} = 0$ → ez így értelmetlen, tehát meg KELL mondanunk, hogy mitől függ az $\underline{f}$

$\underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t)$ → a hely, sebesség és idő függvénye (így már van értelme)

$\underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{a}$ → pontosan másodrendű diff.egyenlet a mozgást leíró egyenlet 2>

Emiatt az egyenletnek mindig van (legfeljebb) 6 db paraméter, amit befolyásolni tudunk. (kísérleti tapasztalat)

3.) ((hatás-ellenhatás))

Másik tapasztalat:

két test $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ gyorsulással

↓

$\underline{a}_1$ $\underline{a}_2$

ezek mindig egy egyenesbe esnek, és irányuk ellentétes, és a gyorsulásuk aránya állandó, és ezt nem tudjuk befolyásolni

$$\left|\frac{\underline{a}_1}{\underline{a}_2}\right| = \text{áll.} = \frac{m_2}{m_1}$$

→ ((célszerű módon bevezettük a tömeg fogalmát))

Ha három testet veszünk, akkor páronként ugyanúgy viselkednek, mint a fenti kettő.

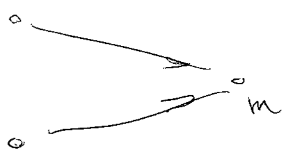
$$m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \cdot \underline{a}_2$$

((így csak a gyorsulások arányát mérjük, egyelőre nincs szükség F-re))

$$m \cdot \underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t) = m \cdot \underline{a} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

$$\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$$

((így végül csupán a gyorsulást felhasználva vezettük be a tömeget + erőt)) (+ kísérleti tapasztalatok!)



$$\left.\begin{aligned} m \cdot \underline{a}_1 &= \underline{F}_1 \\ m \cdot \underline{a}_2 &= \underline{F}_2 \end{aligned}\right\}$$

ha a két erő egyszerre hat, összeadjuk a két egyenletet

↳ kísérleti tapasztalat

$$m \cdot \underline{a}_3 = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$$

DE: pl. töltött részecskéknél az elektromos megosztás miatt nem érvényes az $\frac{1}{r^2}$-es távolságfüggés, ha távolítjuk őket, akkor viszont egyre inkább

Mit lehet ez ellen tenni?

Egyre kisebb töltött részecskéket veszünk.

$\Longrightarrow$ pontszerű töltés, pontszerű test

Pontszerű test esetén érvényes az erők vektoriális összeadása

$$m\cdot\underline{a} = \underline{F}(\underline{r},\underline{v},t)$$

$$m\cdot\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F}(\underline{r},\underline{v},t)$$

Impulzus:

$$\underline{p} = m\cdot\underline{v}$$

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \qquad \frac{\underline{p}}{m} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$\frac{\underline{p}(t+\Delta t)-\underline{p}(t)}{\Delta t} = \underline{F}(\underline{r}(t),\underline{p}(t),t)$$

$$\frac{\underline{r}(t+\Delta t)-\underline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\underline{p}(t)}{m}$$

kicsi hibát követünk Δt-vel

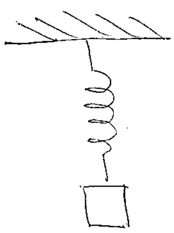
$$\left.\begin{aligned}\underline{p}(t+\Delta t) &\approx \underline{p}(t) + \underline{F}(\underline{r}(t);\underline{p}(t),t)\,\Delta t\\ \underline{r}(t+\Delta t) &\approx \underline{r}(t) + \frac{\underline{p}(t)}{m}\,\Delta t\end{aligned}\right\}$$

6 paramétert kell ismernünk, hogy meg tudjuk mondani ezeket Δt idő múlva

$\Rightarrow$ Euler-módszer

(numerikus megoldást tesz lehetővé)

Rugóra függesztett test



(azért nem negatív, mert most lefelé mutat a koord. r.)

$$m\cdot a = m\cdot g - Dx \qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$a = g - \frac{D}{m}x = g - \omega_0^2 x$$

$\boxed{09.25.}$ $\boxed{G4}$

Kinematika

$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_K$ ($\underline{r}$: tömegpont helye K vonatkoz. rendszerben)

$$\underline{v} = \underline{\dot{r}} = \underline{r}'(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}} = \underline{r}''(t) = \frac{d^2 r}{dt^2} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

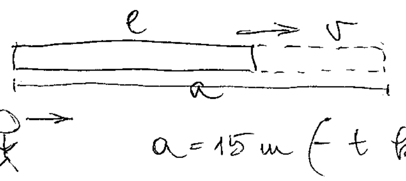
e.v.e.m. (= egyenes vonalú ...) : x, l, s; $v = $ áll.

e.v.e.gy. : x, l, s, h ; $a = $ áll.

$$s = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t$$

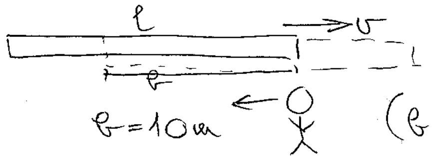
$$v = at + v_0$$

$\boxed{1.}$ l hosszúságú gerenda:



egy ló egy. v.e.m-sal húzza

$a = 15\,m$ (-t kell megtennie, hogy elérje a gerenda végét)



$b = 10\,m$ (b-t kell megtennie —||—)

Az ember e.v.e.m.-sal mozog; $l = ?$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a = l + v \cdot t} \\ \cancel{b = l - v \cdot t} \end{aligned}\right\}$$ ez így nem jó, ugyanis a két t nem egyenlő!

$$\left.\begin{aligned} a &= l + v \cdot t_1 \\ b &= l - v \cdot t_2 \\ \frac{t_1}{t_2} &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\}$$ több egyenletet nem is tudunk felírni (de ez is elég, mert csak az l-re vagyunk kíváncsiak (a 4 ismeretlenből csak egyre))

2→

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{a}{b} t_2$$

$$a = l + v\frac{a}{b}t_2 \quad / \cdot b$$

$$b = l - vt_2 \quad / \cdot a$$

$$ab = bl + vat_2$$

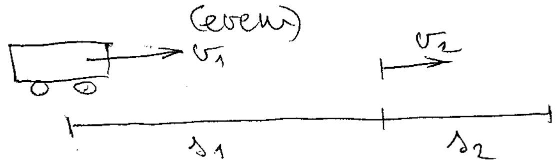
$$+ \quad ab = al - vat_2$$

$$2ab = (a+b)l$$

$$l = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \left(= \text{Harmonikus közép}\right) =$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = \underline{\underline{12\,m}}$$

$\boxed{2.}$



ⓐ $\overline{v} = v_{átl.} = ?$

ⓑ $s_1 = s_2 \Rightarrow \overline{v} = ?$

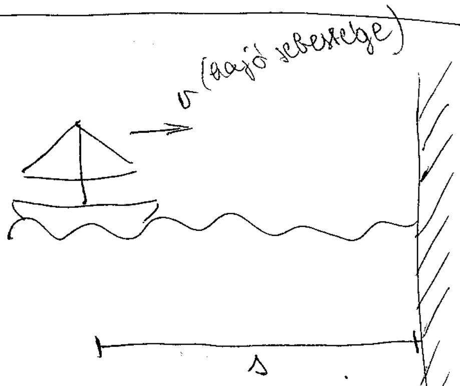
ⓐ $$\overline{v} = \frac{\sum s}{\sum t} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s_1+s_2}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}}$$

ⓑ $$\overline{v} = \frac{2s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{sv_1+sv_2}{v_1 \cdot v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}} \rightarrow$$ (megint harmonikus közép)

~~Az~~ átlagsebesség nem a sebességek átlaga!

Hf:

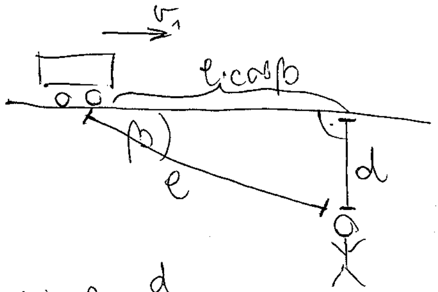
$\boxed{1.}$



c sebességű hangjelzést ad ki Δt ideig, ez visszapattan a falról, a visszaverődő hangot mennyi ideig hallják a hajón?

$\Delta t^* = ?$ (Megoldás? $\boxed{1. ZH.}$) ($\boxed{10.22}$ után)

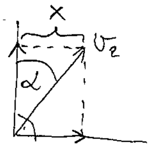
3.

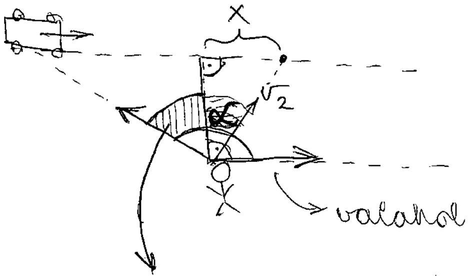


Milyen irányba kell rohannom, és mekkora min. sebességgel, hogy elérjem a buszt?

$\sin\beta = \frac{d}{\ell}$

$\boxed{v_{2,min} = ?}$





$\alpha_{v_{2,min}} = ?$ (ha pontosan elérjük: $t_1 = t_2 = t$)

busz: $v_1 \cdot t = \ell \cdot \cos\beta + x$

ember: $\left.\begin{aligned}(v_2 \cdot \sin\alpha)\cdot t &= x\\ (v_2 \cdot \cos\alpha)\cdot t &= d\end{aligned}\right\}\ \frac{x}{d} = \mathrm{tg}\,\alpha$

valahol ezen a szögtartományon belül kell mozogni

ezt a szöget kizárhatjuk, hiszen ennek a merőlegesre tükrözése = ugyanakkora táv, de több időnk van

$t = \frac{d}{v_2 \cdot \cos\alpha}$ $\qquad \frac{v_1 d}{v_2 \cdot \cos\alpha} = \ell \cos\beta + d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

$v_1 d = \ell \cdot v_2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + d \cdot v_2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\ \cancel{\cos\alpha}$

$v_1 d = \ell v_2 \cos\alpha \cos\beta + \ell v_2 \sin\alpha \sin\beta$

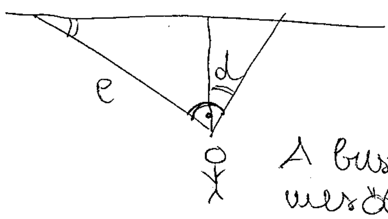
$v_1 d = \ell \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha - \beta)$

$v_{2,min} = \frac{v_1 d}{\ell \cdot \cos(\alpha-\beta)}$ (egy tört akkor minimális, ha a nevező maximális)

$\boxed{v_{2,min} = \frac{v_1 d}{\ell}}$

$\cos(\alpha - \beta) = 1$

$\alpha = \beta$



A buszra merőlegesen kell elindulni!

$\boxed{4.}$ $x_1 = t$, $y_1 = -\frac{1}{t}$ (az x koordináta az idő lin. fv-e)

két tömegpont

$x_2 = -2t$, $y_2 = \frac{1}{2t}$

Mikor lesznek a legközelebb egymáshoz?

$d_{min} = ?$ $t = ?$

$$d(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2t - t)^2 + \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{t}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{9t^2 + \frac{9}{4t^2}}$$

$$\dot{d} = 0 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9t^2 + \frac{9}{4t^2}}}}_{\text{ez nem nulla}} \cdot \left(18t - \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{t^3}\right)$$

$\Downarrow$

$$0 = 18t - \frac{18}{4} \cdot \frac{1}{t^3}$$

$$t^4 = \frac{1}{4}$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

→ Hf: melyik a jó megoldás?

Hf:

$\xrightarrow{\underline{v}}$ evem

egy gonosz manó leválasztja a kocsit a mozdonyról

$\underline{v}$-vel megy tovább

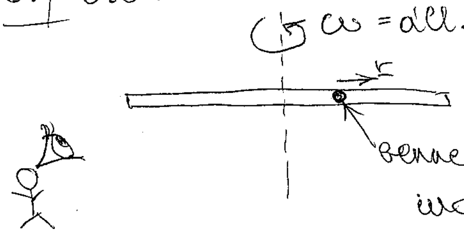
← $\underline{a}$ lassulással megáll

$$\frac{s_{mozdony}}{s_{kocsi}} = ?$$

$\boxed{\text{Mo.: ZH1.}}$ (10.22. után)

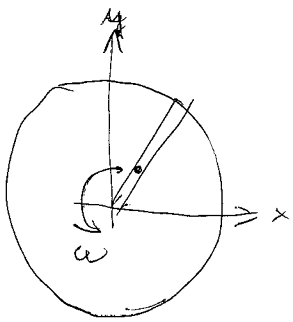
$\boxed{5.}$ cső:

ω = áll. forgás

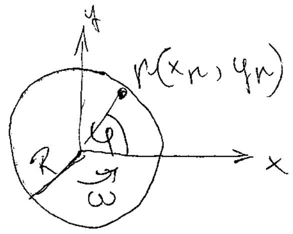


$\underline{v}$

benne golyócska (csőhöz képest $\underline{v}$ sebességgel mozog) felülnézetből:



$$\underline{r}_{\text{test a csőhöz képest}}(t) = \begin{bmatrix} vt \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$x_P = R \cdot \cos\varphi(t)$$

$$y_P = R \cdot \sin\varphi(t)$$

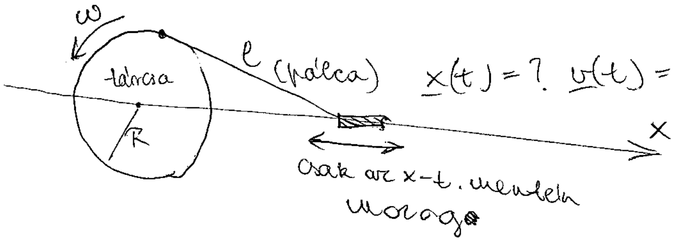
$$\underline{r}_P = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{\text{test a külső megf. közr.}}(t) = (vt) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{\dot{r}} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} + vt \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \omega$$

$$\underline{a} = \underline{\dot{v}} = v \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + v \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + v\omega^2 t \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Hf:

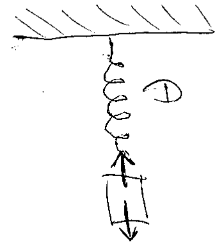


$\underline{x}(t) = ?$ $\underline{v}(t) = ?$ $\underline{a}(t) = ?$

Ma: köv. gyakorlat

$\boxed{09.30.}$ $\boxed{EA}$

$\boxed{1.}$ Rugóra függesztett test



A rugóban fellépő erő:

$$-Dx + mg = ma \quad /:m$$

$$-\omega_0^2 x + g = \ddot{x}$$

Keressük a megoldást

$$x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi) + B$$

alakban!

$$-\omega_0^2\left[A\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)+B\right] + g = -\omega_0^2 A\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$-\omega_0^2\cdot A\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi)\underbrace{-\omega_0^2 B + g}_{:=0} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

két szabad paraméter*

$$B = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{D}$$

(„egyensúlyi megnyúlás")

*ezeket mi határozzuk meg azzal pl. hogy mennyire nyújtjuk meg a rugót (kezdeti feltétel)

$\boxed{2.}$ „zuhanó" testek (ricinusolajban süllyedő test; kosarodkuum)

(M) A koordinátax. lefele mutat így nem $(-mg)$ hanem $(+mg)$)

$$mg - \lambda v = ma \quad /:m$$

(másik erő, ami a sebességgel arányos (nem fontos ~~súrlódás/légellenállás~~))

$$g - \beta v = a \qquad \beta = \frac{\lambda}{m}$$

(! nemsokára $\beta = \frac{\lambda}{2}$ jelölést fogunk használni (2 oldal múlva, víz alatti csill. rezg.))

$$g - \beta\dot{x} = \ddot{x}$$

↳ (ha nem lenne g: $-\beta v = \dot{v}$) → e^x

$$g - \beta v = \dot{v}$$

$$v(t) = v_0 e^{\alpha t} + v_\infty \qquad [v_\infty : \text{konstans}]$$

$v(t) = v_0 e^{\alpha t} + v_\infty$

$g - \beta v_0 e^{\alpha t} \cancel{+} \beta v_\infty = \alpha v_0 e^{\alpha t}$

$-\beta := \alpha$

$v_\infty := \frac{g}{\beta} = \frac{mg}{\lambda}$

$v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \frac{mg}{\lambda}$ (M) $t \to \infty \Rightarrow v_\infty \to 0$

(Mennyi idő után állandó a sebesség?)

$v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + v_\infty$ $\tau = \frac{1}{\beta}$

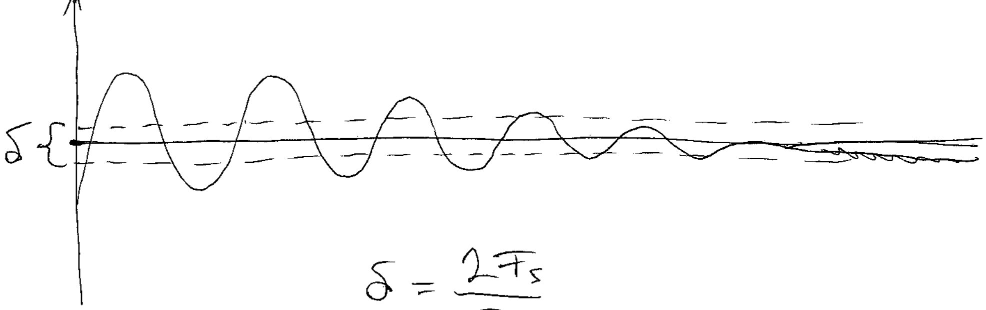
($\sim 5\tau$ után áll. be) $\to$ akkor kerül 1% alá?)

Csillapított rezgőmozgás (súrlódás, friction)

$ma = -Dx - F_s \cdot \frac{v}{|v|}$

(M a súrlódási erő ellentétes irányú a sebességgel!)

Tfh. a test ~~??~~ lefele mozog $\Rightarrow$ harmonikus rezgőmozgás, amelynek egyensúlyi helyzete el van tolódva $\frac{F_s}{D}$-vel (ha lefele mozog, fentebb van az e.h., ha felfele mozog a test, akkor lentebb tolódik az e.h.)



$\delta = \frac{2F_s}{D}$

A test ebben a δ intervallumban VALAHOL megáll.
(A piacon egy kofa ezt ki tudja használni egy kétkarú mérlegnél)
((Emiatt az ilyen tömegmérésnél több mérést kell végezni))
Az egyensúlyi helyzet függ a kezdeti feltételektől!

Csillapított rezgőmozgás (víz által csillapított)

$ma = -Dx - \lambda v$ $\qquad \beta = \frac{\lambda}{2m}$

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta \dot{x}$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

(másodrendű, állandó együtthatós, lineáris*, homogén)

$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$ alakban keressük.

$\dot{x} = \dot{A}(t)\cdot\sin(\omega t+\varphi) + A(t)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$

$\ddot{x} = \ddot{A}(t)\sin(\omega t+\varphi) + \dot{A}(t)\cdot\omega\cos(\omega t+\varphi) + \dot{A}(t)\omega\cos(\omega t+\varphi) +$

$+A(t)\cdot\omega^2(-\sin(\omega t+\varphi)) =$

$= \ddot{A}(t)\sin(\omega t+\varphi) + 2\cdot\dot{A}(t)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi) - A(t)\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$

Behelyettesítjük (a (t)-ket most nem jelöljük az A(t)-ben)

$[\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A]\sin(\omega t+\varphi) +$

$+[2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega]\cos(\omega t+\varphi) = 0$ (minden időpillanatban)

(megpróbálunk egy olyan A(t)-t találni, amely eltünteti bizonyos tagokat)(az A-s tagokat)

$2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega = 0$

$\dot{A} = -\beta A$ ($\rightarrow$ exponenciális)

$A(t) = A_0\cdot e^{-\beta t}$ $\Rightarrow$ behelyettesítjük ebbe.

$\beta^2 A_0 e^{-\beta t} - \omega^2 A e^{-\beta t} - 2\beta^2 A_0 e^{-\beta t} + \omega_0^2 A_0 e^{-\beta t} = 0$

$[\beta^2 - \omega^2 - 2\beta^2 + \omega_0^2] = 0$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

* Lin. kombinációként előáll az összes mo.

$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega_0 > \beta$ ⊛

(az amplitudó exponenciálisan csökken)
(ha ez megáll (5τ után), akkor ez tényleg az egyensúlyi helyzetben áll meg (nem pedig egy δ-n belül))

$$\left(\left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$$

Meg szokták adni: $\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-\beta T}$ (amplitudókat könnyű mérni)
(két egymást követő amplitúdó aránya)

$$-\ln \frac{A_{n+1}}{A_n} = \beta t \Rightarrow \text{logaritmikus dekrementum}$$

⊛ Mivel $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, ezért a fenti megoldás csak akkor megoldás, ha $\omega_0 > \beta$

„a megoldás 2. fele":

$x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha t}$ alakban keressük

$$\alpha^2 x_0 \cdot e^{\alpha t} + 2\beta\alpha \cdot x_0 e^{\alpha t} + \omega_0^2 x_0 e^{\alpha t} = 0$$

$$\underbrace{[\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2]}_{\text{(ha ez }:=0\text{, akkor az jó mo.)}} x^0 e^{\alpha t} = 0 \quad \text{(minden időpillanatban = 0!)}$$

$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$ a diffegyenlet karakterisztikus egyenlete (polinomja)

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

(ez a mo. akkor érvényes, ha $\beta > \omega_0$)
Ezek után a mo.:

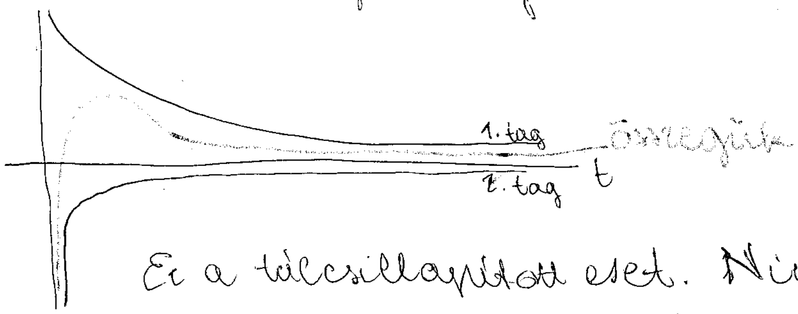
$$x(t) = x_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + x_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

(lineáris kombináció)

$\boxed{10.01.}$

folyt: $x(t) = x_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + x_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$

mindkét tag lecseng, de az első lassabban!



Ez a túlcsillapított eset. Nincs oszcilláció, legfeljebb a fv. egyszer "átmegy" a másik oldalára a t tengelynek (mint pl. a fenti esetben).

Matematikailag érdekes eset: $\beta = \omega_0$
(ilyen nincs a valóságban)

$$x_1 e^{-\beta t} + x_2 e^{-\beta t} = (x_1 + x_2) e^{-\beta t} := x_0 \cdot e^{-\beta t}$$

Csak egyetlen szabad paramétere van, így ez nem lehet általános megoldás.

Perturbáljunk! $(\beta \approx \omega_0) \to (\beta \xrightarrow{\text{közelít}} \omega_0)$

Fontos: rögzítjük a kezdeti feltételeket, kiszámoljuk, és úgy közelítünk β-val ω_0-hoz.

Nem számoljuk végig, eredmény:

$(x_1 + at) e^{-\beta t}$ (itt már 2 paraméter van)
(a mo. nagyon hasonlít a fenti túlcsillapított esethez)

Használjunk komplex számokat!

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ alakban keressük a mo-t!

⇒ $x_0(\underbrace{\alpha^2+2\beta\alpha+\omega_0^2}_{\stackrel{!}{=}0})e^{\alpha t}=0$

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

(úgy most nem zavarnak minket a gyök alatti negatív számok)

$\omega_0 > \beta$:

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$x(t) = x_1 \cdot e^{(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t} + x_2 e^{(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t}$$

De: így a kitérés egy komplex szám lesz.

Emiatt x_1, x_2 legyen $\in \mathbb{C}$

De: ez már 4 paraméter

Emiatt: x_1, x_2 legyenek egymás komplex konjugáltjai.

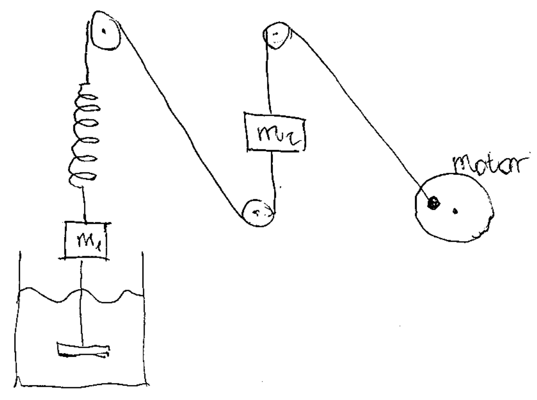
$$x_1 = |x_1| \cdot e^{i\varphi} \qquad x_2 = x_1^* = |x_1| \cdot e^{-i\varphi}$$

$$x(t) = |x_1| e^{-\beta t}\left[e^{i(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi)} + e^{-i(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi)}\right] \quad \#$$

(M) Euler azonosság: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

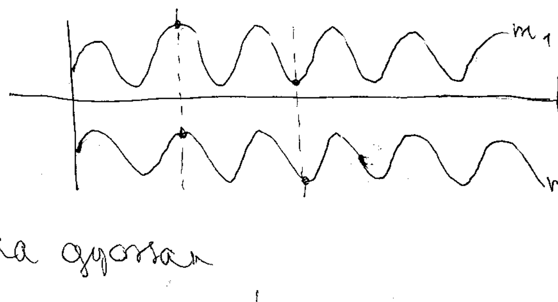
$$x(t) = 2|x_1| e^{-\beta t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t + \varphi\right)$$

Kísérlet:



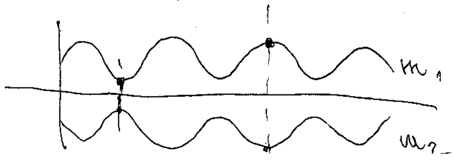
[m_1 és m_2 rezeg]

ha a motor lassan forog:



[azonos fázis]

ha gyorsan



[π eltolódás]

Kényszerrezgések (periodikus gerjesztéssel)

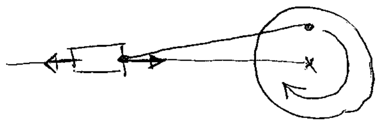
$$ma = -Dx - \underbrace{\lambda v}_{\text{csillapító folyadék}} + \underbrace{F_g(t)}_{\text{gerjesztő függvény}}$$

gerjesztő függvény (ez lehet bármilyen, most itt periodikus)

$$F_g(t) = F_g(t+T)$$

spec: $F_g(t) = F_0 \sin(\omega t)$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

(M) ez a motoros megoldás csak közelítőleg szinuszos igazából? = hf.



$$ma = -Dx - \lambda v + F_0 \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = f_0 \sin(\omega t) \qquad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

(inhomogén, másodrendű, állandó együtthatós)

Első próbálkozás: (ahol a körf. = gerjesztés (kísérleti tapasztalat))

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega)) \qquad A \text{ és } \varphi \ \omega\text{-tól függnek}$$

(M) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$x(t) = A[\sin(\omega t)\cdot\cos\varphi + \cos(\omega t)\cdot\sin\varphi]$$

$$\dot{x}(t) = A\omega[\cos(\omega t)\cdot\cos\varphi - \sin(\omega t)\cdot\sin\varphi]$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2[\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi]$$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = f_0\sin(\omega t)$ → behelyettesítünk:

$$[-A\omega^2\cos\varphi - 2\beta\sin(\varphi)A\omega + \omega_0^2 A\cos\varphi]\sin(\omega t) +$$

$$+[-A\cdot\omega^2\sin\varphi + 2\beta A\omega\cdot\cos\varphi + \omega_0^2 A\sin\varphi]\cos(\omega t) = f_0\sin(\omega t)$$

(ez akkor igaz, ha cos együtthatója $= 0$, sin-é pedig $= f_0$)

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi\right]A \overset{!}{=} f_0$$

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cdot\cos\varphi\right]A \overset{!}{=} 0$$

így a legegyszerűbb kiszámolni, ha négyzetre emeljük és összeadjuk őket

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}} \ (*)$$

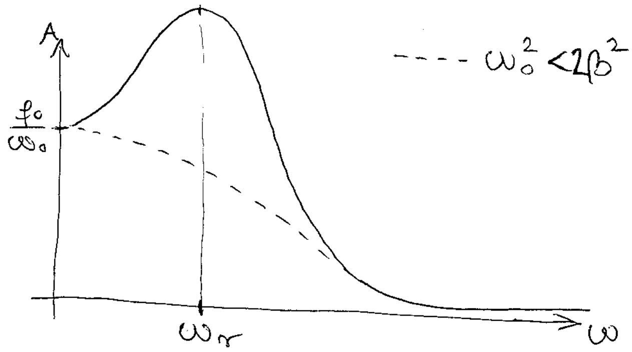
(ezzel is meg lehet oldani, de nehéz)

(*) (a fáziskülönbség 90°, ha a frekvencia ω_0)

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]A^2 = f_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$



(M) az ábrázoláshoz szélsőértéket kell keresnünk:

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right] = -\cancel{2}(\omega_0^2-\omega^2)\cancel{2}\omega + \cancel{4}\cdot 2\beta^2\omega \overset{!}{=} 0$$

$$\omega\left[2\beta^2-\omega_0^2+\omega^2\right] \overset{!}{=} 0$$

$\omega_1 = 0$ vagy → (mindig szélsőérték, hiszen PÁROS fv.)

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

(így már ábrázolható)

(M) $\omega_r \Rightarrow r =$ rezonancia

Mi lesz a fv. értéke ω_r-nél?

$$A(\omega_r) = \frac{f_0}{\sqrt{\left[\omega_0^2-(\omega_0^2-2\beta^2)\right]^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} =$$

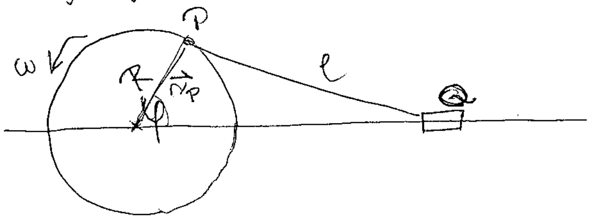
$$= \frac{f_0}{\sqrt{(-2\beta^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{f_0}{2\beta\cdot\sqrt{\beta^2+\omega_0^2-2\beta^2}} =$$

$$A(\omega_r) = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

((a rezonanciánál ω_0-tól el van tolódva a maximum))

$\boxed{10.02.}\ \boxed{GY}$

Dugattyú (házi volt):



$$P:\ \underline{r}_P = \begin{bmatrix} R\cdot\cos\varphi(t) \\ R\cdot\sin\varphi(t) \end{bmatrix} = R\cdot\begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$Q:\ \underline{r}_Q = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{PQ} = \ell = \text{áll.} = \sqrt{(R\cdot\cos(\omega t) - x_2)^2 + (R\cdot\sin\omega t)^2}$$

$$\ell^2 = R^2\cos^2(\omega t) - 2R\cos(\omega t)\cdot x_2 + x_2^2 + R^2\sin^2(\omega t)$$

$$0 = x_2^2 - 2R\cos(\omega t)x_2 + R^2 - \ell^2$$

$$x_2 = \frac{\cancel{2}R\cos(\omega t) \pm \sqrt{\cancel{4}R^2\cos^2(\omega t) - \cancel{4}(R^2 - \ell^2)}}{\cancel{2}}$$

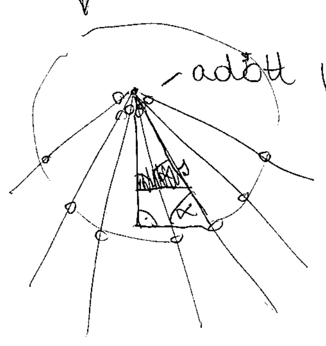
(M) A negatív gyökkel a dugattyú a túloldalon (bal oldalon) lenne, így az most nem érdekes.

$$x_2 = R\cos(\omega t) + \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) - R^2 + \ell^2}$$

$$v_2 = \dot{x}_2$$

$$a_2 = \ddot{x}_2$$

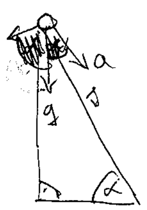
$\boxed{2.}$ $\downarrow$ g gravitációs tér



adott pont, ahonnan golyókat indítunk a félegyenesekkel jelölt lejtőkön

Hol lesznek ~~adott~~ t idő múlva a golyók? Lássuk be, hogy ezek a golyók egy körön vannak rajta!

Mindegyik lejtőhöz rendelhetünk egy meredekséget: α



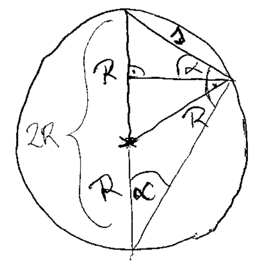
~~A~~ g-t felbontjuk az s lejtőre $\perp$ és $\parallel$ komponensekre

$$a = g \cdot \sin\alpha$$

$$s = \frac{a}{2} t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \sin\alpha}}$$

! Ezek az s utak a kör húrjai!

Mivel az α meghatározza az egyes mozgásokat, a α nem szerepelhet a végeredményben!!! ?



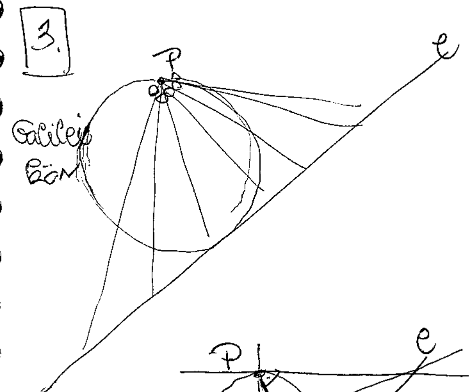
$$s = 2R \cdot \sin\alpha$$

$$t = \sqrt{\frac{4R \cdot \sin\alpha}{g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

? ✓ (nem tartalmaz α-t)

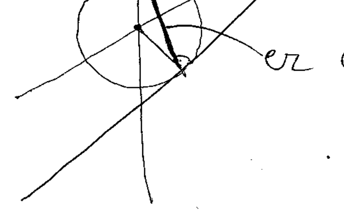
Ennek a körnek a neve Galilei-kör

$\boxed{3.}$



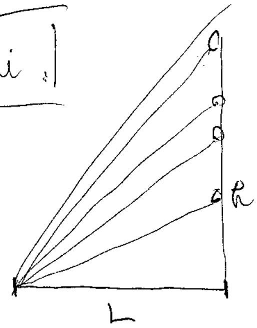
Melyik lejtő mentén éri el a golyó leghamarabb az e egyenest?

Rajzoljunk Galilei-kört, amely egy pontban érinti az egyenest.



ez az lejtő lesz a leggyorsabb.

Házi:

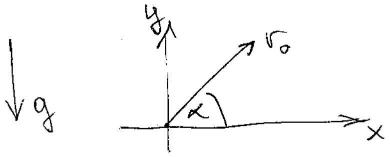


h változik

milyen h esetén lesz t minimális?

Mo.: $h = L$ sugarú Galilei-kör $\rightarrow h = L$

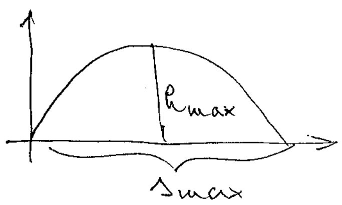
Hajítások



(2 dimenziós mozgás $\rightarrow$ 2 dim. vektorok)

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \xleftarrow{\frac{d}{dt}}$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \end{bmatrix}$$



$y(x) = ?$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \end{bmatrix} \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(x) = \frac{\cancel{v_0} \sin\alpha \cdot x}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2$$

$$y(x) = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2} \left(1 + tg^2\alpha \right) x^2$$

$\Rightarrow$ ez a pályaegyenlet (parabola)

$\rightarrow$ konkáv, zérushelyei:

$x_1 = 0$ (triviális) $\leftarrow$ emiatt oszthatunk le x-szel

$x_2 = s_{max} \Rightarrow 0 = tg\alpha \cdot \cancel{x} - \frac{g}{2v_0^2} \left(1 + tg^2\alpha \right) x^{\cancel{2}}$

$$s_{max} = x = \frac{tg\alpha}{\frac{g}{2v_0^2}\left(1 + tg^2\alpha\right)} = \frac{tg\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\frac{g}{2v_0^2}} = \boxed{\frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}}$$

$h_{max} = ?$

Mivel a parabola szimmetrikus, $h_{max} = y\left(\frac{s_{max}}{2}\right)$

$$h_{max} = tg\alpha \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} - \frac{\cancel{g}}{2v_0^{\cancel{2}}}\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^{\cancel{4}\,2}\cdot\sin^2(2\alpha)}{g^{\cancel{2}}4} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g}\left(\sin(2\alpha)\, tg\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2(2\alpha)}{4}\right) =$$

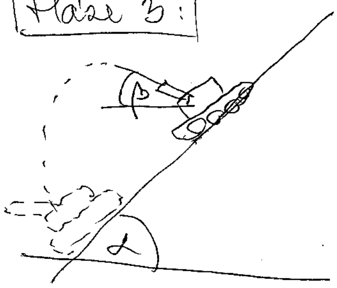
$$= \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot 2\cdot\sin\alpha\,\cancel{\cos\alpha} - \frac{1}{\cancel{4}\cancel{\cos^2\alpha}}\cdot \cancel{4}\sin^2\alpha\,\cancel{\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$$

$\boxed{\text{Házi 2:}}$

Adott v_0 esetén milyen α szögben kell lőnöm egy csúzlival, hogy eltaláljam a P pontban levő galambot?

$\boxed{\text{Házi 3:}}$



Tank: egyenes v. egy. gyorsuló mozgással megy le a lejtőn. Kilő egy lövedéket. Mekkora β szög alatt lője ki, hogy eltalálja saját magát?

$\boxed{5.}$ Ferde hajítás

α, v_0 adott. A pillanatnyisebességvektor ($\underline{v}(t)$) mikor lesz merőleges v_0-ra? $t = ?$

M (45°-os α esetén becsapódáskor)

Két vektor akkor $\perp$, ha skalársz. $= 0$. →

$$\underline{v_0} = \begin{bmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \end{bmatrix}$$

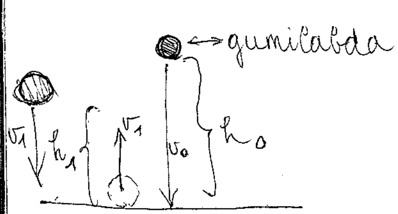
$$\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha - gt \end{bmatrix}$$

$$0 = v_0^2\cos^2\alpha + v_0^2\sin^2\alpha - v_0\sin\alpha\cdot gt =$$

$$= v_0^{\cancel{2}} - \cancel{v_0}\sin\alpha\cdot gt$$

$$t = \frac{v_0}{g\cdot\sin\alpha}$$

$\boxed{6.}$ $\downarrow g$



h magasságból leesik egy gumilabda

$\forall$ pattanáskor csökken a sebessége:

$v_{i+1} = k\cdot v_i \qquad 0<k<1$

Ez a labda végtelen sokszor pattan vissza. Mekkora utat tesz meg?

$$\sum_{n\to\infty} h = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \dots + 2h_n$$

(azért szorozunk 2-vel, mert $v_{visszapattan} = v_{leesik}$)

(kivéve az első leejtésnél)

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\left(\begin{array}{l} v=0 \to v = v_0 - gt \to v_0 = gt \to t = \frac{v_0}{g} \\ s = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{\cancel{g}}{2}\frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} = \frac{2v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \end{array} \right)$$

$$v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}\cdot k$$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\cancel{2g}h_0\cdot k^2}{\cancel{2g}} = h_0\cdot k^2$$

$$h_2 = h_1\cdot k^2 = h_0\cdot k^4$$

$$\sum h = h_0 + 2h_0\left(k^2 + k^4 + k^6 + \dots + k^{2n}\right)$$

$\hookrightarrow$ mértani sor összege: S_n

$$\sum h = h_0 + 2h_0 \cdot \left[k^2 \cdot \frac{k^{2n}-1}{k^2-1} \right]$$

De: $n \to \infty$ [Mivel $|q|<1$]: $k^{2n} \to 0$

$$\sum h = h_0 + 2h_0 \cdot k^2 \cdot \frac{1}{1-k^2} =$$

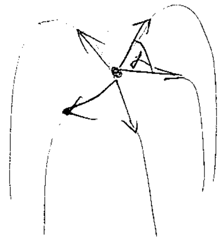
$$= h_0\left(1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = h_0 \cdot \frac{1+k^2}{1-k^2}$$ (ez az összeg véges)

(M) Tökéletesen rugalmas ütközésnél $k=1 \to \sum h = \infty$
— " — rugalmatlan — " — $k=0 \to \sum h = h_0$

$\boxed{\text{Házi 4:}}$ $\boxed{6.}$ folytatása

Mennyi időre van szükség ehhez? $\sum t = ?$
(Mo: véges idő, mértani sor, $q = k$)

$\boxed{7.}$ $\downarrow g$



Mindenféle irányokba hajítunk. Pl. tűzijáték.

Adott időpillanatban ezek a testek milyen felületen helyezkednek el?

a) megoldás:
A vonatkoztatási rendszert igazítsuk a g-vel zuhanó középponthoz: ekkor GÖMB

b) megoldás: („hagyományos koord. r.")

$$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2$$

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

(M) A végeredmény nem tartalmazhatja α-t!

$$\left(y + \frac{g}{2}t^2\right)^2 = v_0^2 \sin^2\alpha \cdot t^2$$

$$(+) \quad x^2 = v_0^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot t^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{g}{2}t^2\right)^2 = v_0^2 t^2$$

Ez egy kör egyenlete, melynek középpontja az idő függvényében változik (g gyorsulással zuhan).

10.07.

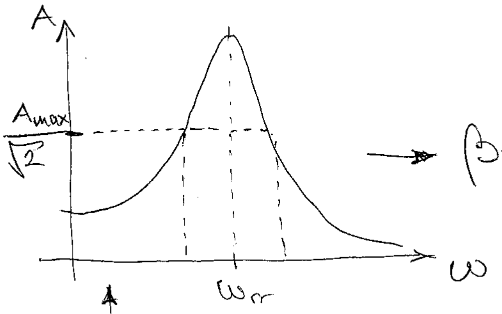
Folytatás: Kényszerrezgések

azt kaptuk, hogy:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2) + 4\omega^2\beta^2}}$$

$$A_{max} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}}$$



→ β-val fordítottan arányos a magassága

Mit mondhatunk a görbe szélességéről? = Mikor esik le a $\sqrt{2}$-ed részére? → (Def.) ↔ $A_{max}/\sqrt{2}$

$$(\omega_0^2-\omega^2) + 4\omega^2\beta^2 = 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^4 + (-2\omega_0^2 + 4\beta^2)\omega^2 + \omega_0^4 - 8\beta^2\omega_0^2 + 8\beta^4 = 0$$

(ez ω^2-nek másodfokú egyenlete).

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2\omega_0^2-4\beta^2 \pm \sqrt{(-2\omega_0^2+4\beta^2)^2 - 4(\omega_0^4-8\beta^2\omega_0^2+8\beta^4)}}{2} =$$

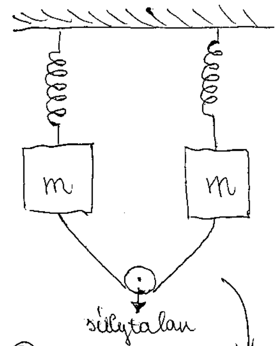
Diszkrimináns:

$D =$ ~~Diszkrimináns~~ $\cancel{4\omega_0^4} - 16\omega_0^2\beta^2 + 16\beta^4 - \cancel{4\omega_0^4} + 32\beta^2\omega_0^2 - 32\beta^4$

$$D = \beta^2(16\omega_0^2 + 16\beta^2) = 16\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega_1^2-\omega_2^2 = \sqrt{16\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)} = 4\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} = \underbrace{(\omega_1+\omega_2)}_{\approx 2\omega_r}\underbrace{(\omega_1-\omega_2)}_{\Delta\omega}$$

(M) β nő ⇒ a rezonanciagörbe egyre magasabb és keskenyebb lesz.



Rezgések összeadása

(M) Csak az egyik testet térítjük ki – ekkor a másik nem mozdul.

Azonos frekvenciájú rezgések összeadása különböző amplitúdóval és fázissal:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$x(t) = A_1 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin(\omega t) + A_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos(\omega t) + A_2 \cos\varphi_2 \sin(\omega t) +$$

$$+ A_2 \sin\varphi_2 \cos(\omega t) =$$

$$= \underbrace{(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)}_{A \cdot \cos\varphi} \sin(\omega t) + \underbrace{(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)}_{A \cdot \sin\varphi} \cdot \cos(\omega t) =$$

Olyan A-t és φ-t keresünk, hogy ezek teljesüljenek.

$$= A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

(1.) $A \cdot \cos\varphi \stackrel{!}{=} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$

(2.) $A \cdot \sin\varphi \stackrel{!}{=} A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}$$

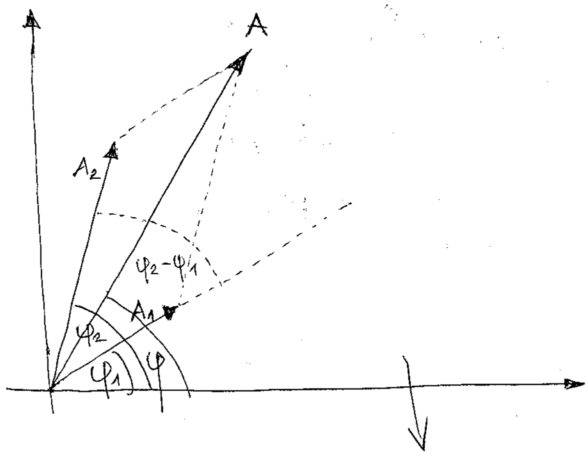
$$A \Leftarrow (1.)^2 + (2.)^2$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\overbrace{(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}^{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \underbrace{2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{interferencia-tag}}$$

1.) ha $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor $A^2 = A_1^2 + A_2^2$

2.) ha $\varphi_1 = -\varphi_2$, akkor $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$



Ezt tekintsük a komplex számunknak!

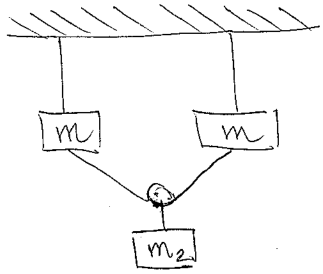
$$z_1 = A_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = A_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

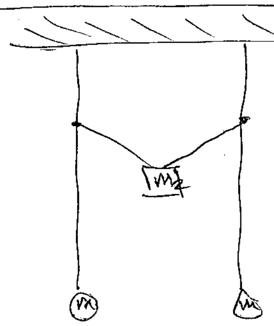
$$A \cdot e^{i\varphi} = A_1 \cdot e^{i\varphi_1} + A_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

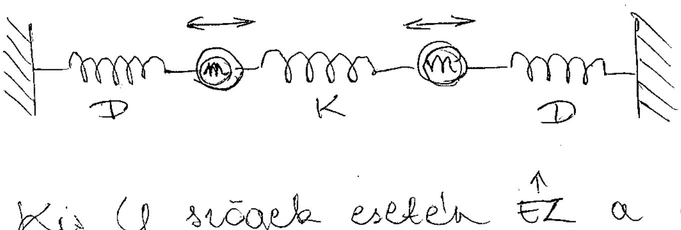
Magát a rezgést is adjuk meg egy komplex szám segítségével!

$$x = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$



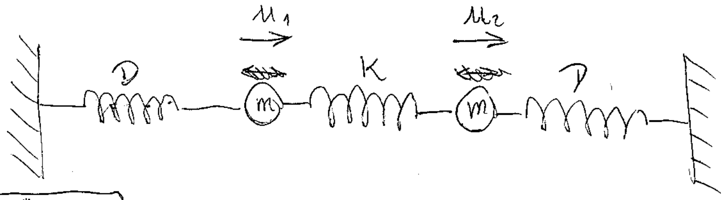
(Ugyanúgy átadja az egyik test a rezgését a másiknak.)
Ha csak az egyik testet térítjük ki, „rezgést cserélnek”.





Kis φ szögek esetén EZ a rendszer is ekvivalens a fenti fonálingással

$\boxed{10.08.}$



u_1, u_2 kezdeti kitérés(ük) és

$\boxed{u_1 < u_2}$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= -D\cdot u_1 + K(u_2-u_1) \\ m\ddot{u}_2 &= -Du_2 - K(u_2-u_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\Omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\ddot{u}_1 = -\omega_0^2 u_1 + \Omega^2(u_2-u_1)$$

$$\ddot{u}_2 = -\omega_0^2 u_2 - \Omega^2(u_2-u_1)$$

Keressük a mo-t: (a fázisuk legyen egyforma, nulla)
(frekvenciájuk legyen egyf.)

$$u_1(t) = A_1\cdot\sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = A_2\sin(\omega t)$$

$$-\omega^2 A_1\cdot \cancel{\sin(\omega t)} = \left[-\omega_0^2 A_1 + \Omega^2(A_2-A_1)\right]\cancel{\sin(\omega t)}$$

$$-\omega^2 A_2\cdot \cancel{\sin(\omega t)} = \left[-\omega_0^2 A_2 - \Omega^2(A_2-A_1)\right]\cdot\cancel{\sin(\omega t)}$$

$$\left.\begin{aligned} (\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2)A_1 - \Omega^2\cdot A_2 &= 0 \\ (\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2)A_2 - \Omega^2 A_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(M) triviális mo: $A_1 = 0$, $A_2 = 0$

$$A_1 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\omega^2-\Omega^2}A_2 \quad (*)$$

$$(\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2)A_2 - \frac{\Omega^4}{\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2}A_2 = 0$$

$$\frac{(\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2)^2-\Omega^4}{\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2}A_2 = 0$$

→ omegát ki tudjuk úgy választani, hogy vmi = 0 legyen

? úgy

$$(\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2)^2 = \Omega^4 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\omega_0^2-\omega^2+\Omega^2 = \pm\Omega^2$$

Mo: $\omega_1^2 = \omega_0^2$; $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

→ behelyettesítjük (*)-ba

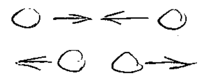
Behelyettesítés eredménye:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \Rightarrow A_1 = A_2 \quad \begin{pmatrix} u_1: \mapsto \\ u_2: \mapsto \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega^2 \Rightarrow A_1 = -A_2 \quad \begin{pmatrix} u_1: \leftarrow \\ u_2: \mapsto \end{pmatrix}$$

ez az a két eset, amikor a [fonálingákat] vagy ugyanúgy térítjük ki, vagy pedig épp ellentétesen. Ekkor nincs „rezgésátadás", szinuszosan rezegnek (harmonikusan) a végtelenségig.

Pl.:  vagy ugyanúgy rezeg a két golyó $(A_1 = A_2)$; ~~ekkor~~ Ekkor a középső rugó nem mozdul

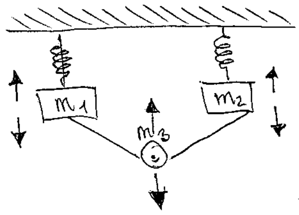
vagy ellentétesen mozognak $(A_2 = -A_1)$: 

Adjuk össze a két megoldást!

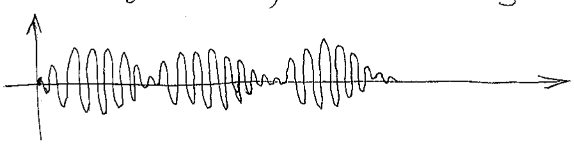
$$u_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$u_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

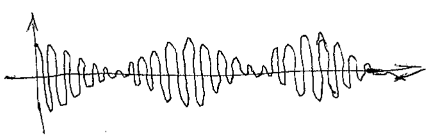
→ ha ezt felírtuk, ezzel már meghatároztuk u_2-t:



ha m_1-et és m_2-t ellentétes fázissal térítjük ki, akkor m_3 így rezeg:



ha m_1-et és m_2-t azonos fázissal t. ki, akkor m_3:



Ezek egyenlettel leírva: (a frekvenciák különböznek, hiszen $m_1 \neq m_2$)

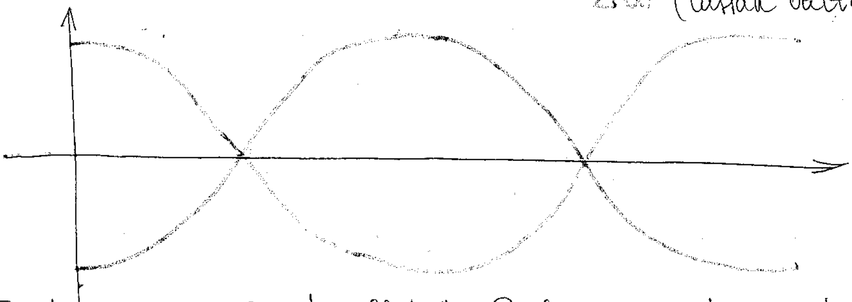
$$u = A \cdot \sin(\omega_1 t) + A \cdot \sin(\omega_2 t) =$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2 \cdot A \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\sim \omega_1} t\right) \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}_{\sim \Delta\omega} t\right)$$

$$= 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$

(lassan változó cos-os tag)



ez a $\boxed{\text{LEBEGÉS}}$

Tehát ezek a kissé eltérő frekvenciájú rezgések felfoghatók azonos frekv.-jú rezgéseknek, amelyeknek a fáziskülönbsége lassan változik.

Merőleges rezgések összeadása

$$x = A_1 \cdot \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \sin(\omega t) = \frac{x}{A_1}$$

$$y = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A_2 \cdot \left[\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\right]$$

$$\left[\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta\right]$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \sin\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cdot \cos\varphi\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{A_1^2}\right) \cdot \sin^2\varphi$$

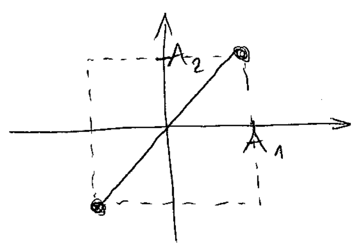
$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{y}{A} \frac{x}{A_1} \cdot \cos\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \cdot \cos^2\varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A_1}\right)\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{y}{A_2} \cdot \frac{x}{A_1}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2\varphi$$

1. Ha $\varphi = 0$, akkor egy egyenes mentén rezegnek:

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1} + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 0$$

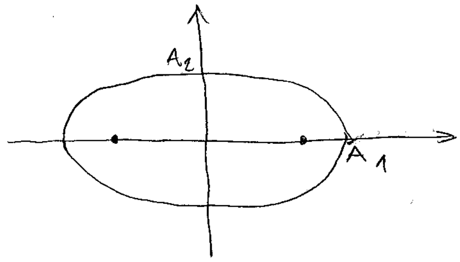
$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right)^2 = 0$$



$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x$$ → ez egy egyenes SZAKASZ egyenlete

2. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{ELLIPSZIS}$$



3. A többi φ-vel fel lehet írni egy olyan elforgatott koordinátarendszert, amelyben minden ellipszis írja le a pályát

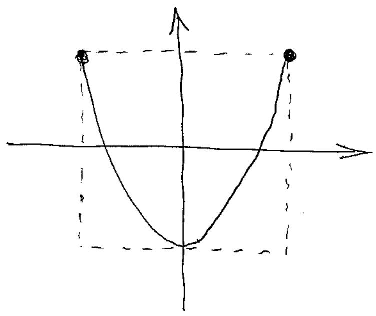
Legyen az egyik rezgés frekvenciája ~~amplitudója~~ kétszerese a másiknak!

$$x = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = A \cdot \cos(2\omega t) = A\left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right) = A\left(\cos^2(\omega t) - 1 + \cos^2(\omega t)\right) =$$

$$= A\left(2\cos^2(\omega t) - 1\right)$$

$$\frac{y}{A} = 2\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 1 \rightarrow \text{"parabola-szakasz":}$$

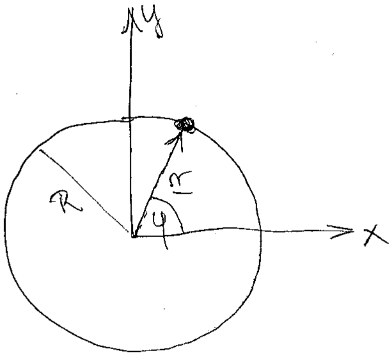


$\boxed{10.09. \mid GY}$

1. ZH: csak kinematika: november 6.

Tankos házi: fontos! a tank kezdősebesség nélkül indul el

Körmozgás



$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$$

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos\varphi(t) \\ R \cdot \sin\varphi(t) \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = R \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$\underline{v}\cdot\underline{r} = 0$ (tehát merőlegesek)

$$|\underline{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{\underline{v}\cdot\underline{v}} = \sqrt{R^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2 + R^2\cos^2\varphi\cdot\dot\varphi^2} = \sqrt{R^2\cdot\dot\varphi^2} =$$

$$= R\cdot\dot\varphi$$

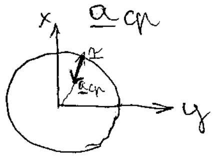
$\dot\varphi := \omega$ (a szögelfordulás idő szerinti deriváltja a szögsebesség)

$[\omega] = \frac{1}{s}$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = R\cdot\begin{bmatrix}-\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2 - \sin\varphi\cdot\ddot\varphi \\ -\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2 + \cos\varphi\cdot\ddot\varphi\end{bmatrix} a_x = \underbrace{R\dot\varphi^2\begin{bmatrix}-\cos\varphi \\ -\sin\varphi\end{bmatrix}}_{\underline{a}_{cp}} + \underbrace{R\ddot\varphi\begin{bmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{bmatrix}}_{\underline{a}_{tg}}$$

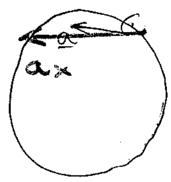
$\ddot\varphi := \beta$

$|\underline{a}_{cp}| = R\omega^2$



$|\underline{a}_{tg}| = R\cdot\beta$

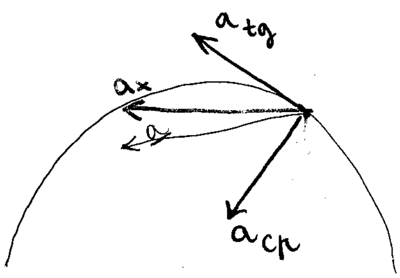
$[\beta] = \frac{1}{s^2}$



$$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = \Big[R\big(\cos^2\varphi\cdot\dot\varphi^4 + \sin^2\varphi\cdot\ddot\varphi^2 +$$

$$+ \cancel{2\cos\varphi\cdot\dot\varphi^2\cdot\sin\varphi\cdot\ddot\varphi} + \sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^4 + \cos^2\varphi\cdot\ddot\varphi^2$$

$$\cancel{-2\sin\varphi\cdot\dot\varphi^2\cos\varphi\cdot\ddot\varphi}\big)\Big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R^2\dot\varphi^4 + R^2\ddot\varphi^2} =$$



$$= \sqrt{(R\dot\varphi^2)^2 + (R\ddot\varphi)^2} = \sqrt{(R\omega^2)^2 + (R\beta)^2} =$$

$$= \sqrt{\underline{a}_{cp}^2 + \underline{a}_{tg}^2}$$

(P) $R = 1\,m$

$\varphi(t) = t^3 - 2t$ $\qquad t = 1s$: $\underline{v}, \underline{a}, |\underline{v}|, |\underline{a}|, |\underline{a}_{cp}|, |\underline{a}_{tg}| = ?$

$$\underline{v}(t) = R\cdot\begin{bmatrix}-\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \cos\varphi\cdot\dot\varphi\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}-\sin(t^3-2t)\cdot(3t^2-2) \\ \cos(t^3-2t)\cdot(3t^2-2)\end{bmatrix};\ \underline{v}(1) = 2$$

$\dot\varphi = 3t^2 - 2$

$|\underline{v}(t)| = R\cdot\dot\varphi = 1(3t^2-2)$

$\ddot\varphi = 6t - 0$

$|\underline{v}(1)| = 1(3-2) = 1$

$$\underline{v}(1) = 1 \cdot \begin{bmatrix} -\sin(-1)\cdot 1 \\ \cos(-1)\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}(t) = 1 \cdot \begin{bmatrix} -\cos(t^3-2t)(3t^2-2)^2 - \sin(t^3-2t)\cdot 6t \\ -\sin(t^3-2t)(3t^2-2)^2 + \cos(t^3-2t)\cdot 6t \end{bmatrix}$$

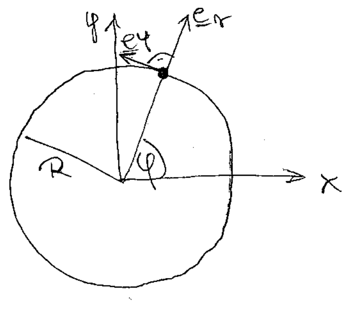
$$\underline{a}(1) = \begin{bmatrix} -\cos(-1)\cdot 1^2 - \sin(-1)\cdot 6 \\ -\sin(-1)\cdot 1^2 + \cos(-1)\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}_{cp}| = 1\cdot(3t^2-2)^2 \qquad |\underline{a}_{cp}(1)| = 1\cdot 1^2 = 1$$

$$|\underline{a}_{tg}(t)| = 1\cdot 6t \qquad |\underline{a}_{tg}(1)| = 6$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{1^2\left[(3t^2-2)^2\right]^2 + 36t^2} \qquad |\underline{a}(1)| = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$$

Másik reprezentáció (a koord.r. együtt mozog a testtel)



$$|\underline{e}_r| = |\underline{e}_\varphi| = 1$$

$$\{\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi\} = K \text{ koord.r.}$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}_K$$

Most az egységvektornak van időfüggése!

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}_r &= \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \\ \underline{e}_\varphi &= \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cdot\dot\varphi \\ \cos\varphi\cdot\dot\varphi \end{bmatrix} = \underline{e}_\varphi\cdot\dot\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_\varphi = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\cdot\dot\varphi \\ -\sin\varphi\cdot\dot\varphi \end{bmatrix} = \underline{e}_r(-\dot\varphi) = -\underline{e}_r\dot\varphi$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{\begin{bmatrix} R(\underline{e}_r) \\ 0 \end{bmatrix}} = R \cdot \underline{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \cdot \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = R\left(-\underline{e}_r \cdot \dot{\varphi}^2 + \underline{e}_\varphi \cdot \ddot{\varphi}\right) = \begin{bmatrix} -R\dot{\varphi}^2 \\ R\ddot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Rezgések (harmonikus r.)

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ — M: az x-et nem húzzuk alá, hiszen skalár

$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \cdot x(t)$

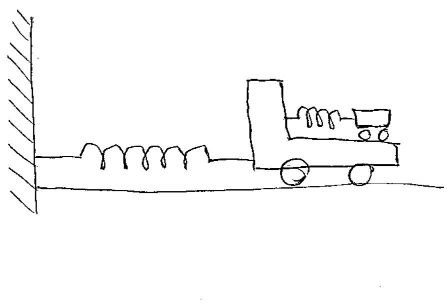
A, ω, φ : $A > 0$; $\omega > 0$; $0 < \varphi < 2\pi$

$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ → a harmonikus rezgés kinematikai feltétele: $\ddot{x} \sim -x$

Rezgések összetétele

(1.) Párhuzamos rezgések



$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

$x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$\boxed{1.1.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\boxed{1.1.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Pl.: $3 \sin t + 4 \cos t = A \sin(t + \varphi)$.

$$3 \sin t + 4 \cos t = A \sin t \cdot \cos\varphi + A \cdot \sin\varphi \cdot \cos t$$

(!) Akkor, hogy ez $\forall t$-re igaz legyen, ez azaz. lehetséges, ha a jobb- és baloldali $\sin t$-k együtthatói megegyeznek, és a —"— —"— $\cos t$-k —"— —"—.

$\forall t$-re: $3 = A \cdot \cos\varphi \Rightarrow A = 5$ (négyzetre emel, $\sqrt{\ }$-t von)

$4 = A \cdot \sin\varphi \rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{4}{3}$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\left[\sin(\omega t)\cos\varphi_1 + \cos(\omega t)\cdot\sin\varphi_1\right] +$$

$$+ A_2\left[\sin(\omega t)\cos\varphi_2 + \cos(\omega t)\cdot\sin\varphi_2\right] =$$

$$= \underbrace{(A_1\cdot\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{\stackrel{!}{=} A\cdot\cos\varphi}\cdot\sin(\omega t) + \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{\stackrel{!}{=} A\cdot\sin\varphi}\cos(\omega t) =$$

$$= A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$ → Egy ugyanolyan frekvenciájú, szintén szinuszos rezgést kapunk

$\boxed{10.14.}$ $\boxed{84}$ folyt.

$$A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + A_1^2\sin^2\varphi_1 + A_2^2\sin^2\varphi_2 +$$

$$+ 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

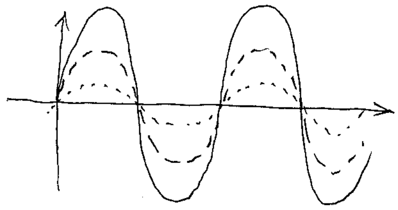
$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = A^2$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$\boxed{1.1.1.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ és $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

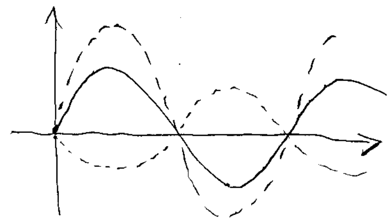
$$A = A_1 + A_2$$



$\boxed{1.1.2.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ és $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = \pm(A_1 - A_2)^2$$

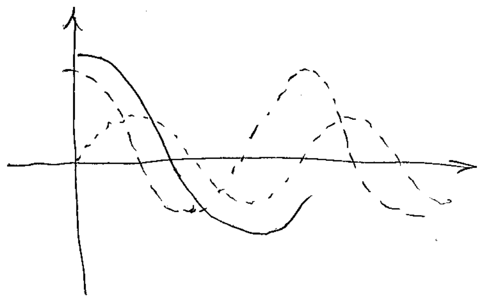
$$A = |A_2 - A_1|$$



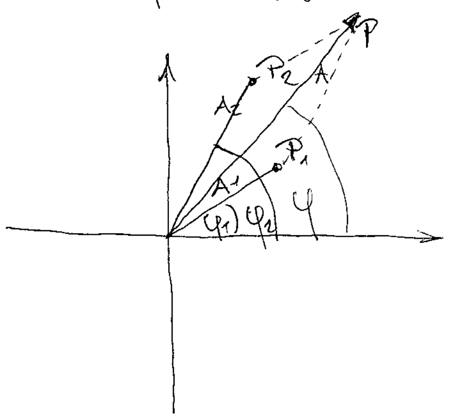
$\boxed{1.1.3.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ és $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$



Komplex számsík:



$$\left.\begin{matrix} P_1(A_1, \varphi_1) \\ P_2(A_2, \varphi_2) \end{matrix}\right\} \to \oplus \to P(A, \varphi)$$

$\boxed{1.2.}$

** nem konstans amplitúdó $\Rightarrow$ nem harmonikus rezgés!

$$A_1 = A_2 = A$$

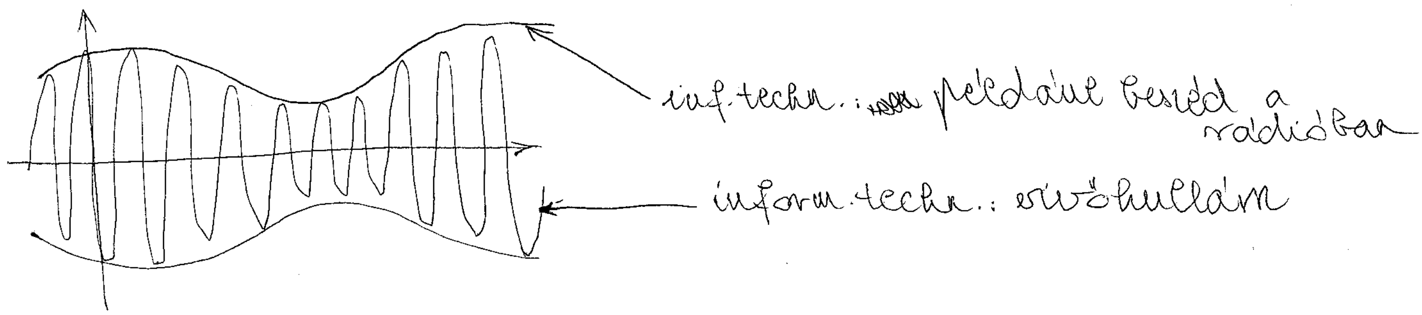
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\right] =$$

$$\text{(M)}\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

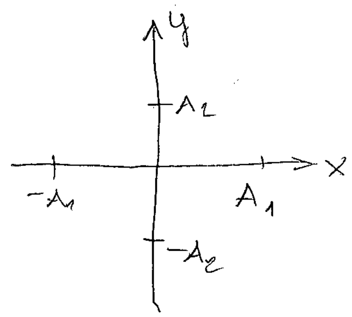
$$= \underbrace{2A\cdot\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)}{2}\right)}_{\stackrel{!}{=} A(t)^{**}}\cdot\sin\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t + (\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right)$$

$\rightarrow$

Lerajzolva:



② Merőleges rezgések



$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t)$ ((kezdőfázis nulla))

$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$

$\boxed{2.1.}$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$\frac{x}{A_1} = \sin(\omega t)$ $\frac{y}{A_2} = \sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{\sin(\omega t)}_{\frac{x}{A_1}}\cos\varphi + \underbrace{\cos(\omega t)}_{\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}}\sin\varphi$

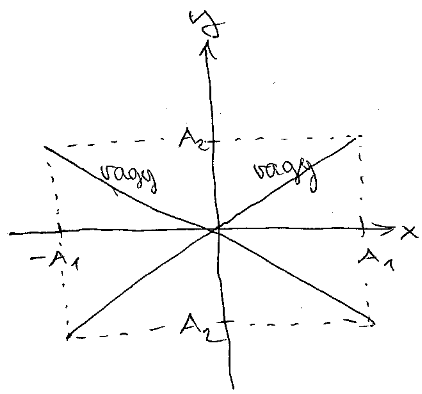
$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}} \cdot \sin\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \cos^2\varphi - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 - 2\frac{xy}{A_1A_2}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$\boxed{2.1.1.}$

$\varphi = 0 + k2\pi$



$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \pm 2\frac{xy}{A_1A_2} = 0$$

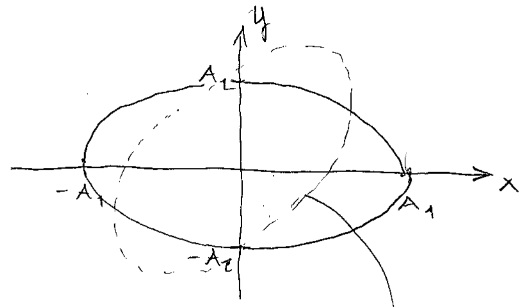
$$\left(\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} \cdot x$$

$\boxed{2.1.2.}$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 = 1 \rightarrow \text{ellipszis}$$

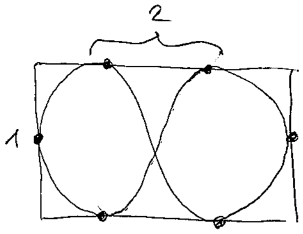


Ⓜ $A_1 = A_2 \rightarrow$ kör

Ⓜ fáziskülönbség → az ellipszis tengelye „elfordul"

$\boxed{2.2.}$ $\omega_1 = 2\omega_2$

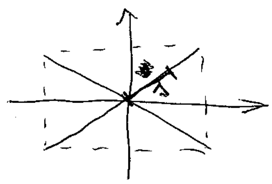
A hányados $\frac{1}{2}$:



$\boxed{2.3.}$ $\varphi_1 = \varphi_2$; $\omega_1 = \omega_2$

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t)$$

$$y(t) = A_2 \cdot \sin(\omega t)$$



$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = -\omega^2 \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{s}$$

Tehát a két rezgés összege szintén harmonikus rezgőmozgás.

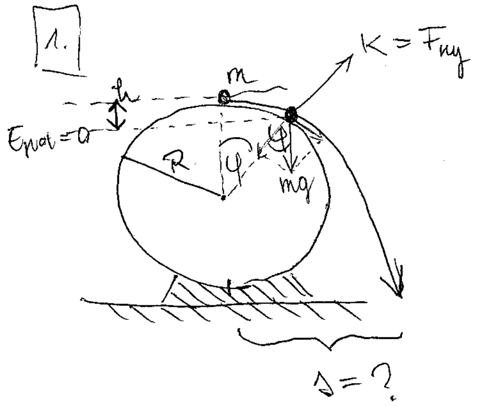
[Az 1. ZH anyagának itt van vége]

Dinamika

Axióma: $\underline{F} \sim \underline{a}$; $\underline{F} = m\underline{a}$

Erőtörvények: az erő függvénye a helynek, sebességnek és az időnek: $\underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) = m\underline{\ddot{r}}$

1.



m tömegű golyó egy szabályos gömb tetején „0" kezdősebességgel → mi történik vele? Hol éri talajt?

• körmozgás, aztán ferde hajítás

Két test akkor válik el egymástól, ha megszűnik közöttük a kölcsönhatás. Itt: amikor $F_{ny} = 0$

K = felületre merőleges (!) kényszererő = F_{ny}

Két erő hat a golyóra: mg és K

mg felbontható: $mg\cdot\cos\varphi$ és $mg\sin\varphi$

F_{cp}: nem hat (!), nem kölcsönhatásból származik

$$F_{cp} = mg\cos\varphi - F_{ny}$$

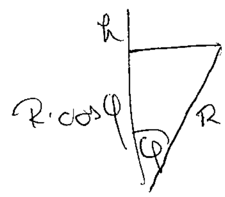
$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\varphi - F_{ny}(\varphi)$$

$$F_{ny}(\varphi) = mg\cdot\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}$$

A sebességet megadhatjuk a munkatétel segítségével:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \Delta E_{pot} \qquad E_{pot} = m\cdot g\cdot h$$

$$v^2 = 2gh = 2gR(1-\cos\varphi)$$



$\boxed{10.15.}\ \boxed{EA}$

$m\underline{a} = \underline{F}$ Ötlet: szorozzuk meg balról $\vec{r}$-rel vektoriálisan

$$\underline{r} \times m\underline{a} = \underbrace{\underline{r} \times \underline{F}}_{\text{Forgatónyomaték: } \underline{M}}$$

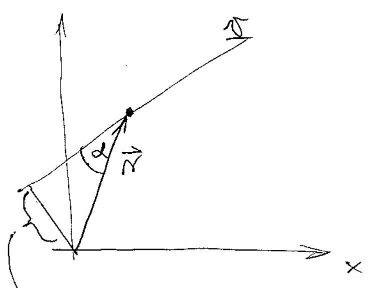
Vezessük be még az impulzusmomentumot is:

$$\underline{N} = \underline{r} \times \underline{p} = \underline{r} \times m \cdot \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underbrace{\underline{v} \times m\underline{v}}_{0} + \underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times m\underline{a}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

ha $\underline{M} \equiv 0$, akkor $\frac{d\underline{N}}{dt} = 0 \rightarrow \underline{N}$ állandó (impulzusmegmaradás)



ha $\underline{F} = 0 \rightarrow \underline{N}$ áll.

$\underline{v} \times \underline{r}$?

az egyenes origótól mért távolsága (ez áll.)

$\underline{F} \parallel \underline{r}$ (pl. Coulomb törvény)

Centrális erőtér: akárhol vagyunk, az erő az origóba mutat

$\underline{N}$ akkor is lehet 0, ha az erőtér centrális (és $\underline{F} \neq 0$)

Mozgás centrális erőtérben:

$$\underline{r}(\underline{r}\times m\underline{v}) \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{r}\cdot\underline{N} \equiv 0$$

skaláris szorzás

origón átmenő sík (erőtér középpontján átmenő!)

⇒ Centrális erőtérben a mozgás mindig síkmozgás. Ezt a síkot $\underline{N}$ határozza meg.

(M) használhatunk síkbeli polárkoordinátákat

$$\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\cdot\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

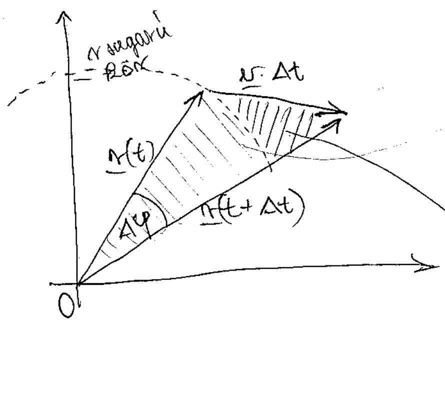
$$\underline{N} = \underline{r}\times m\underline{v} = m(\underline{r}\,\underline{e}_r)\times(\dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi) =$$

párhuzamosak, tehát szorzatuk nulla

$$= \underbrace{mr^2\dot{\varphi}}\,(\underbrace{\underline{e}_r\times\underline{e}_\varphi}_{\text{iránya merőleges a síkra}})$$

időben állandó az $r^2\cdot\dot{\varphi}$, mivel $r^2\cdot\dot{\varphi} = |\underline{N}| = \text{áll.}$

(M) Kepler 2. törvénye $\longleftrightarrow$ $r^2\dot{\varphi} = \text{áll.}$



ΔT (terület)

$$\Delta T = \frac{1}{2}r^2\cdot\Delta\varphi = \frac{1}{2}r^2\cdot\dot{\varphi}\cdot\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

ordó

ez a kis terület Δt^2-tel arányos

$$\dot{T} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \text{áll.}$$

(söpört terület) „területi sebesség"

(ez minden centrális erőtérben érvényes)

(M) (a szimmetriák és megmaradások összefüggenek!)

$$\underline{v} \cdot m\underline{a} = \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{F}}$$

Teljesítmény : P

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\underline{a}\,\underline{v} + \underline{v}\,\underline{a}\right) = m\underline{v}\,\underline{a}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_{kin}$$

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = P$$ (ha P = 0, megmarad a kin. energia)

(M) Mágneses térben mozgó töltés kinetikus energiája állandó.

(M) (részecskegyorsítóban az elektromos tér gyorsít, a mágneses körpályán tart)

$$\frac{d}{dt}E_{kin}(t) = P(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}E_{kin}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt$$

$$E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = W \rightarrow \text{munka} \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

$$E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = W$$ } munkatétel

Erőtér: az erő kizárólag a helynek a függvénye:

$$\underline{F}(\underline{r})$$

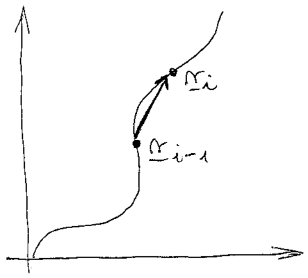
$$W = \int_{t_0}^{t} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{v}(t)\,dt \sim \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i))\,\underline{v}(t_i)(t_i - t_{i-1}) \sim$$

nehéz integrálni, közelítő összeggel helyettesítjük

$$\sim \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i)) \frac{r(t_i) - r(t_{i-1})}{\cancel{t_i - t_{i-1}}} \cdot \cancel{(t_i - t_{i-1})}$$

az $\underline{r}$-t egy különbségi hányadossal közelítjük

$$W \sim \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i))\left(r(t_i) - r(t_i - t_{i-1})\right) \cong \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}_i)}_{\text{erő}} \cdot \underbrace{(\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1})}_{\text{elmozdulás}} \; (*)$$



független lesz a tényleges pályától
(t-től független)

(*) ennek a mennyiségnek a határértéke:

$$W = \int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{s_0}^{s_1} \underline{F}(\underline{r}(s)) \frac{dr}{ds}\, ds$$

tényleges G görbe, tényleges pálya

kiszámolása

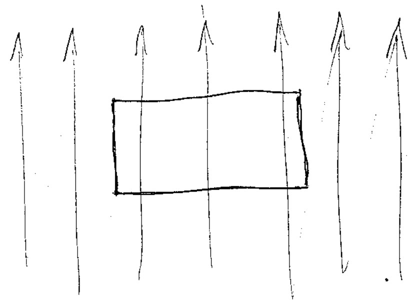
$G = \underline{r}(s)$ → paraméteres egyenlet

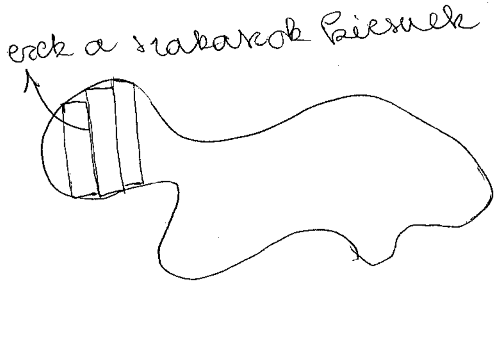
Integrál zárt görbe mentén:

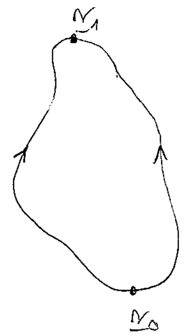
$$\oint_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

← (M) Konzervatív erőknél: tetszőleges zárt görbe mentén ez az integrál $= 0$

(P)







$\oint = 0 \Rightarrow \underline{r}_0$ és $\underline{r}_1$ között bármilyen görbe mentén az integrál értéke mindig ua.

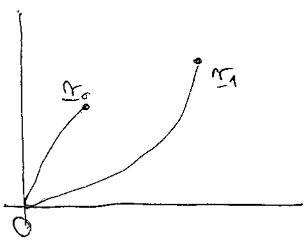
$$W = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = (**)$$

Minden ponthoz bevezethetünk egy skalármennyiséget: $\phi(\underline{r})$

$$\phi(\underline{r}) = -\int_{\underline{0}}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = \text{helyzeti/potenciális energia}$$

tetszőlegesen választott origó

ennek nincs különösebb értelme, konvenció



$$\left(\begin{array}{l} \overline{\underline{0}r_0} = \phi(\underline{r}_0) \\ \overline{\underline{0}r_1} = -\phi(\underline{r}_1) \end{array}\right)$$

$$(**) = W = -\phi(\underline{r}_1) + \phi(\underline{r}_0)$$

$$E_{kin}(t_1) - E_{kin}(t_0) = W = \phi(\underline{r}(t_0)) - \phi(\underline{r}(t_1))$$

$$\underbrace{E_{kin}(t_1) + \phi(\underline{r}(t_1))} = E_{kin}(t_0) + \phi(\underline{r}(t_0))$$

ez a mennyiség ($E = E_{kin} + \overset{\phi}{E_{pot}}$) időben állandó

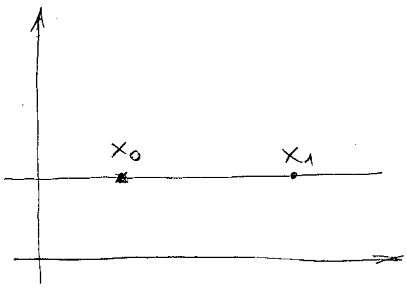
Energiamegmaradás (fontos: konzervatív erőtérben!)

10.16. EA

$$\oint \underline{F}\, d\underline{r} = 0 \iff \phi(\underline{r}) = -\int_{\text{Origó}}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

$$E = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 + \phi(\underline{r})$$

(M) $W = ?$ (amikor $\underline{r}_0$-ből $\underline{r}_1$-be megyünk)



$\underline{r}_0(x_0, y, z)$

$\underline{r}_1(x_1, y, z)$

$$W = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = -\left[\phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_0)\right] =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_x(x,y,z)\, dx = -\left[\phi(x_1,y,z) - \phi(x_0,y,z)\right]$$

(M) Ha y-t és z-t paraméternek tekintjük, akkor a Newton–Leibniz miatt F a ϕ deriváltja.

$$F_x(x,y,z) = -\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{y,z\text{ áll.}} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$ (Ez formálisan elvégezhető) → (parciális derivált)

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \overset{\text{jel.}}{=} -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\text{ezt tekinthetjük egy operátornak}}\phi =$$

$$= -\nabla\phi$$ (Nabla-operátor) (ϕ ((itt: negatív)) gradiense)

$\underline{F} = -\nabla\phi = -\operatorname{grad}\phi$

ha $\underline{h}$ kicsi

$$\phi(\underline{r}+\underline{h}) - \phi(\underline{r}) = -\int_{\underline{r}}^{\underline{r}+\underline{h}} \underline{F}\,d\underline{r} = \int_{\underline{r}}^{\underline{r}+\underline{h}} \nabla\phi\,d\underline{r} \approx (\nabla\phi)\cdot\underline{h}$$

$$\phi(\underline{r}+\underline{h}) \approx \phi(\underline{r}) + (\nabla\phi)\cdot\underline{h}$$

analógia:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}\cdot h$$

Miért nevezzük gradiensnek? Mert A fv leggyorsabban a gradiens irányába változik.

$$\operatorname{grad}|\underline{r}| = ? = \operatorname{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\underline{r}|}$$

$\frac{\partial}{\partial y}$ és $\frac{\partial}{\partial z}$ ugyanígy.

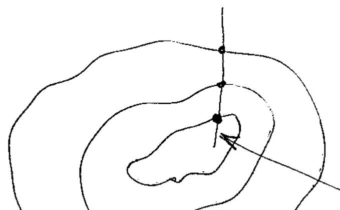
$$\operatorname{grad}|\underline{r}| = \left(\frac{x}{|\underline{r}|}; \frac{y}{|\underline{r}|}; \frac{z}{|\underline{r}|}\right) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{n}$$ ($\underline{r}$ irányú egységv.)

$f(|\underline{r}|) \rightarrow$ ennek mennyi a gradiense?

$$\frac{\partial}{\partial x} f(|\underline{r}|) = \frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{|\underline{r}|}$$

$$\operatorname{grad} f(|\underline{r}|) = f'\cdot\underline{n}$$

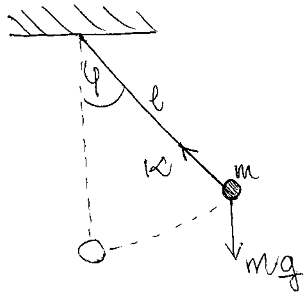
Ekvipotenciális felületek:



Az erő erre az ekvipot. felületre merőleges.

Erővonal: az ekvipot. felületre ortogonálisan $\perp$ (?)

Inga:



Miért pont ilyen irányú $\underline{K}$?

Kísérleti tapasztalat: a kényszererő ∀ ⊥ az elmozdulásra

A merőlegesség következménye: a kényszererő munkája ∀ nulla.

$\underline{K} \perp \underline{v}$

$\Delta W_K = \underline{K}\,\Delta\underline{s} \equiv 0$ (virtuális munka elve)

Írjuk fel erre a munkatételt:

$$\Delta E_{kin} = \Delta(mgz) + \cancel{\underbrace{K\cdot\Delta s}_{=0}}$$

→ a kinetikus és helyzeti energia összege időben áll!

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(r) = \text{áll.}$$

Polárkoordinátákkal

$\underline{v}(\underbrace{\dot{r}}_{0,\ \text{mivel } l=r=\text{áll.}},\ r\dot{\varphi})$

$$E = \frac{1}{2}m(\overset{r}{\overset{\parallel}{l}}\dot{\varphi})^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \text{áll.}$$

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(l\dot{\varphi})^2 + gl(1-\cos\varphi) = \text{áll.}$$

(itt most nem érdekes, hogy mennyi az m)

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{E}{m}\right) = l\dot{\varphi}\,l\ddot{\varphi} + gl\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

vagy $\dot{\varphi} = 0$ → ekkor áll az inga

vagy:

$$l\cdot\ddot{\varphi} = -g\cdot\sin\varphi$$

ha φ kicsi: $\sin\varphi \sim \varphi$

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi$$

$\varphi = A\cdot\sin(\omega t + \alpha)$; ahol $\omega^2 = \frac{g}{l}$ → $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$?

$$m\ddot{x} = F(x)$$ (itt az F nem függ $\underline{v}$-től és t-től)

→ az ilyen erő $\forall$ konzervatív (1 dim. mozgás)

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d\phi}{dx}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \phi(x) = E = \text{áll.}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \phi(x)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \phi(x)\right)$$

$$v = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \phi(x)\right)}$$ (± : éppen melyik irányba mozog az inga)

$$\pm\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}} = 1$$

$$\pm\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}}\cdot\frac{dx}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt} = t - t_0$$

(mintha(!) egyszerűsítenénk dt-vel. Ilyenkor a határokat fel kell cserélni)

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\phi(x)\right)}}\,dx$$

$\Rightarrow$ $t(x)$ függvényt adja meg ("x" elmozdulás mennyi ideig tartott?)

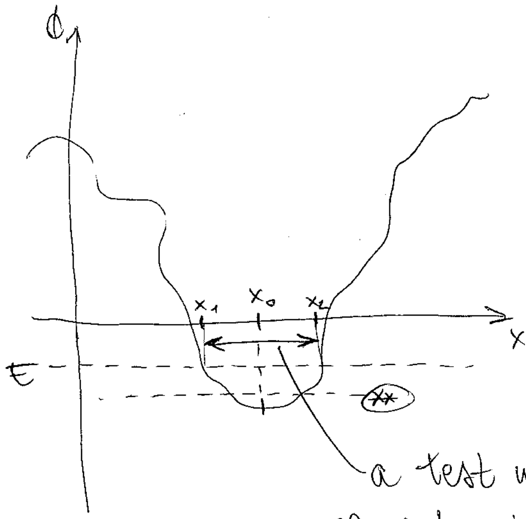
Rugóra függesztett test:

$$\phi(x) = \frac{D}{2}x^2$$

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{D}{2}x^2\right)}}\,dx \;\text{"="}\; Y\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;\text{"="}\; \arcsin$$

$\boxed{10.21.}\ \boxed{EA}$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(x)$$



A test rezgőmozgást végez x_1 és x_2 között.

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}$$

(**) Ha csökkentjük az energiát, a fv. kezd úgy kinézni, mint egy parabola $\Rightarrow$ harmonikus rezgőmozgás.

$$\phi(x) \sim \frac{D^*}{2}(x-x_0)^2$$

$$F = -\frac{d\phi}{dx} = -D^*(x-x_0)$$

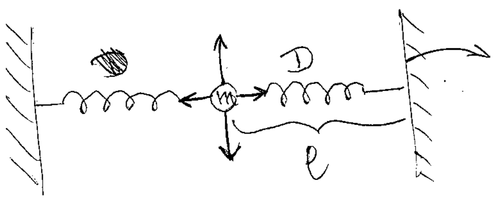
D^*: effektív rugóállandó

$$D^* = -\frac{dF}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_{x=x_0}$$

Ez a harmonikus közelítés.

$\Downarrow$

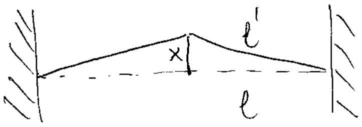
(A fv. 2. deriváltja a minimumhelyen)



$$F = D(\ell-\ell_0)$$

$\updownarrow$ (pl. gitárhúr)

ℓ_0: a rugó nyugalmi hossza



$$l' = \sqrt{x^2 + l^2}$$

(mert két rugó van)

A rugó energiája: $\Phi(x) = D\left(\sqrt{x^2+l^2} - l_0\right)^2$

$$\frac{d\Phi}{dx} = 2D\left(\sqrt{x^2+l^2} - l_0\right)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+l^2}} = 2D\left(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 2D\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+l^2}} + l_0 x\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x^2+l^2)^3}}\right)$$

(csak az $x = 0$ érdekel minket)

$$D^* = 2D\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

$$\omega_T^2 = \frac{D^*}{m} = \frac{2D}{m}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) = \omega^2_{L(\text{longitudinális})}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

$1 >$ $\Rightarrow$

A transzverzális rezgés frekvenciája mindig kisebb, mint a L-é.

$$F = D(l - l_0)$$

$$l = l_0 + \frac{F}{D}$$

$$\omega^2_{T(\text{transzv.})} = \omega_L^2\left(1 - \frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}\right)$$

$$\left.\frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}\right|_{0 \text{ helyen (nulla F.)}} = 1$$

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{l_0}{l_0 + x}\right)\right|_{x=0} = -\frac{l_0}{(l_0+x)^2}$$

$$\frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}^{(*)} = 1 - \frac{F}{Dl_0}$$ (ez a lineáris közelítése (*) ennek)

$$\omega_T^2 = \omega_L^2 \frac{F}{Dl_0} \Rightarrow \omega_T \approx \sqrt{F}$$

Kopernikusz elképzelése: heliocentrikus koord.r-rel, a bolygók körpályán mozognak.
A valóságban csak kicsi az eltérés a körpályától.

Kepler (Tycho de Brache mérései alapján): ellipszispálya (I. törv.)
II. törv.: a területi sebesség állandó $\leftrightarrow$ centrális erőtér,
III. törv: $\frac{T^2}{a^3} = áll.$

Newton:

Két test között fellépő erő: $F \sim \frac{1}{r^2}$

$$\underline{F} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$ (két pontszerű tömeg között fellépő gravitációs vonzerő)

gravitációs térerősség: $g = \frac{F}{m}$ ← a vizsgált test tömege, amelyre hat az erő

$$g = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Konzervatív - e? Ha van olyan skalárfv., amelynek negatív gradiense ez, akkor igen:

$$\phi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$ (ennek a negatív gradienseként előáll az erő)

$$-\nabla\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Potenciál: $U = -\gamma \cdot \frac{M}{r}$

(M) ϕ = potenciális energia, U = potenciál

Bolygómozgás: tudjuk: centrális erőtér, síkbeli mozgás.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \text{áll.}$$

helyzet: (r,φ) ; területi sebesség; ⇒ $r^2\dot{\varphi} = \text{áll} = C$

$$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{v}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$$

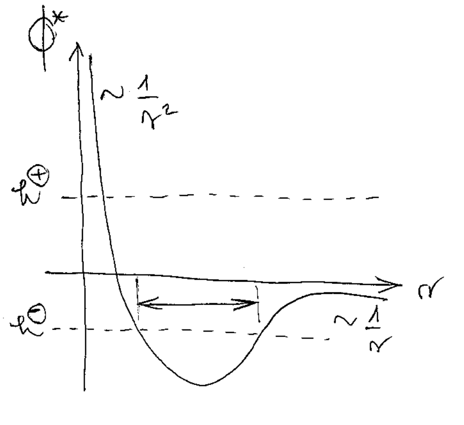
$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) - \gamma\frac{mM}{r}$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 - \frac{2\gamma M}{r} \qquad [\gamma m := \mu] \left[\frac{2E}{m} := h\right]$$

$$h = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 - \frac{2\mu}{r}$$

$$h = \dot{r}^2 + \underbrace{\left(\frac{C}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}}_{\text{rajzoljuk fel ezt a fvt!}}$$

→ ezt szokták effektív potenciálnak nevezni $= \Phi^*(r)$



→ zárt pályák

Ha a h negatív, akkor két szélsőérték között mozog: ellipszispálya legközelebbi és legtávolabbi pontja

→ hiperbola (**)

Ha h pozitív, akkor van egy minimális távolság, viszont nincs maximális → nyílt pályák

A zárt/nyílt pályát a kezdeti energia előjele ($\pm h$) határozza meg.

(M) Analitikus mo. nincs az $\underline{r}(t)$ meghatározására → de numerikusan jól közelíthető.

(**) $h=0$: parabola

$\boxed{10.22.}\ \boxed{EA}$

$$h = \frac{2E}{m}$$

$$r^2\dot\varphi = C$$

$$\mu = \gamma \cdot M$$

$$(\dot r)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = h$$

$$\dot r = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$

$$r(\varphi) \quad : \quad r(t) = r(\varphi(t))$$

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot\varphi = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}} = (**)$$

trükk:

$$h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2 = \underbrace{B - A^2}_{:=h} + 2A\frac{C}{r} - \frac{C^2}{r^2}$$

$$h := B - A^2 \longrightarrow B = h + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2$$

$$\mu = AC \longrightarrow A = \frac{\mu}{C}$$

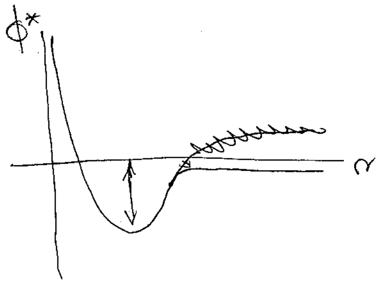
$$(**) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{C}{r}\right) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2}$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(A - \frac{C}{r}\right) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2} \qquad K(\varphi) = A - \frac{C}{r}$$

$$\frac{dK}{d\varphi} = \pm\sqrt{B - K^2} \longrightarrow K(\varphi) = \sqrt{B}\cdot\cos\varphi$$



$$K(\varphi) = \frac{\mu}{C} - \frac{C}{r} = \sqrt{B}\cdot\cos\varphi \Rightarrow$$

metal. elte.hu/~tomes/oktatas – Cavendish – Bisekfelt

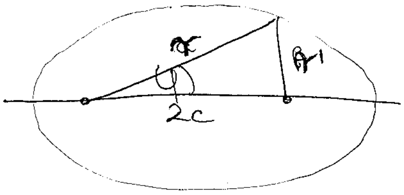
$$\frac{c}{r} = \frac{\mu}{c} - \sqrt{B}\cdot\cos\varphi$$

$$r = \frac{c}{\frac{\mu}{c} - \sqrt{B}\cos\varphi} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - \underbrace{\sqrt{B}\,\frac{c}{\mu}}_{:=\varepsilon}\cos\varphi}$$ (ez a pálya egyenlete (polárkoordinátás))

$$\varepsilon := \frac{c}{\mu}\sqrt{B} = \frac{c}{\mu}\sqrt{\left(\frac{\mu}{c}\right)^2 + h} =$$ (ha h negatív → $\varepsilon < 1$)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu}h}$$

A pálya egyenlete Descartes-koordinátákkal:



$$r + r' = 2d$$

$$\cancel{a + b = 2d}$$

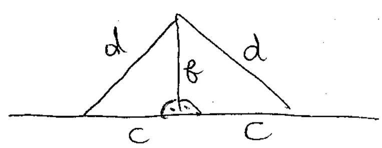
$$r' = \sqrt{4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi}$$ (koszinusztétel)

$$2d = r + \sqrt{4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi}$$

$$(2d - r)^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi$$

$$4d^2 - 4dr + \cancel{r^2} = 4c^2 + \cancel{r^2} - 4cr\cos\varphi$$

$$b^2 = d^2 - c^2$$



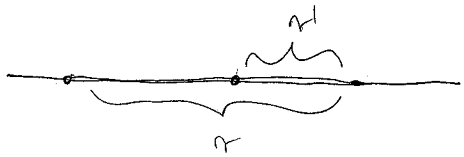
$$\cancel{4}(d^2 - c^2) = \cancel{4}dr - \cancel{4}cr\cos\varphi$$

$$r = \frac{d^2 - c^2}{d - c\cdot\cos\varphi} = \frac{\frac{d^2 - c^2}{d}}{1 - \frac{c}{d}\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\frac{b^2}{d}}{1 - \varepsilon\cdot\cos\varphi} \qquad [\varepsilon < 1]$$

Ugyanezt a számolást meg lehet csinálni hiperbolával / parabolával ~~csak~~ és akkor $\varepsilon > 1$ lesz (hb.); pb.-val pedig $\varepsilon = 0$

2. folyt.:



$r = 2d$

$a = d$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\mu} = \frac{C^2}{\gamma \cdot M}$$ ← (Kepler III. törvénye)

$C = r^2 \dot{\varphi}$ (területi sebesség)

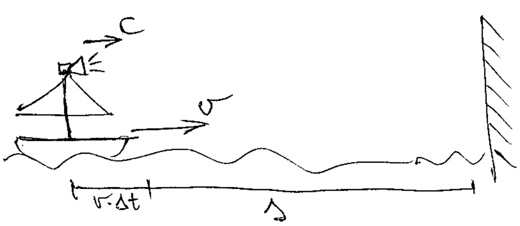
$$\dot{T} = \frac{C}{2} = \underbrace{(a \cdot b \cdot \pi)}_{\text{ellipszis területe}} / T$$ → keringési idő

$$C = \frac{2\pi a b}{T} \qquad \frac{\cancel{b^2}}{a} = \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{4\pi^2 a^2 \cancel{b^2}}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{\gamma \cdot M}$$ (fontos: ez egy állandó, ahol M = Nap tömege)

$\boxed{\text{1. ZH}}$

$\boxed{\text{Hf 1.}}$ c sebességű hangjelzés Δt ideig, a visszaverődött hangot mekkora Δt^* ideig hallják?



A hangjelzés $t_0 = 0$ pillanatban kezdődik. A hang kezdete a falig $\frac{s}{c}$ idő alatt jut el, visszafelé t_1-ben találkozik a hajóval, a megtett út: $\frac{s - v \cdot t_1}{c}$ együtt: $\frac{s + s - v \cdot t_1}{c}$

A hangjelzés végét Δt időpillanatban adja a hajó, a falig a hang $\frac{s - v \cdot \Delta t}{c}$ idő alatt jut el, onnan visszapattanva t_2-ben találkozik a hajóval $\frac{s - v \cdot t_2}{c}$ idő múlva találkozik. Összesítve: $\Delta t + \dfrac{s - \Delta t \cdot v}{c} + \dfrac{s - v \cdot t_2}{c}$

$$\Delta t^* = t_2 - t_1$$

$$\Delta t^* = \Delta t + \frac{s - v\cdot\Delta t + s - v\cdot t_2}{c} - \left(\frac{s}{c} + \frac{s - v\cdot t_1}{c}\right) =$$

$$= \Delta t + \frac{\cancel{s} - v\cdot\Delta t + \cancel{s} - v\cdot t_2 - \cancel{s} - \cancel{s} + v\cdot t_1}{c} =$$

$$= \Delta t + \frac{-v\cdot\Delta t - v\cdot t_2 + v\cdot t_1}{c} = \Delta t + \frac{-v\cdot\Delta t - v(t_2 - t_1)}{c} =$$

$$= \Delta t + \frac{-v\Delta t - v\cdot\Delta t^*}{c} = \Delta t - \frac{v}{c}\Delta t - \frac{v}{c}\Delta t^*$$

$$\Delta t^* + \frac{v}{c}\Delta t^* = \Delta t - \frac{v}{c}\Delta t$$

$$\left(1 + \frac{v}{c}\right)\Delta t^* = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t$$

$$\Delta t^* = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t}{\frac{c+v}{c}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t \cdot \frac{c}{c+v} =$$

$$= \frac{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{c+v}\Delta t = \frac{c-v}{c+v}\Delta t$$

$$\Delta t^* = \frac{c-v}{c+v}\Delta t$$

Hf. 2.

egy gonosz manó leválasztja a kocsit

A mozdony v-vel megy tovább, a kocsi a lassulással megáll.

$$\frac{s_{mozdony}}{s_{kocsi}} = ?$$

Megálláskor: $v(t) = v - at$

$0 = v - at$

$v = at$

$$s_{kocsi} = v t - \frac{a}{2}t^2$$

$$s_{mozdony} = v \cdot t$$

$$\frac{s_m}{s_k} = \frac{v\cdot t}{v\cdot t - \frac{a}{2}t^2} = \frac{v}{v-\frac{a}{2}t} = \frac{v}{\frac{2v-at}{2}} =$$

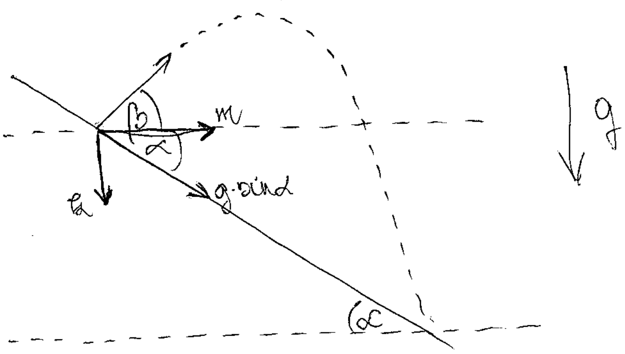
$$= v\cdot\frac{2}{2v-at} = \frac{2v}{2v-at}$$

$[v = at]$

$$\frac{2v}{2v-at} = \frac{2at}{2at-at} = \frac{\cancel{at}}{\cancel{at}}\,\frac{2}{2-1} = \cancel{at}\cdot\frac{2}{1}$$

$$\frac{s_m}{s_k} = \frac{2}{1}$$

$\boxed{\text{Hf. 3.}}$ Az α hajlásszögű lejtőn kezdősebesség nélkül legurul tank mekkora β szögben lőjön ki egy lövedéket, hogy eltalálja saját magát?



A tank gyorsulása $g\cdot\sin\alpha$.

k: a gyorsulás y irányú komponense $= (g\cdot\sin\alpha)\cdot\sin\alpha$

m: — " — x — " — — " — $= (g\cdot\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$

$$s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{-g\cdot\sin\alpha}{2}t^2$$ (negatív, mert a g lefele mutat)

$$\underline{r}_{tank} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{2}t^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ -\frac{g}{2}t^2\cdot\sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{lövedék} = \begin{bmatrix} v_0\cdot\cos\beta\cdot t \\ v_0\cdot\sin\beta\, t - \frac{g}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Amikor a lövedék eltalálja a tankot: $\underline{r}_t = \underline{r}_l$

$$v_0 \cdot \cos\beta \cancel{t} = -\frac{g}{2} t^{\cancel{2}} \sin\alpha \cos\alpha \qquad ((x_1 = x_2))$$

$$2v_0 \cdot \cos\beta = -g t \cdot \sin\alpha \cos\alpha$$

$$t = -\frac{2v_0 \cdot \cos\beta}{g \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$v_0 \sin\beta \cancel{t} - \frac{g}{2} t^{\cancel{2}} = -\frac{g}{2} t^{\cancel{2}} \cdot \sin^2\alpha \qquad ((y_1 = y_2))$$

$$v_0 \cdot \sin\beta = \frac{g}{2} t - \frac{g}{2} t \cdot \sin^2\alpha$$

$$v_0 \sin\beta = \frac{g}{2} t \left(1 - \sin^2\alpha\right)$$

$$v_0 \sin\beta = \frac{g}{2} t \cdot \cos^2\alpha$$

$$\cancel{v_0} \cdot \sin\beta = \frac{\cancel{g}}{\cancel{2}} \left(-\frac{\cancel{2v_0} \cdot \cos\beta}{\cancel{g} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}\right) \cdot \cos^{\cancel{2}}\alpha$$

$$\sin\beta = -\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$$

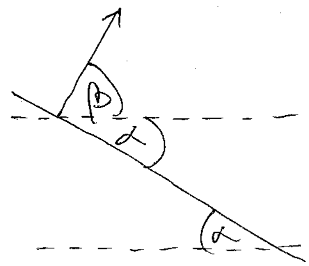
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = 0$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{\boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha}}$$



A lejtőre merőlegesen kell lőnie.

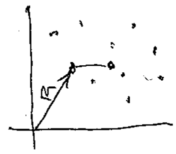
Az α negatív!

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$

11.04. EA

Kiterjedt testek gravitációs tere

$$\phi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m}{r}$$



$$\phi(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}$$ → sok kicsi pontból álló rendszer esetén

kiterjedt testek → bevezetjük a sűrűség fogalmát:

$$\rho(\underline{r}) = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

függ a helytől!

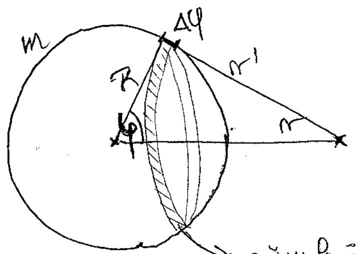
térfogati integrál

$$\phi(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(\underline{r}_i)\cdot \Delta V_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} = -\gamma \cdot \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dV'$$

$\rho(\underline{r})$ legyen egy folyt. fv! („elkenjük")
(közelítjük egy folyt. sűrűségfv-nyel)

Vékony gömbhéj gravitációs tere

↳ (a tömegeloszlás egyenletes!)



r távolságra mekkora a gravitációs potenciál?

→ gömböv (a $\underline{\Delta\varphi \text{ szögben}}$ látszó gömböv)

$$\Delta A = (\text{a gömböv felülete}) = 2\pi R^2 \sin\varphi \cdot \overbrace{\Delta\varphi}^{\text{a gömböv magassága}}$$

$$\Delta m = m \frac{\Delta A}{4\pi \cdot R^2} = m \cdot \frac{\sin\varphi}{2} \Delta\varphi$$

$$r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos\varphi} \qquad \text{(koszinusztétel)}$$

$$\Phi(r) = -\gamma \cdot \int_0^{\pi} \frac{m}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}\, d\varphi = \circledast$$

$$\frac{d}{d\varphi}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}Rr\cdot\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$$

$$\circledast = -\frac{m}{2}\cdot\gamma\cdot\frac{1}{R\cdot r}\cdot\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\,\Big|_0^{\pi} =$$

abszolútérték!

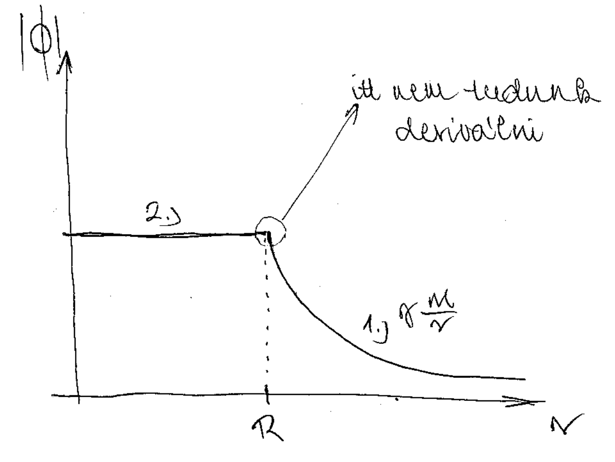
$$= -\frac{m}{2}\gamma\cdot\frac{1}{Rr}\Big[\,|R+r| - |R-r|\,\Big]$$

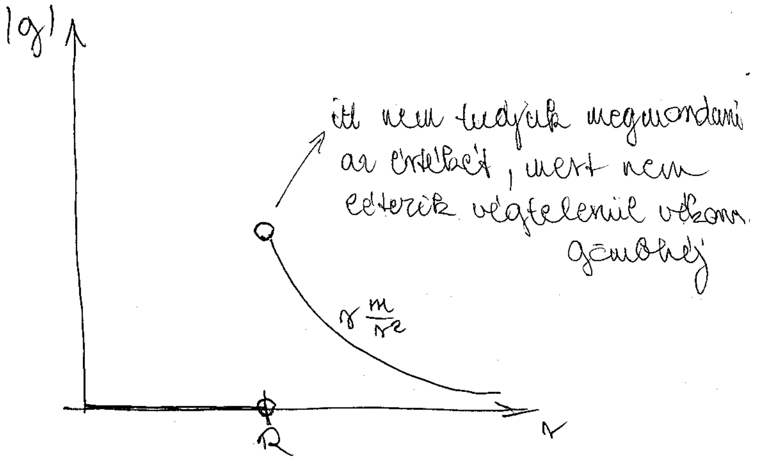
Két eset:

1.) a gömbön kívül vagyunk : $r > R$

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\gamma\dfrac{m}{R} & [r>R] \Rightarrow \text{mintha a teljes tömeg a középpontba lenne sűrítve} \\[2ex] -\gamma\dfrac{m}{R} & r<R \Rightarrow \text{a potenciál konstans!} \end{cases}$$

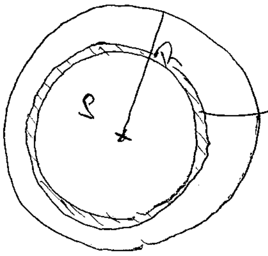
2.) a gömbön belül vagyunk : $r < R$





Tömör gömb gravitációs tere

↳ állandó ρ sűrűség

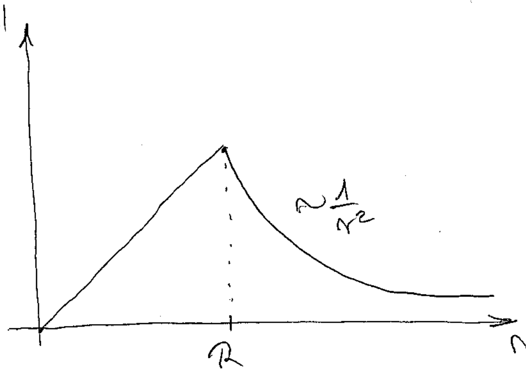


felosztjuk gömbhéjakra

A gömbön kívül itt is pontszerűnek tekinthetjük az össztömeget.

$$g(r) = \begin{cases} \gamma \dfrac{4\pi R^3}{3} \rho \dfrac{1}{r^2} & r > R \\ \gamma \dfrac{4\pi \cancel{r^3}^{\,1}}{3} \cdot \rho \cdot \dfrac{1}{\cancel{r^2}} = \gamma \cdot \dfrac{4\pi}{3} \rho \cdot r & r < R \end{cases}$$

Egy belső pont esetén a ponton kívül levő gömbhéjak gravitációs tere 0, így csak a belső gömbhéjak tere számít.



Hf: ha fúrunk egy alagutat a Föld középpontján keresztül, és beejtek egy tárgyat, mekkora lesz a harm. rezgőmozgásának rezgésideje?*

(M) ha „húrirányban" fúrunk, ugyanakkora a rezgésidő

(M) * ez ugyanakkora, mint az első kozmikus sebesség.

(M) A világegyetem össztömegéből adódó térerősség mekkora? Miért nincs mindig világos? Megoldás: a világegyetem NEM statikus, tágul! (Hubble)

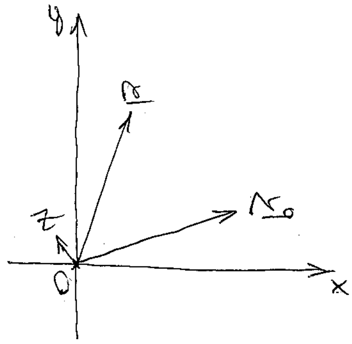
(függ attól, hogy hol a világ közepe)

M. A világegyetem összentrópiája nő, viszont a világegyetem tágul → a lokális entrópia csökken.

$\boxed{\text{1. ZH. folyt.}}$

tavalyi $\boxed{2.}$

∀ pont egy középponttól $\underline{v} = A \cdot \underline{r}$ sebességgel távolodik.
Mit tapasztal a tetsz. $\underline{r}_0$-ban levő egoista zöld emberke?



$$\underline{v} = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \qquad \underline{r} = \begin{bmatrix} A \cdot t + x \\ A \cdot t + y \\ A \cdot t + z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2+1 \\ 3+1 \\ 4+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$d = \sqrt{1+64+4} = \sqrt{69}$ $\qquad d = \sqrt{9+64+4} = \sqrt{77}$

$$\underline{v}_0 = \begin{bmatrix} A \\ A \\ A \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_0 = \begin{bmatrix} At + x_0 \\ At + y_0 \\ At + z_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1+1 \\ -5+1 \\ 2+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$d_{r,r_0} = \sqrt{\left[(At+x) - (At+x_0)\right]^2 + \left[(At+y) - (At+y_0)\right]^2 + \left[(At+z) - (At+z_0)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad = \text{nem jó}$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_0 = \begin{bmatrix} Ax_0 \\ Ay_0 \\ Az_0 \end{bmatrix}$$

$$d_{r,r_0} = \sqrt{(Ax - Ax_0)^2 + (Ay - Ay_0)^2 + (Az - Az_0)^2} =$$

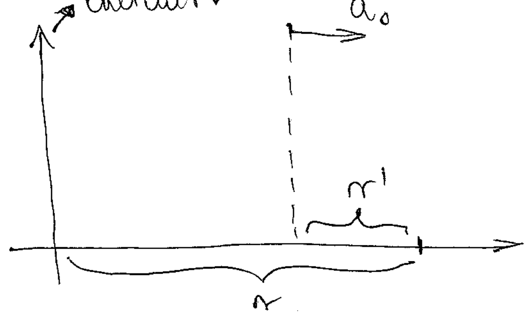
$$= \sqrt{A^2(x-x_0)^2 + A^2(y-y_0)^2 + A^2(z-z_0)^2} = A \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} =$$

Ha $\vec{r}_0 = 0$, akkor $d_{r,r_0} = A \cdot |\vec{r}|$

Tehát a zöld emberke úgy látja, hogy ő a világ közepe.

Szebb, jobb megoldás: $\boxed{\text{FOKA}}$

$\boxed{11.05.}$ $\boxed{EA}$



$$r = r' + \frac{a_0}{2}t^2$$

$$a = a' + a_0$$

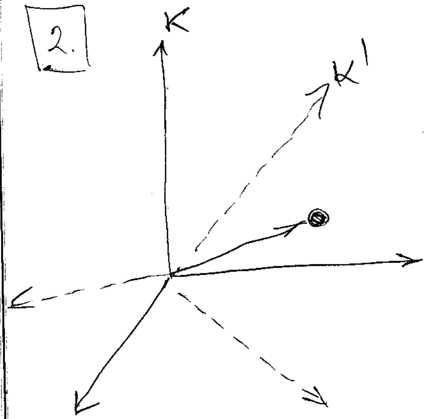
$$\frac{F}{m} = a' + a_0$$

$$m a' = F - m a_0$$

(M) Ha az F nem hat, akkor a test elkezd gyorsulni.

a_0 = a nyugvó koord.r. szerinti gyorsulása a gyorsuló koord.r.-nek

$\boxed{2.}$



K koordin.r. $\rightarrow \underline{r}$

K' elforgatott koor.r. $\rightarrow \underline{r}'$

$$\underline{r} = \hat{O}\,\underline{r}'$$

forgatási operátor

Mivel a forgatás hatására a vektor hossza nem változik meg: $\hat{O}\cdot\tilde{\hat{O}} = 1$

$$\underline{r}(t) = \hat{O}(t)\,\underline{r}'(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\hat{O}}{dt}\cdot r'(t) + \hat{O}(t)\cdot\frac{dr'}{dt} = \underline{v}$$

$$\tilde{\hat{O}}\,\underline{v} = \tilde{\hat{O}}\dot{\hat{O}}\,\underline{r}' + \underline{v}' = (**)$$

az inerciar. beli sebesség

ugyanaz a sebesség a forgó koordr. koordinátáival kifejezve

$$\hat{\Omega} := \tilde{\hat{O}} \cdot \dot{\hat{O}}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underset{\overset{\|}{1}}{\tilde{\hat{O}} \cdot \hat{O}}\Big) = \underset{(\text{nulla})}{0} = \underbrace{\dot{\tilde{\hat{O}}} \cdot \hat{O}}_{\tilde{\hat{\Omega}}} + \underbrace{\tilde{\hat{O}} \cdot \dot{\hat{O}}}_{\hat{\Omega}} = \tilde{\hat{\Omega}} + \hat{\Omega}$$

$$\widetilde{\dot{\tilde{\hat{O}}} \cdot \hat{O}} = \tilde{\hat{O}} \cdot \dot{\hat{O}} = \hat{\Omega}$$

$$\hat{\Omega} := \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{mert így}} \hat{\Omega} \cdot \underline{r}' = \underline{\omega} \times \underline{r}'$$

$$(**) = \underline{\omega} \times \underline{r} + \dot{\underline{r}}'$$

(A) Egy antiszimmetrikus 3×3-as mátrixxal való szorzásnak megfeleltethető egy vektoriális szorzás.

$$\omega_i = e_{ijk} A_{kj}$$

Bevezetünk egy operációt:

$$\frac{d'}{dt} := \underline{\omega} \times \; + \frac{d}{dt}$$

$$\underline{a} = \left(\omega \times \; + d/dt\right)\left(\underline{\omega} \times \underline{r}' + \frac{dr'}{dt}\right)$$

$$\underline{a} = \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + \underline{\omega} \times \underline{v}' + \underline{a}' + \underbrace{\frac{d}{dt}(\underline{\omega} \times \underline{r}')}_{\underline{\beta} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times \underline{v}'}$$

ez az inerciarendszer-beli gyorsulás a forgó koord.r. beli adatokkal megadva

$$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2\,\underline{\omega}\times\underline{v}' + \underline{\beta}\times\underline{r}'$$

$\underline{F}'$ = az erő a forgó k.r. beli szabályokkal leírva

$$\underline{F}' = m\underline{a}' + m\cdot\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2m\,\underline{\omega}\times\underline{v}' + m\underline{\beta}\times\underline{r}' + m\underline{a}_0$$

$(m\cdot\omega^2\cdot \underline{r})\downarrow$

$$m\underline{a}' = \underline{F}' \underbrace{- m\underline{a}_0 - m\cdot\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2m\,\underline{v}'\times\underline{\omega} + m\underline{r}'\times\underline{\beta}}_{\text{tehetetlenségi erők}}$$

(elhagyjuk a vesszőket, mert ∀ adat forgó k.r. beli)

tehetetlenségi erők

1.) $m\underline{a}_0$ → nincs neve (koordr. gyorsulásából származó erő)

2.) $2m\,\underline{v}'\times\underline{\omega}$ → Coriolis-erő (ha mozog a koordr.)

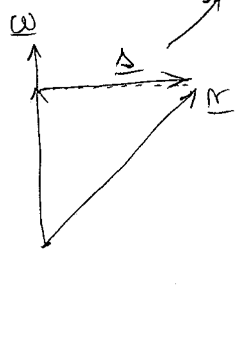
3.) $m\underline{r}'\times\beta$ → Euler-erő (ha gyorsulva forog a k.r.)

(M) $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$

$\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') = (\underline{\omega}\underline{r}')\underline{\omega} - \underline{\omega}^2\underline{r}'$

$\underline{F}_c = m\underline{\omega}^2\underline{r} - m(\underline{\omega}\underline{r})\underline{\omega} =$

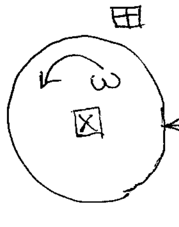
$= m\cdot\omega^2\,\underline{s}$



mindig a forgástengelytől kifelé mutat

4.) $\underline{F}_c$ → centrifugális erő

Pl.:



⊠ itt vagyunk mi

egyenletesen forgó korong

⊞ mellette álló tárgy

↓

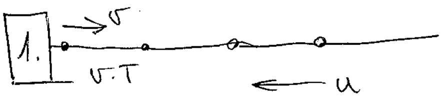
úgy látjuk, mintha keringene a korong körül

ezt a mozgást írja: Coriolis + centrifugális

Következmény pl: a Földön a tárgyak nem egyenes vonalban esnek le (~~Coriolis~~ Coriolis erő hat rá), az eltérés viszont annyira kicsi, hogy egyszerű kísérlettel nem igazán mérhető
Mérés: Foucault-inga

FÖKA (tavalyi ZH feladatai)

1.



1.) ellenkező irány:

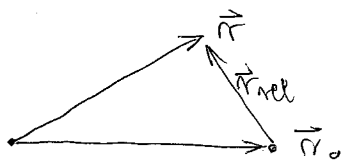
$$vT = vt + ut \longrightarrow t = \frac{v}{v+u}T = \frac{T}{2}$$

2.) azonos irány:

$$vT + vt = ut$$

$$vT = (u-v)t \longrightarrow t = \frac{v}{v-u}T$$

2. egoista zöld emberke



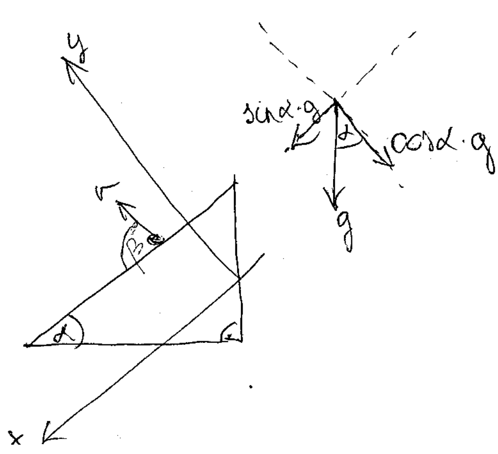
$$\vec{v} = A\cdot\vec{r}$$

$$\vec{v}_0 = A\cdot\vec{r}_0$$

$$\vec{v}_{rel} = A\vec{r} - A\vec{r}_0 = A(\vec{r} - \vec{r}_0) =$$
$$= A\cdot\vec{r}_{rel}$$

A kis zöld emberke úgy látja, hogy tőle távolodik $A\cdot\vec{r}$ sebességgel $\forall$ pont, ő a világ közepe.

3. szuicid tank



tank: $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\sin\alpha\, g\, t^2$

$y = 0$

Cövidek:

$v_x = \cos\beta \cdot v$

$v_y = \sin\beta \cdot v$

$$\left\{\begin{array}{l} x = v_x t + \frac{1}{2}\sin\alpha\, g t^2 \\ \left(t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_y}{\cos\alpha \cdot g} \right) \longrightarrow \text{felesleges} \end{array}\right.$$

$$v_x t + \cancel{\frac{1}{2}\sin\alpha\, g t^2} = \cancel{\frac{1}{2}\sin\alpha\, g t^2}$$

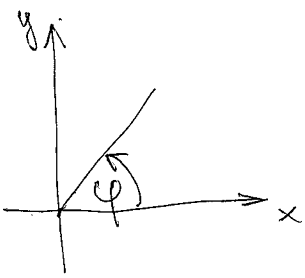
$$v_x t = 0$$

$$v_x = \cos\beta \cdot v$$

$\beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ A lejtőre merőlegesen kell kilőni.

$\boxed{4.}$

$$\varphi = t^2 + 2t$$



$$x = \cos\varphi\, R$$

$$y = \sin\varphi\, R$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = -\sin(t^2+2t)(2t+2)R \\ \dot{y} = \cos(t^2+2t)(2t+2)R \end{array}\right\} \underline{v} = R(2t+2)\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = R(2t+2)\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} = -R\left(\cos(t^2+2t)(2t+2)^2 + \sin(t^2+2t)\cdot 2\right) = -R\left(\cos\varphi(2t+2)^2 + 2\sin\varphi\right)$$

$$\ddot{y} = R\left(-\sin(t^2+2t)(2t+2)^2 + \cos(t^2+2t)\cdot 2\right) = R\left(-\sin\varphi(2t+2)^2 + 2\cos\varphi\right)$$

Mikor merőlegesek? $\underline{a}\cdot\underline{v} = 0$

$$(2t+2)\left[\cancel{\sin\varphi\cos\varphi(2t+2)^2} - 2\sin^2\varphi - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi(2t+2)^2} + 2\cos^2\varphi\right] \overset{!}{=} 0$$

$$(2t+2)\left[\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{\cos(2\varphi)}\right]\cdot 2 =$$

$$= 2\underbrace{(2t+2)}_{=0} \cdot \cos\Big(\underbrace{2(t^2+2t)}_{2\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi}\Big) \stackrel{!}{=} 0 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$t = -1$ ↯

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$$

$$t^2 + 2t - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

$\ominus$ ↯ $\quad \oplus$ ✓

$$t = -1 + \sqrt{1 + \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{5.}$

$$x = x_1 + x_2 = A\left(e^{-\alpha t}\sin\omega t + \sin(2\omega t)\right)$$

$$v = \dot{x} = A\left(-\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\omega t + e^{-\alpha t} \cdot \omega\cos\omega t + \cos(2\omega t) \cdot 2\omega\right)$$

$$a = \ddot{x} = A\left(\alpha^2 e^{-\alpha t} \cdot \sin\omega t - \alpha e^{-\alpha t} \cdot \omega \cdot \cos\omega t - \alpha e^{-\alpha t}\cos\omega t - \right.$$

$$\left. - e^{-\alpha t} \cdot \omega \cdot \sin\omega t - \sin(2\omega t) 2\omega\right.$$

Zérushely:

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t + \underbrace{\sin(2\omega t)}_{2\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)} = 0$$

$$\sin(\omega t)\left[e^{-\alpha t} + 2\cos(\omega t)\right] = 0$$

$$\omega t = n \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

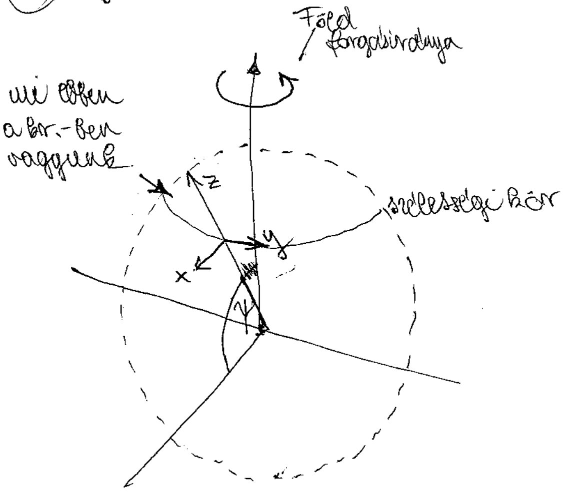
$$t = n\frac{\pi}{\omega}$$

Maximális kitérés: $v = 0$ egyenlet megoldása

11. 11. | EA

Jelenségek a forgó Földön

1. Ejtések



$$\cancel{m}\underline{a} = \cancel{m}\underline{g} + \cancel{m\omega^2 \underline{s}} + 2\cancel{m}\,\underline{v}\times\underline{\omega}$$

elhanyagolható (?)

$$\underline{a} = \underline{g} + 2\underline{v}\times\underline{\omega}$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \qquad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} -\omega\cos\Psi \\ 0 \\ \omega\sin\Psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega\cos\Psi & 0 & \omega\sin\Psi \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{vmatrix} = \quad \underline{v}\times\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{y}\,\omega\sin\Psi \\ -\left(\dot{x}\omega\sin\Psi - \dot{z}(-\omega\cos\Psi)\right) \\ \dot{x}\omega\sin\Psi - \dot{z}(-\omega\cos\Psi) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega\sin\Psi \\ \ddot{y} &= -2\dot{x}\omega\sin\Psi - 2\dot{z}\omega\cos\Psi \\ \ddot{z} &= 2\dot{y}\omega\cos\Psi - g \end{aligned}\right\}$$ ezt kell megoldani

$$\dddot{y} = -2\ddot{x}\omega\sin\Psi - 2\ddot{z}\omega\cos\Psi$$

$$\dddot{y} = -2(2\dot{y}\omega\sin\Psi)\omega\sin\Psi - 2(2\dot{y}\omega\cos\Psi - g)\omega\cos\Psi =$$

$$= -4\dot{y}\omega^2\sin^2\Psi - 4\dot{y}\omega^2\cos^2\Psi + g2\omega\cos\Psi =$$

$$\dddot{y} = -4\dot{y}\omega^2 + 2g\omega\cos\Psi$$

$$\dot{y} := v_y \quad \rightarrow$$

$$\ddot{v}_y = \underbrace{-4\omega^2 v_y}_{\text{harmonikus rezgőmozgás}} + \underbrace{2g\omega\cos\Psi}_{\text{eltolt egyensúlyi helyzettel}}$$

Keressük a megoldást $v_y = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$ alakban!

$$a_y = 2\omega \cdot A(-\sin(2\omega t + \varphi))$$

(M) harmadfokú diffegyenlet $\rightarrow$ 3 szabad paraméter

$\varphi := 0 \leftarrow$ ((az y irányú gyorsulás 0))?

$$v_y = A\cos(2\omega t) + B$$

$$-4\omega^2 B + 2g\omega\cos\Psi = 0$$

$$B = \frac{g\cos\Psi}{2\omega}$$

$$v_y = A\cos(2\omega t) + \frac{g\cdot\cos\Psi}{2\omega}$$

$A \Rightarrow$ a 0-t időpillanatban a sebesség nulla:

$$v_y = \frac{g\cdot\cos\Psi}{2\omega}(1-\cos(2\omega t))$$

(M) De: a kerdeti egyenletből kihagytuk az ω^2-es tagot!

(M) A kísérlet során ωt kicsi!

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$v_y = \frac{g\cdot\cos\Psi}{\cancel{2}\omega}\cdot\frac{4\omega^2 t^2}{\cancel{2}} = g\cdot\cos(\Psi)\omega t^2$$

$$y = \frac{g\cdot\cos(\Psi)\omega}{3}t^3$$

$z = h - \frac{g}{2}t^2$

↳ „Rendesen" esik z irányba. (be kell helyettesíteni $v_y(-\dot{y})$-t a $\ddot{z}$-os egyenletbe...)

$x = 0$

↳ x irányú eltérés nincs

(P) $h = 100\,m \Rightarrow y = 1{,}5\,cm$

2. Foucault inga

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi + \lambda x \\ \ddot{y} = -2\dot{x}\omega\sin\varphi - \cancel{2\dot{z}\omega\cos\varphi} + \lambda y \\ \ddot{z} = 2\dot{y}\omega\cos\varphi + g + \lambda z \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = l \end{cases}$$

elhanyagolhatjuk, mert: (xx)

kötélirányú erő?

→ a kötél hossza

$z = \sqrt{l^2 + x^2 + y^2}$

$z = \pm l\sqrt{1 - \cancel{\frac{x^2+y^2}{l^2}}}$ → elhanyagolható, mert $l^2 \gg x^2+y^2$ (kötélhossz; kilengés)

$[z \sim -l]$

↳ ha z áll., akkor deriváltja 0 → $\cancel{\ddot{z}}$ ⇐ (xx)

3. egyenlet vagy utolsóból:

$0 = -g - \lambda l$

$\lambda = -\frac{g}{l}$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega\sin\varphi - \frac{g}{l}x \\ \ddot{y} &= -2\dot{x}\omega\sin\varphi - \frac{g}{l}y \end{aligned}\right\}$$

$[\omega_1 := \omega\cdot\sin\varphi]$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega_1 - \frac{g}{l}x \\ \ddot{y} &= -2\dot{x}\omega_1 - \frac{g}{l}\cdot y \end{aligned}\right\}$$

ha az $\omega = 0$ lenne ⇒ harmonikus rezgőmozgás $\sqrt{\frac{g}{l}}$ frekvenciával (ellipszispálya lenne)

$$\ddot{x} - 2\omega_1 \dot{y} + \frac{g}{\ell} x = 0$$

$$(+)\ \ddot{y} + 2\omega_1 \dot{x} + \frac{g}{\ell} y = 0 \quad / \cdot i$$

$$i\ddot{y} + 2i\omega_1 \dot{x} + i\frac{g}{\ell} y = 0$$

$$\left[z := x + iy \right]$$

$$\ddot{z} + 2\omega_1 i \dot{z} + \frac{g}{\ell} \cdot z = 0$$

Keressük a megoldást $z = A \cdot e^{i\lambda t}$ alakban!

$$-\lambda^2 z - 2\omega_1 \lambda z + \frac{g}{\ell} z = 0$$

$$\lambda^2 + 2\omega_1 \lambda \cancel{+} - \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\cancel{2}\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 - 4\left(-\frac{g}{\ell}\right)}}{\cancel{2}} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{\ell}}$$

mivel $\frac{g}{\ell} \gg \omega_1^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$$z = A_1 \cdot e^{i\left(-\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t} + A_2 \cdot e^{i\left(-\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)t}$$

$$z = e^{-i\omega_1 t} \left[A_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{\ell}} t} \right]$$

[$t = 0$-ban: amikor kitérítettük az ingát (mielőtt elengedtük):
$z(0) := a$]

$z(0) = a$

$\dot{z}(0) = 0$

$t = 0$-ban: $z = e^0 \left[A_1 e^0 + A_2 e^0 \right]$

$$a = A_1 + A_2$$

$$\dot{z}(0) = \left(-\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) A_1 + \left(-\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) A_2 = 0$$

$$-\omega_1 a + \sqrt{\frac{g}{l}}\,(A_1 - A_2) = 0$$

$$A_1 + A_2 = a$$

$$A_1 - A_2 = \frac{\omega_1 a}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

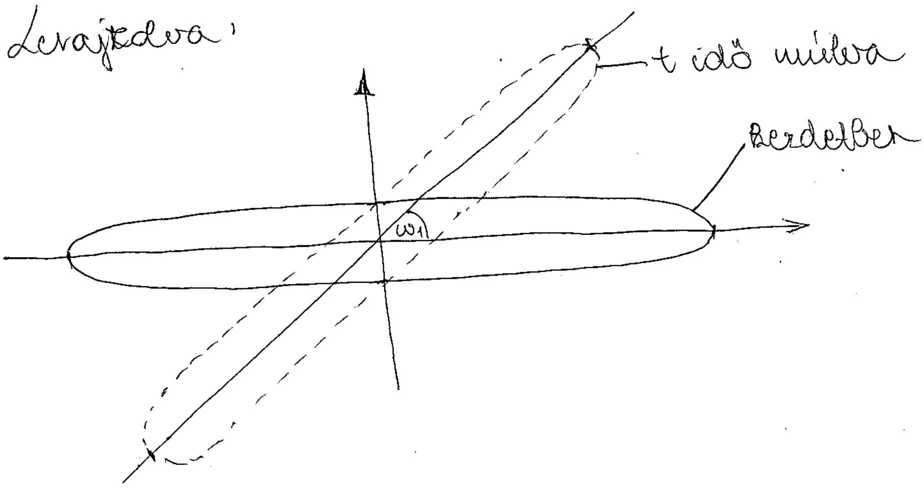
$$2A_1 = a\left(1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

$$2A_2 = a\left(1 - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

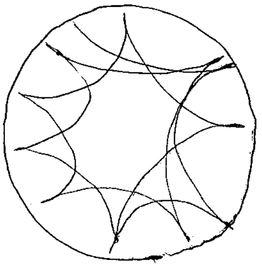
$$z = \frac{a}{2}\cdot e^{-i\omega_1 t}\left[\left(1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right)e^{i\sqrt{g/l}\cdot t} + \left(1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right)\cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t}\right]$$

$$z = a\cdot \underbrace{e^{-i\omega_1 t}}_{\text{koordinátar. elforgatása}}\left[\underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)}_{x \text{ irányú rezgés}} + i\cdot\underbrace{\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}}_{\text{icipici amplitúdó}}\cdot\underbrace{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)}_{\text{ellentétes fázisú } y \text{ irányú rezgés}}\right]$$

Lerajzolva:



11.12.	EA



Kísérlet:

→ inga alatt forgatott korong

→ az ingából tinta csöpög

→ ilyen a mintázat

→ valami ilyesmi

max. kitérésnél

→ azért csúcsos, mert a szélén egy pillanatra megáll az inga

Eötvös Loránd: (1848 – 1919)

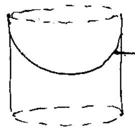
- „a világ első geofizikusa"
- precíziós mérések
- Föld tömegének mérése?
- Eötvös-inga
- Eötvös-féle kapilláris hatás ⇒

folyadék – gőz egyensúly

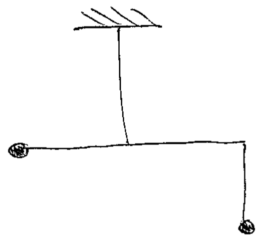
$\alpha \sim (T_c - T)$

kritikus hőmérséklet

ezen a hőmérsékleten megszűnik a felületi feszültség



- Föld gravitációs terének változása ← precíziós vizsgálat



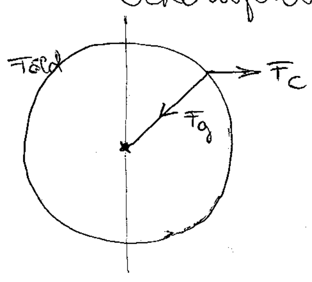
Ez az Eötvös-inga.
(pici változás a g-ben ⇒ elfordul)
(pl: olajkutatás)

Nehézségi erőtérben való mozgás:

$$m\underline{a} = m\underline{g}$$

- A gyorsulások arányait nem tudjuk befolyásolni → bevezetjük a tömeget.
- Ugyanilyen arányosság a Coulomb-törvénynél.
- az inga lengésideje nem függ a tömegtől
- Kepler: $\frac{a^3}{T^2} = $ áll., NEM jelenik meg a tömeg.
- ezeknek a „feloldása" → relativitáselmélet (a gravitációs erő „nem olyan erő"
- a "γ" gravitációs állandó függ az anyagi minőségtől?

⇒ bizonyítás: Eötvös Loránd ⇒ ötlete:



Amit mi súlynak érzékelünk, az az F_c és F_g eredője.

$$f(\varphi) = -\omega_0^2 \sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{df}{d\varphi} = -\omega_0^2 \cos\varphi + \Omega^2 \underbrace{\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)}_{\cos(2\varphi)}$$

$\underline{\varphi_1 = 0:}$

$$\frac{df}{d\varphi} = -\omega_0^2 + \Omega^2$$

→ ha $\Omega < \omega_0$, akkor ez negatív, tehát stabil az eh.

→ ha $\Omega > \omega_0$ → labilis

$\underline{\varphi_2 \to \Omega^2 > \omega_0^2:}$

$$\frac{df}{d\varphi} = -\omega_0^2 \cos\varphi_2 + \Omega^2\left(\cos^2\varphi_2 - 1\right) = \qquad \left[\cos\varphi_2 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right]$$

$$= -\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} + \Omega^2\left(2 \cdot \frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - 1\right) =$$

$$= -\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} + 2\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} - \frac{\Omega^4}{\Omega^2} =$$

$$= \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2}$$

→ $\Omega < \omega_0$ → stabil egy. hely.

→ $\Omega > \omega_0$ → labilis

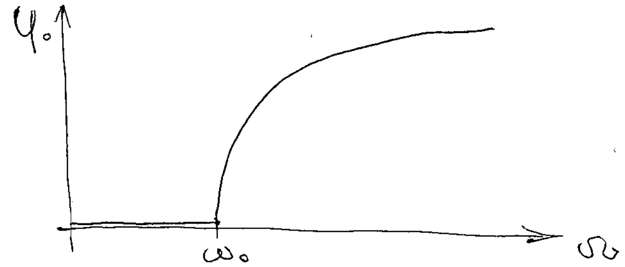
A mozgásegyenlet közel az egyensúlyi helyzethez:

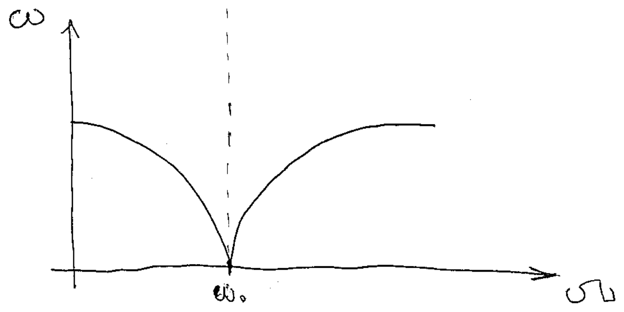
$$\ddot{\varphi} = \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0} (\varphi - \varphi_0) \qquad [\varphi_0 = \varphi_1 \text{ vagy } \varphi_2]$$

$$\omega^2 = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}$$

φ_1 esetén: $\boxed{\omega^2 = \Omega^2 - \omega_0^2}$ $\qquad$ φ_2 esetén: $\boxed{\omega^2 = \frac{\Omega^4 - \omega_0^4}{\Omega^2}}$

Lerajzolva:



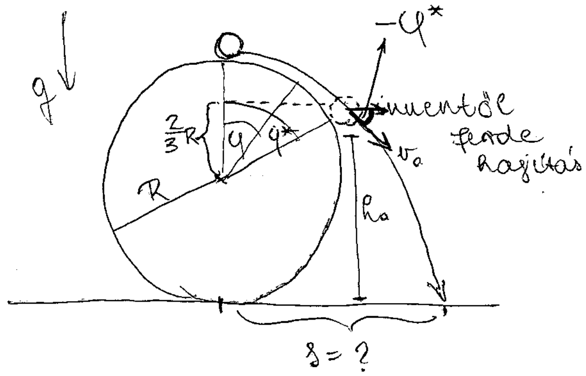


→ kritikus lelassulás

(M) Egy vasdarab mágnesezettsége a hőmérséklet függvényében: ugyanez a görbe

| 11.13 | GY | Beadandó: 15   1. ZH: 34

(P) Folytatás:



$$v^2 = 2gR(1-\cos\varphi)$$

$$F_{ny}(\varphi) = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}$$

$$F_{ny}(\varphi) = mg\cos\varphi - \frac{2g\cancel{R}\cdot m(1-\cos\varphi)}{\cancel{R}}$$

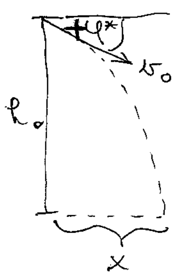
$$= mg(3\cos\varphi - 2)$$

$$F_{ny}(\varphi=\varphi^*) = 0$$

$$3\cancel{mg}\cos\varphi^* = 2\cancel{mg}$$

$$\cos\varphi^* = \frac{2}{3}$$

$v_0^2 = \frac{2gR}{3}$; $h_0 = \frac{5R}{3}$



$\downarrow \oplus$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\varphi^*}$$

$$x = v_0\cos\varphi^*\, t$$

$$h_0 = v_0\sin\varphi^*\, t + \frac{g}{2}t^2$$

$$h_0 = \frac{v_0\sin\varphi^*}{v_0\cos\varphi^*}\cdot x + \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\varphi^*}$$

$v_0^2 = \frac{2gR}{3}$

↳ hajítás kezdősebessége

$\sin\varphi^* = \frac{\sqrt{5}}{\ldots}$

$$h_0 = \frac{v_0 \sin\varphi^*}{v_0 \cos\varphi^*}\, x + \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi^*} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot x + \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{\frac{2gR}{3} \cdot \frac{4}{9}}$$

$$h_0 = \frac{5R}{3}$$

$$\frac{5R}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} x + \frac{27}{16R} \cdot x^2$$

$$\frac{27}{16R} x^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} x - \frac{5R}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + 4 \cdot \frac{27}{16R} \cdot \frac{5R}{3}}}{\frac{27}{8R}} = \frac{8R}{27} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{50}{4}} \right)$$

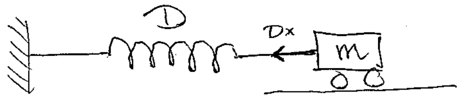
$\ominus$ ↯

$\oplus$ ✓

$$x = \frac{4}{27}\left(\sqrt{50} - \sqrt{5}\right) \cdot R \approx 0{,}716\, R$$

$$s = R\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{27}\left(\sqrt{50} - \sqrt{5}\right) \right)$$

$\boxed{2.}$



→ harmonikus rezgőmozgás

$$m\ddot{x} = -Dx$$ → megnyújtással arányos, azzal ellentétes irányú erő

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2$$ → a körfrekvencia: $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ → egyváltozós, elsőfokú, másodrendű, homogén, állandó együtthatós

Megoldás menete: 1.) keressük a mo.t ... alakban!

2.) sejtsük meg, hogy a mo. ... alakú

(M) Ált. e^x alakú ...

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \xrightarrow{\text{mert}} \ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

általános megoldás

Két szabad paraméter: A, φ $\Rightarrow$ végtelen sok szinuszfüggvény.
Emiatt annyi kezdeti feltételre van szükség, ahanyadrendű a diffegyenlet.

Triviális mo.: a kiskocsi egy helyben áll.

Pl.: $x(t=0) = x_0$

$v(t=0) = 0$

A lineáris kombináció is megoldás:

$$x(t) = A\cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + B\cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Az ilyen diffegyenletek megoldását exponenciális alakokban is kereshetjük. Két szabad paraméterünk lesz itt is: C, λ

$$x(t) = C\cdot e^{\lambda t}$$

((első- és másodrendű diffegyenletek megoldását kereshetjük így)).

$$\ddot{x}(t) = C\cdot \lambda^2\cdot e^{\lambda t}$$

Behelyettesítve:

$$\cancel{C}\cdot\lambda^2\cdot \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2\,\cancel{C}\cdot\cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega_0^2$$

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$\rightarrow$ (általános megoldás)

Köv.: a λ-t megint választhatjuk meg szabadon, de helyette a C_1, C_2 lesz a két szabad paraméter.

Kezd. felt. pl.:

$x(t=0) = x_0$

$v(t=0) = 0$

$$x(t=0) = x_0 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$v(t) = C_1\cdot i\omega_0\cdot e^{i\omega_0 t} + C_2(-i\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$$

$\rightarrow v(t=0) = 2$

$$v(t=0) = 0 = C_1 i\omega_0 + C_2(-i\omega_0)$$

$$C_1 = C_2$$

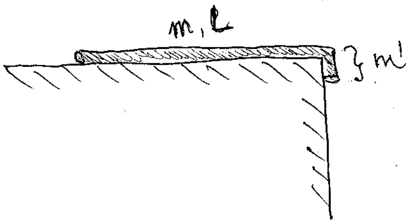
$$C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) = x_0 \cdot \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>1. Hf:</u> $x(t=0) = 0$
$v(t=0) = v_0$

<u>2. Hf:</u> $x(0) = x_0$
$v(0) = v_0$

$\boxed{3.}$ m tömegű, L hosszúságú zsineg az asztalon, a széle kicsit lelóg. Mennyi idő alatt csúszik le?



idealizálunk: az asztalon levő rész mindvégig hozzáér az asztalhoz, surlódásmentesen csúszik, homogén tömegeloszlású

$x(t)$ = asztalról lelógó rész hossza

$$m\ddot{x} = m'g$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{x}{L} \longrightarrow m' = \frac{m}{L}x$$

$$\cancel{m}\ddot{x} - \frac{\cancel{m}g}{L}x = 0$$

$$x(t) = C \cdot e^{\lambda t} \longrightarrow \cancel{C} \cdot \lambda^2 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} - \frac{g}{L}\cancel{C}\cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{g}{L}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

K.f. pl.: $x(0) = 0$; $v(0) = v_0$

$$v(t) = C_1\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} + C_2\left(-\sqrt{\frac{g}{L}}\right)e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}t}$$

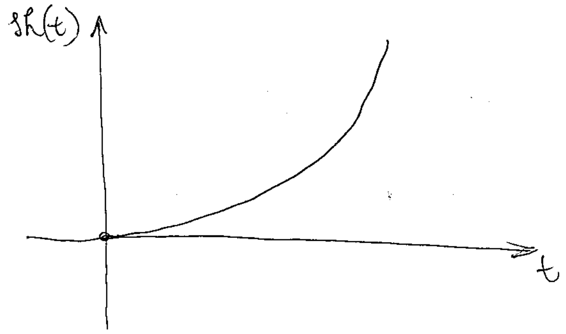
$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 0 = C_1 + C_2 \\ v(0) &= v_0 = C_1\sqrt{\frac{g}{L}} - C_2\sqrt{\frac{g}{L}} \end{aligned}\right\}$$

$$v_0 = C_1\sqrt{\frac{g}{L}} - (-C_1)\sqrt{\frac{g}{L}} = 2C_1\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$C_1 = \frac{v_0}{2}\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$C_2 = -\frac{v_0}{2}\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot t}\right) = v_0\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot t\right)$$



Mennyi idő alatt csúszik le az asztalról? $\tau = ?$

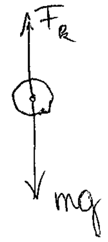
$\tau = ?$ Amikor: $L = x(t)$ (kötél hossza = lelógó rész hossza)

$$L = v_0\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\tau\right) \longrightarrow \frac{L}{v_0}\cdot\sqrt{\frac{g}{L}} = \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\tau\right)$$

$$\operatorname{arsh}\left(\frac{L}{v_0}\cdot\sqrt{\frac{g}{L}}\right) = \sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\tau$$

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}\cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{L}{v_0}\cdot\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$$

$\boxed{4.}$ Szabadesés ellenálló közegben. Az ellenállás arányos a sebességgel, és azzal ellentétes irányú.



$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\dot{x} \qquad \lambda := \frac{k}{m}$$

trükk: $$\ddot{x} = -\lambda\underbrace{\left(\dot{x} - \frac{g}{\lambda}\right)}_{:=\dot{u}}$$

$:= \dot{u}$ (valaminek az idő sz. deriváltja)

ez azért jó, mert:

$$\ddot{u} = \ddot{x}$$

$$\ddot{u} + \lambda\dot{u} = 0 \quad \text{(visszavezethük az első esetre)}$$

$$(\dot{u})^{\circ} + \lambda(\dot{u}) = 0 \qquad \xi := \dot{u}$$

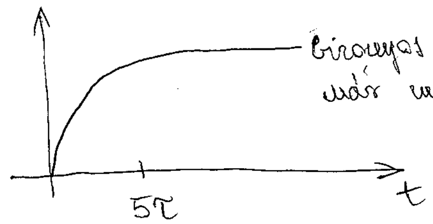
$$\dot{\xi} + \lambda\xi = 0$$

Hf: $\xi(t) = \xi_0 e^{-\lambda t}$

$x(t=0) = h_0$

$v(t=0) = 0$

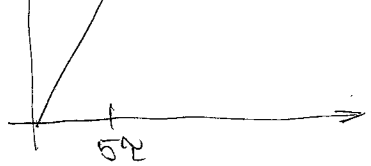
valami ilyen alakút kell kapni:



bizonyos magasság után már mindegy, hogy milyen magasról ugranak le

(M)

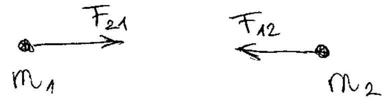
Pl. egy áramkörnél is:



egy idő után beáll az áram áll.

$\boxed{11.18.}\ \boxed{EA}$

Kéttest-probléma*



$$m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$
$$m_2 \underline{a}_2 = \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = -\underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

*A két test közötti kölcsönhatás csak (az egymástól számított) relatív helyüktől függ.

$$m_1 \underline{a}_1 + m_2 \underline{a}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2) = 0 \longrightarrow$$ Tehát a rendszer összimpulzusa állandó.

$$\Updownarrow$$

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{áll.}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2) = 0 \longrightarrow$$ Az idő lineáris fve.

$$\Updownarrow$$

$$m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = \underline{A}t + \underline{B}$$

$$\underline{r}_0 := \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$\underline{r}_0$ = tömegközéppont (súlypont)

$\ddot{\underline{r}}_0 = 0$ (A tömegközéppont gyorsulása mindig nulla.)

$$M := m_1 + m_2$$

$$M \ddot{\underline{r}}_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\underline{r}}_1 &= \frac{1}{m_1}\underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ \ddot{\underline{r}}_2 &= \frac{1}{m_2}\underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \end{aligned}\right\} \quad \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{:=\frac{1}{m^*}} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

m^* = redukált tömeg

$\boxed{11.18.}$ $\boxed{EA}$

Kéttest-probléma*

$$m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$
$$m_2 \underline{a}_2 = \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = -\underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

* A két test közötti kölcsönhatás csak (az egymástól számított) relatív helyüktől függ.

$$m_1 \underline{a}_1 + m_2 \underline{a}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2) = 0 \longrightarrow$$ Tehát a rendszer összimpulzusa állandó.

$$\Updownarrow$$

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{áll.}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2) = 0 \longrightarrow$$ Az idő lineáris fv-e.

$$\Updownarrow$$

$$m \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = \underline{A}t + \underline{b}$$

$$\underline{r}_0 := \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$\underline{r}_0$ = tömegközéppont (súlypont)

$\ddot{\underline{r}}_0 = 0$ (A tömegközéppont gyorsulása mindig nulla.)

$$M := m_1 + m_2$$

$$M \ddot{\underline{r}}_0 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\underline{r}}_1 &= \frac{1}{m_1} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ \ddot{\underline{r}}_2 &= \frac{1}{m_2} F_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \end{aligned}\right\} \quad \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{:= \frac{1}{m^*}} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

m^* = redukált tömeg

Bevezetjük a relatív koordinátát: $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

égy: $m^* \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}(\underline{r})$

Ha rögzítjük m_2-t:

$m_1 \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}(\underline{r})$ $\Rightarrow$ (Tehát ha megoldjuk az egytest problémát (rögz. m_2), akkor gyakorlatilag megoldottuk a kétt. p.-t is.)

Bolygók mozgása:

Ha az egyiket rögzítettnek tekintjük:

$$m_1 \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|r|}$$

Ha nem rögzítjük:

$$m^* \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|r|}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|r|}$$

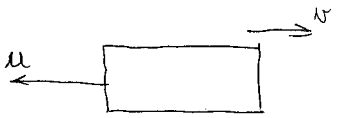
$$\ddot{\underline{r}} = -\gamma \cdot \frac{m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|r|}$$ ($\rightarrow$ rögzített m_2)

$$\ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{|r|}$$ $\longrightarrow$ Nem teljesül Kepler III. törvénye!

(I) A tömegközéppont egy. v. egyenletes mozgást végez.

(II) A bolygók egymás körül és a közös tömegkp. körül IS ellipszispályán mozognak!

Rakétameghajtás:



u sebességgel kiáramló üzemanyag

Δm – mel változik a tömege

Δv – vel vált. a sebessége

$$m \cdot \Delta \underline{v} - (\Delta m)\, \underline{u} = 0$$

$$m \cdot \Delta \underline{v} + \Delta m \cdot \underline{u} = 0$$

$$m \Delta v = - u \cdot \Delta m$$

$$\Delta v = - u \cdot \frac{\Delta m}{m}$$

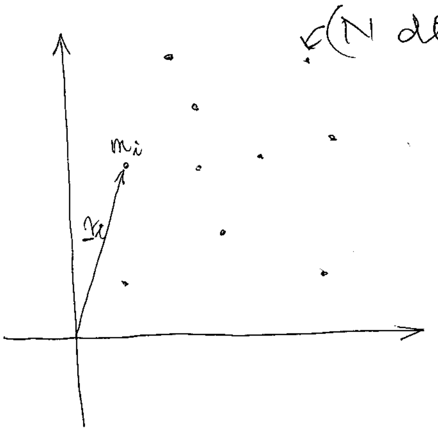
$$\frac{dv}{dm} = - \frac{u}{m} \longrightarrow$$ Az ln függvény ilyen alakú!

$$v(m) = -\int_{m_0}^{m} \frac{u}{m}\, dm = -u \cdot \int_{m_0}^{m} \frac{1}{m}\, dm$$

$$v(m) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Pontrendszerek

(M) A testeket pontszerűnek tekintjük, hogy érvényesen maradjon ~~legyen~~ a szuperpozíció elve.



külső erő

többi pontból sz. erő.

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \underline{K}_{ij} = \sum_{j}^{N} \sum_{i}^{N} \underline{K}_{ji}$$ Newton 3.

$$\sum_{i,j} \underline{K}_{ij} = \sum_{j,i} \underline{K}_{ji} \overset{\text{Newton 3.}}{=} -\sum_{i,j} \underline{K}_{ij} \equiv 0$$

Tehát $\sum_i m_i \underline{\ddot{r}}_i$ nem függ a belső erőktől!

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\ddot{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \quad (\leftarrow \text{külső erők összege})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$$

A rendszer összimpulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a külső erők összegével. A belső erők nem tudják megváltoztatni az összimpulzust!

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$$

$$\underline{r}_c = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad M = \sum_i m_i$$

$$M\underline{\ddot{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$$

A tkp. mozgását a belső erők nem befolyásolják!

$$\underline{r}_i \times m_i \underline{\ddot{r}}_i = \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}$$

$$\frac{d\underline{N}_i}{dt} = \underline{M}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}$$

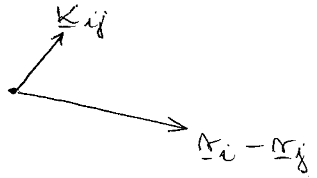
$\underline{N}_i$ = impulzusmomentum

$\underline{N}$ = összimpulzusmomentum

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij} = \sum_{i,j} \underline{r}_j \times \underline{K}_{ji} = \sum_{ij} \underline{r}_j \times (-\underline{K}_{ij}) = -\sum_{ij} \underline{r}_j \times \underline{K}_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{K}_{ij}$$



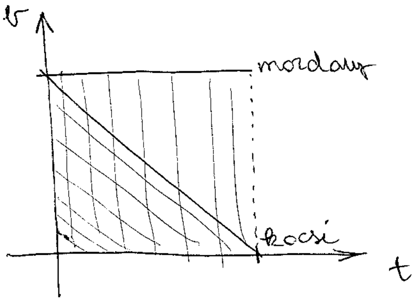
Ha a belső erők centrálisak, azaz $\underline{K}_{ij} \parallel \underline{r}_i - \underline{r}_j$, akkor ez az összeg nulla.

$\Downarrow$

Ekkor a rendszer összimpulzusmomentumát a belső erők nem befolyásolják.

$\boxed{11.19. | Gy}$

M) A „mozdonyról lekapcsoljuk a kocsit" ZH-feladat legegyszerűbb megoldása:

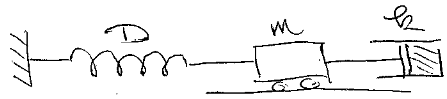


$$\frac{s_k}{s_m} = \frac{1}{2}$$

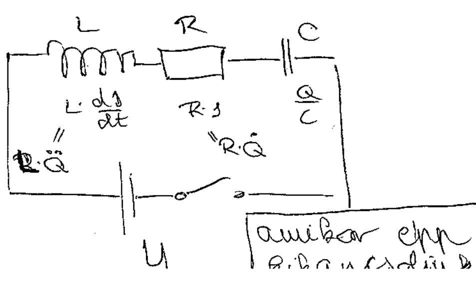
$\boxed{1.}$

sebességgel arányos csillapítás

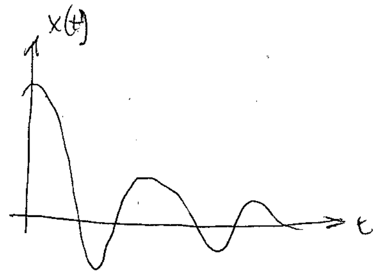
$$m\ddot{x} = -Dx - k\dot{x}$$



M.) Ez a jelenség matematikailag megegyezik a soros LRC-kör esetével: x kitérés helyett I árammal:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$



$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

k.a.m.: $x(t) = A(t)\cdot\sin(\omega t+\varphi)$

(1) megengedjük, hogy az amplitúdó időben változhasson; és hogy az $\omega \neq \omega_0$ legyen

$$\dot{x}(t) = \dot{A}\cdot\sin(\omega t+\varphi) + A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{A}\cdot\sin(\omega t+\varphi) + \dot{A}\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi) + \dot{A}\omega\cdot\cos(\omega t+\varphi) - A\omega^2\cdot\sin(\omega t+\varphi)$$

$$\left[\ddot{A}\cdot\sin(\omega t+\varphi) + 2\dot{A}\omega\cos(\omega t+\varphi) - A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)\right] +$$

$$+ 2\beta\left[\dot{A}\sin(\omega t+\varphi) + A\omega\cos(\omega t+\varphi)\right] + \omega_0^2\cdot A\cdot\sin(\omega t+\varphi) = 0$$

(2) [$\forall t > 0$-ra]! teljesülnie kell, hogy a $\sin(\omega t+\varphi)$ és $\cos(\omega t+\varphi)$ együtthatói nullák! $0\cdot\sin() + 0\cdot\cos() = 0$

(sin) $\ddot{A} + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A - \omega^2 A = 0 \Rightarrow$ (**)

(cos) $\cancel{2}\dot{A}\omega + \cancel{2}\beta A\cancel{\omega} = 0$

$$\dot{A} + \beta A = 0$$

$$\Downarrow$$

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ → (a szinuszos hullámzás amplitúdója exponenciálisan lecseng)

(**) $\ddot{A} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t} = \beta^2 A$

$$\beta^2 A - 2\beta(\beta A) + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0$$ →

$$Z: \; -\beta^2 \cancel{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)\cancel{A} = 0$$

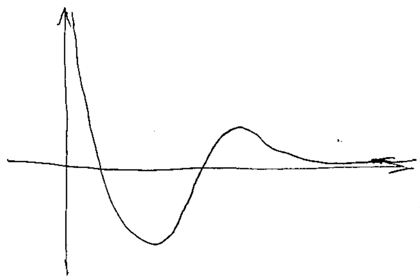
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \;/\sqrt{} \rightarrow$$ az eredmény ω_0-tól és β-tól függ.

- ha $\omega_0^2 > \beta^2$ - gyenge csillapítás
  - gyököt vonhatunk
  - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$
  - $\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi\right)}$

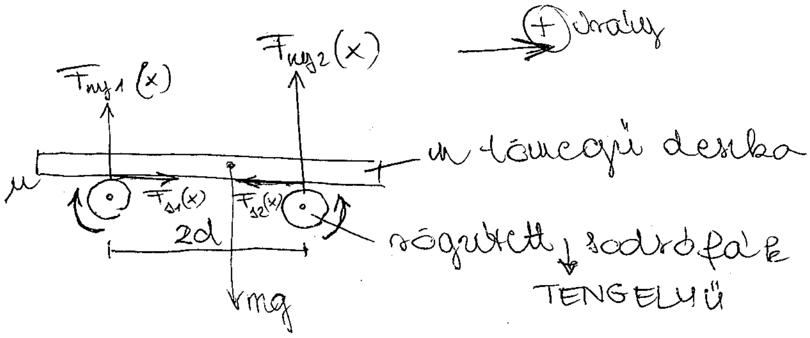
  ↳ diffegy. ált. mo. a gyenge csill. esetén

  Hf: kezd. f.ekből A_0 és φ meghatározása

- ha $\omega_0^2 < \beta$: erős csillapítás



2.



Milyen mozgást végez a deszka, ha nem pont közepére rakjuk? (Az egyik sodrófán nagyobb tömeg)

$$F_s = \mu \cdot F_{ny}$$

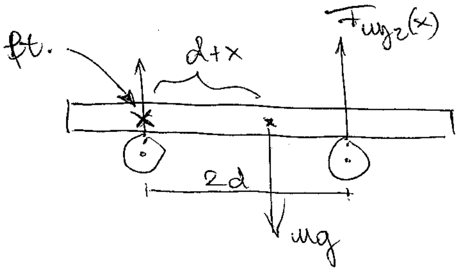
A függőleges erők összege nulla: $mg = F_{ny1}(x) + F_{ny2}(x)$

$$m\ddot{x} = F_{s1}(x) - F_{s2}(x)$$

$$m\ddot{x} = \mu\left(F_{ny1}(x) - F_{ny2}(x)\right) = (**)$$

(!) Ez a deszka <u>nem</u> tekinthető tömegpontnak. Mivel függőlegesen egyensúlyban van: $\sum \underline{F} = 0$ és $\sum \underline{M} = 0$

<u>Egyensúly</u> esetén a forgatónyomaték bárhol felvehető. Érdemes az egyik erő támadáspontjába felvenni.



$$m\cdot g\cdot(d+x)\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = F_{ny2}(x)\cdot 2d\cdot\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$F_{ny2}(x) = mg\,\frac{x+d}{2d}$$

$$F_{ny1}(x) = mg\cdot\frac{d-x}{2d}$$

$$(**) = \mu\cdot\frac{mg}{2d}\left(\cancel{d}-x-x-\cancel{d}\right) = -\mu\frac{mg}{\cancel{2}d}\cdot\cancel{2}x = -\frac{\mu mg}{d}x$$

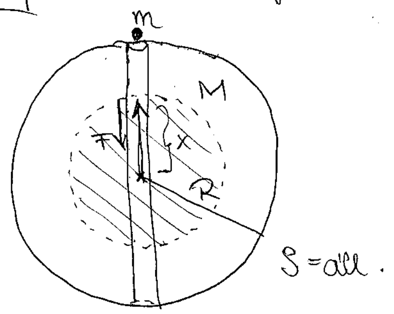
$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{d}\cdot x = 0 \qquad \left[\frac{\mu g}{d} = \omega_0^2\right]$$

Harmonikus rezgőmozgást folytat ilyen frekvenciával.

<u>Hf</u>: $x(t)$ felírása tetsz. kezd. feltételekkel.

(M) Soros RLC-körből hogyan csinálunk harm. rezgőmozgást? Kivesszük az R-t!

3. Föld homogén sűrűséggel:



Átfúrjuk, beleejtünk egy m tömeget. Harm. r. középpontjától mért kitérés = x. (Ezzel arányos erő húzza vissza az m-et.

Eredmény: x kitérés esetén csak a //// jelölt ~~terület~~ térfogat hat rá gravitációs erővel.
(és elektrosztat. ~~ultal~~)

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{m \cdot M(x)}{x^2} =$$

$$\frac{M(x)}{M} = \frac{\frac{4\pi}{3}x^3}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

$$= -\gamma \frac{m \cdot \frac{Mx^3}{R^3}}{x^2} =$$

$$= -\frac{\gamma m M}{R^3} \cdot x$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma M}{R^3} x = 0$$

$$\frac{\gamma \cdot M}{R^3} = \omega_0^2 = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6{,}4 \cdot 10^6)^3}$$

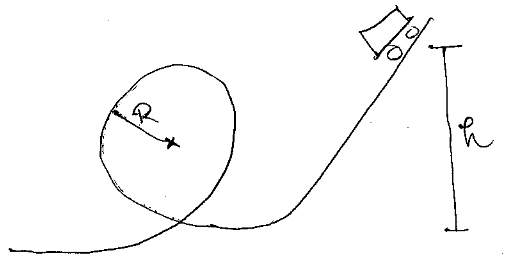
$$\omega_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \ \frac{1}{s}$$

Egy teljes rezgést ~ 85 perc alatt tesz meg.

$$T \cong 5050 \ s \simeq 85 \ \text{perc}$$

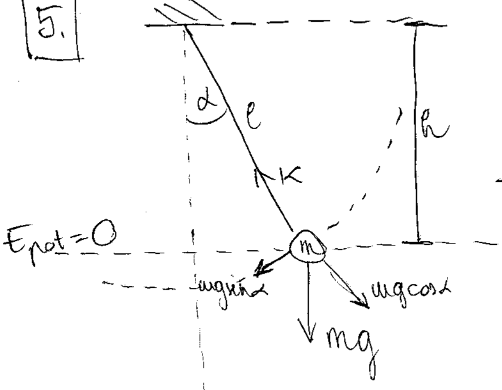
M Bárhogy fúrjuk a lyukat ("húrirányba") ez az idő mindig ugyanakkora lesz.

Hf: R sugarú hurok.



Ha nincs surlódás, mekkora h magasságból engedjük el a kocsit, hogy végigmenjen a hurkon?

5.



$a_{cp}(\alpha) = ?$

$a_{tg}(\alpha) = ?$

$F_{cp}(\alpha) = ?$

$K(\alpha) = ?$

$E_{pot1} = E_{kin2}$

$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$

$2gl\cos\alpha = v^2$

$mg\cdot\sin\alpha = m\cdot a_{tg}$

$a_{tg} = g\cdot\sin\alpha$

$F_{cp} = K - mg\cdot\cos\alpha$

$\frac{mv^2(\alpha)}{l} = K - mg\cdot\cos\alpha$

$\frac{m2g\cancel{l}\cos(\alpha)}{\cancel{l}} = K - mg\cos\alpha$

$K = 3mg\cos\alpha$

$F_{cp} = 2mg\cos\alpha$

$a_{cp} = 2g\cos\alpha$

Spec. $\alpha = \frac{\pi}{2}$

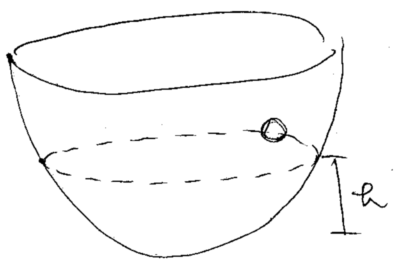
$a_{tg} = g$; $a_{cp} = 0$; $K = 0$; $F_{cp} = 0$; $v = 0$

Spec $\alpha = 0$

$a_{tg} = 0$; $a_{cp} = 2g$; $K = 3mg^{***}$; $F_{cp} = 2mg$; $v = 2gl$

*** Az alsó pontban a test súlyának háromszorosát el kell bírnia egy kötélnek.

Hf: R sugarú tálgyú



$v(h) = ?$

h magasságban mekkora sebességgel tud a golyó körbe futni?

11.20. EA

$\underline{N}$ = összimpulzusmomentum $= \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}$$

(!) Tömegközéppont: $\underline{r}_0$, $\underline{v}_0$

$$\underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i$$

$$\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i$$

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} (\underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i) \times (m_i [\underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i]) =$$

$$= \underbrace{\underline{r}_0 \times M \underline{v}_0}_{**} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i}_{\text{sajátimpulzusmomentum}} + \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \underline{v}_0 + \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_0 \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i =$$

** csak a tkp. adatait tartalmazza = pályaimpulzusmomentum

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\varrho}_i\right)}_{\text{a tkp. szerinti rendszerben a tkp. koordinátája} \cdot M \equiv 0} \times \underline{v}_0 + \underline{r}_0 \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i\right)}_{\text{a tkp. sz. rendszerben a tkp. sebessége} \equiv 0} + [\text{első 2 tag}]$$

$$\underline{N} = \underline{r}_0 \times M \underline{v}_0 + \underline{N}_s$$

$\underline{N}_s$ = sajátimpulzusmomentum $= \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i$

(M) ~~ele~~ részecske spinje = sajátimp. momentuma

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}_0 \times M \dot{\underline{r}}_0\right) + \frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)} = \left(=\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}\right)$$

$$= \underline{r}_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i^{(k)}$$

$$\underline{r}_0 \times \underbrace{M \frac{d^2 \underline{r}_0}{dt^2}}_{***} + \frac{d\underline{N}_s}{dt} = \underbrace{\underline{r}_0 \times \left(\sum_i \underline{F}_i^{(k)}\right)}_{***} + \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i^{(k)}$$

*** ez a kettő megegyezik, kiesik

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i^{(k)}$$ (a külső erők forgatónyomatéka a tkp.i rendszerben)

((ez gyorsuló kr.ben is igaz))

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} \underline{K}_{ij}$$

(j-re összegzünk)

$$m_i \underline{v}_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{v}_i \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} \underline{v}_i \underline{K}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2\right) = P_i + \sum_{j \neq i} \underline{v}_i \cdot \underline{K}_{ij}$$

(teljesítmény)

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \sum_{i=1}^{N} P_i + \underbrace{\sum_{i,j} \underline{v}_i \cdot \underline{K}_{ij}}$$ $/ \int$

Ez <u>majdnem sose</u> lesz nulla, a belső erők mindig végeznek valami kis munkát.

$$\Delta E_{kin} = W^{(k)} + W^{(b)}$$ [(k)ülső és (b)első]

Ha mind a külső, mind a belső erők konzervatívak, teljesül az energiamegmaradás törvénye.

$$E_{kin} + \sum_i \phi_i^{(k)}(r_i) + \frac{1}{2}\sum_{ij} \phi_{ij}^{(b)}(\underline{r}_i, \underline{r}_j) = E_{össz.}$$

Merev testek: az összes belső erő kényszererő (amelyek biztosítják, hogy bármely két pont távolsága áll. legyen), és ugyebár a kényszererők által végzett munka összege nulla.

Ezért merev testek esetén: $E_{össz.} = E_{kin} + \sum_i \phi_i^{(k)}(r_i)$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (\underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i)^2 m_i =$$

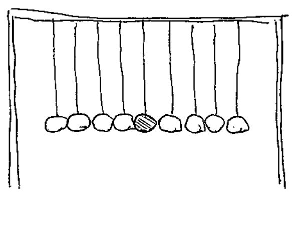
$$= M\cdot\frac{\underline{v}_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i^2 + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i \underline{v}_0}}_{\underline{v}_0 \sum_i m_i \dot{\underline{\varrho}}_i = 0}$$

tkp. mozgási energiája

forgási energia

Ütközések

(M)



Ha az egyik szélsőt térítjük ki, a másik oldali szélső golyó térül csak ki. Ha a két szélsőt, akkor a másik oldalon szintén a két szélső térül ki.

Ha az öt oldalsó golyót térítjük ki, akkor ütközésnél ebből a 4 szélső megáll, a középső pedig a másik oldalon lévő 4-gyel együtt kitérül („csatlakozik hozzájuk").

Mi azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a testek tömege nem változik.

$m_1 \quad \underline{v}_1^{(i)} \longrightarrow \underline{v}_1^{(f)}$ i: initial

$m_2 \quad \underline{v}_2^{(i)} \qquad\quad \underline{v}_2^{(f)}$ f: final

$$m_1\underline{v}_1^{(i)} + m_2\underline{v}_2^{(i)} = m_1\underline{v}_1^{(f)} + m_2\underline{v}_2^{(f)}$$

$$\frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^2 + \phi_{12} = \text{áll.}$$

$\searrow$ potenciális energia

(Amikor a testek nagyon messze vannak egymástól, akkor $\phi_{12} \to 0$) $\left(\cancel{d \to \infty}\right)^{\text{(fordítva)}}$ $\left(\phi \xrightarrow[d \to \infty]{} 0\right)$

$$\frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^{(i)2} + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^{(i)2} = \frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^{(f)2} + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^{(f)2}$$

(($\to$ a hatból négy paraméter rögzített))

Írjuk fel szebben! Írjuk fel a tkp. rendszerből!

$$\underline{v}_1' = \underline{v}_1 - \underbrace{\frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2}}_{\text{tkp. sebessége}} = \frac{(\cancel{m_1}+m_2)\underline{v}_1}{m_1+m_2} - \frac{\cancel{m_1\underline{v}_1} + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$\underline{v}_1' = \frac{m_2(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

Impulzusa:

$$\underline{p}_1' = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = m^*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

$$\underline{p}_2' = -\underline{p}_1' = -m^*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \qquad (\text{mert } \Sigma p = 0)$$

kis p - k

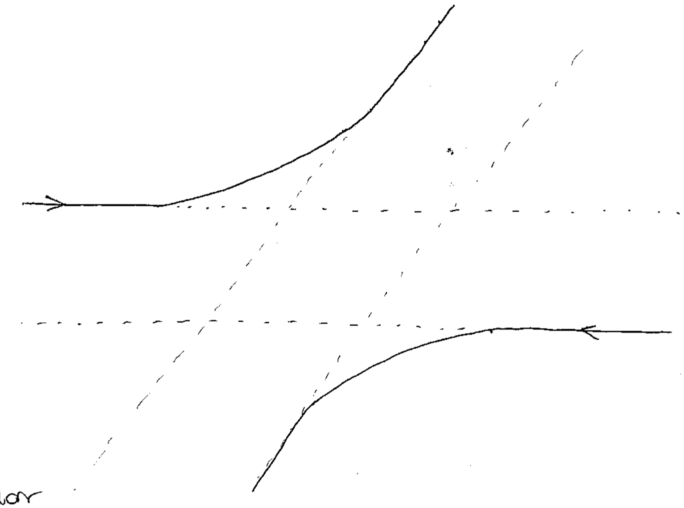
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1^{'(i)2}}{m_1}+\frac{1}{2}\frac{p_2^{'(i)2}}{m_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1^{'(f)2}}{m_1}+\frac{1}{2}\frac{p_2^{'(f)2}}{m_2}$$

(mivel $p_1' = -p_2'$ és $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{m^*}$)

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{p_1^{'(i)2}}{\cancel{m^*}}=\cancel{\frac{1}{2}}\frac{p_1^{'(f)2}}{\cancel{m^*}}$$

$$\left|p_1^{'(i)}\right|=\left|p_1^{'(f)}\right|$$

Ütközés tkp. r.ben.



$$p_1^{'(f)}=\left|p_1^{'(i)}\right|\cdot \underline{n}$$

egységvektor

$\boxed{11.25.}\boxed{EA}$

$$p_1^{(f)}=\left|p_1^{(i)'}\right|\cdot\underline{n}$$

$$\left|p_1^{(i)'}\right|=m^*\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|$$

$$p_2^{(f)'}=-p_1^{(f)'}$$

valamilyen egységvektor (milyen? később)

$$\underline{v}_1^{'(f)}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|\cdot\underline{n}$$

$$\underline{v}_2^{'(f)}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|\cdot\underline{n}$$

(vesszőtlen ⇒ laborrendszerben)

$$\underline{v}_1^{(f)}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|\underline{n}+\frac{m_1\underline{v}_1^{(i)}+m_2\underline{v}_2^{(i)}}{m_1+m_2}$$

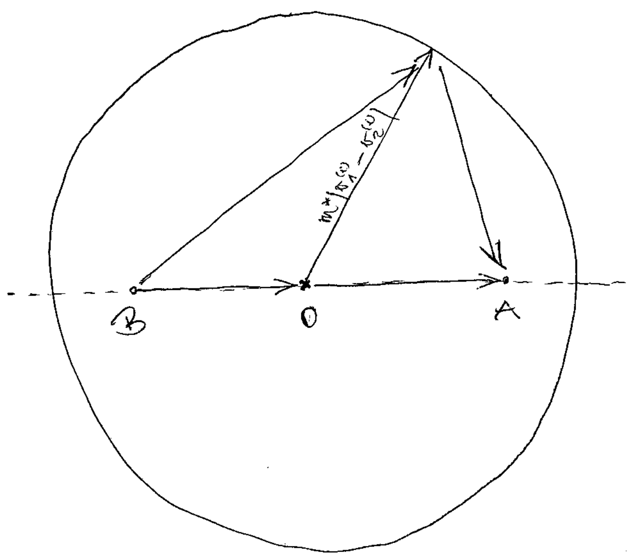
$$\underline{v}_2^{(f)}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|\underline{n}+\frac{m_1\underline{v}_1^{(i)}+m_2\underline{v}_2^{(i)}}{m_1+m_2}$$

$$p_1^{'(f)}=m^*\left|\underline{v}_1^{(i)}-\underline{v}_2^{(i)}\right|\underline{n}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(p_1^{(i)}+p_2^{(i)}\right)$$

$$p_2^{(f)} = -m^*\left|\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}\right|\underline{n} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(p_1^{(i)} + p_2^{(i)}\right)$$

$p_1^{(f)}$ és $p_2^{(f)}$ felrajzolása:

(kör sugara: $m^*\left|v_1^{(i)} - v_2^{(i)}\right|$)

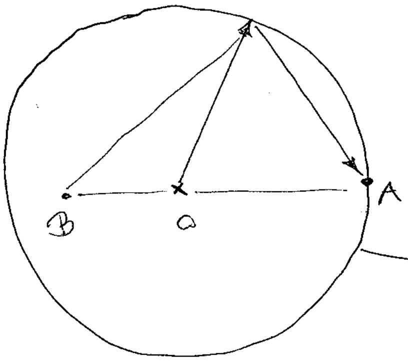


$$\vec{OA} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(p_1^{(i)} + p_2^{(i)}\right)$$

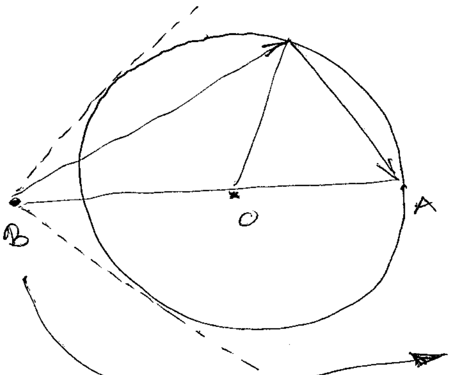
$$\vec{BO} = \frac{m_1}{m_2+m_1}\left(p_1^{(i)} + p_2^{(i)}\right)$$

Ha $p_2^{(i)} = 0$ (egy álló testhez ütközik egymásik):

$$\vec{BO} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \vec{OA}$$

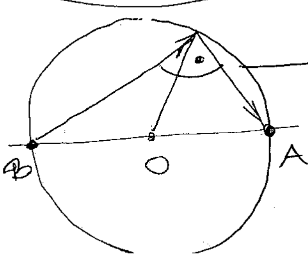


ez az az eset, amikor $m_1 < m_2$



ez pedig az, amikor $m_1 > m_2$

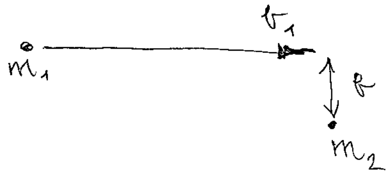
az álló test kitérési



ekkor a két test sebessége merőleges egymásra

amikor $m_1 = m_2$

(*) ennek határesete, amikor egy egyenes mentén mozognak a testek



b = ütközési paraméter

(M) mi itt (eddig és ezután is) tökéletesen rugalmas ütközésekkel foglalkozunk

Merev testek mozgása

A belső (kényszer)erők összmunkája nulla. (Bármely 2 pont távolsága áll. a merev testben).

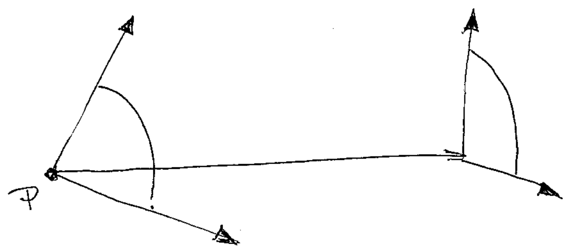
Ha 3 pontját megadjuk egy merev testnek (9 adat), és ebből kivonunk 3 összefüggő adatot (pontok áll. táv.), akkor ezzel a 6 adattal egyértelműen megadható a merev test helyzete.

$$M \cdot \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \qquad (3)$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)} \qquad (3)$$

erre a 6 egyenletre van szükségünk

(!) A fenti egyenletek tartalmazhatnak kényszererőket – azokat is ismernünk kell.



A P pont rajta van a merev testen + 2 irány + 1 szög

Helyzet megadása:
kitüntetett pont (P) elmozdulása
+ elfordulás:

$$\boxed{\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r}_0 + \underbrace{\Delta \varphi \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}_{\text{! kicsi elfordulásnál}}}$$

$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \underline{v} =$ tetszőleges pont sebessége

$$\boxed{\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

kitüntetett pont sebessége

(M) A kitüntetett pontnak nem feltétlenül kell a tkp-nak $(\underline{r}_0, \underline{v}_0)$ lennie!

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{\varrho} \qquad \underline{\varrho} = \underline{r} - \underline{r}_0$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0' + \underline{\omega}' \times \underline{\varrho}' \longrightarrow \underline{\omega}' = \underline{\omega}^{**}$$

$$\underline{r}_0 = \underline{r}_0' + \underline{a}$$

$$\underline{\varrho} = \underline{\varrho}' + \underline{a}$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega}(\underline{\varrho}' + \underline{a}) = \underbrace{\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a}}_{\underline{v}_0'} + \underline{\omega} \times \underline{\varrho}'$$

** A szögsebességvektor nem függ attól, hogy hogyan választjuk meg a kitüntetett pontot.

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i$$

Tkp rendszerben: $\dot{\underline{\rho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$

(a kitüntetett pont a tkp.)

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}$$

(ez az ω-nak lin. fv-e)

tenzor

$$N_{s_i} = \sum_{j=1}^{3} \Theta_{ij}\,\omega_j = \underbrace{\Theta_{ij}\,\omega_j}$$

M Einstein-konvenció: ekkor mindig 1–3-ig szummázunk
egyező indexek

M $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$

$$\underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = (\underline{\rho}_i\underline{\rho}_i)\underline{\omega} - (\underline{\rho}_i\underline{\omega})\underline{\rho}_i = (\underline{\rho}_i\underline{\rho}_i)\hat{I}\,\underline{\omega} \mp$$

$$\mp (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i)\underline{\omega} = \underline{\omega}\left[(\underline{\rho}_i\underline{\rho}_i)\hat{I} \mp (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i)\right]$$

$$\underline{N}_s = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\left[(\underline{\rho}_i\underline{\rho}_i)\hat{I} - (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i)\right]\right)}_{:=\hat{\Theta}}\underline{\omega}$$

$$\underline{\rho}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

$\hat{\Theta}$ szimmetrikus, sajátértékei valósak

↳ a sajátrendszerében egy diagonális mátrix

↳ a diagonálisban az értékek nem változnak ⇒

⇒ a sajátértékek pozitívak:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_1 \geq 0 \; ; \quad \Theta_2 \geq 0 \; ; \quad \Theta_3 \geq 0$$

tetszőleges $\underline{a}$ vektor esetén:

$$\underline{a}\,\hat{\Theta}_s\,\underline{a} \geq 0 \longrightarrow \hat{\Theta}_s \text{ pozitív definit}$$

$$\shortparallel$$

$$\Theta_1 a_1^2 + \Theta_2 a_2^2 + \Theta_3 a_3^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{\rho}}_i \dot{\underline{\rho}}_i}_{E_{forg} \text{ (forgási energia)}} \qquad \dot{\underline{\rho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$$

$$E_f = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i)}_{:= \underline{c}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\underline{\rho}_i \times \underline{c})\, \underline{\omega} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \big(\underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i)\big) \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \left[\sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times m_i (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{N}_s \cdot \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \hat{\Theta}\, \underline{\omega} \geq 0$$

M. csak merev testekre igaz!

Nehézség: a tehetetlenségi nyomaték (tenzor) függ az időtől

$$\underline{N}_s = \hat{\Theta}(t)\, \underline{\omega}(t)$$

(a $\hat{\Theta}$-t és az ω-t is kell deriválni $\frac{d\underline{N}_s}{dt}$ esetén!)

$\boxed{11.26.}\ \boxed{EA}$

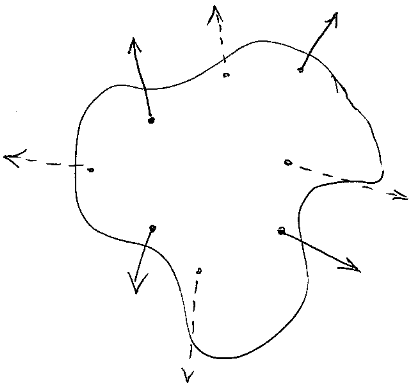
a mozgásegyenleteket ~~ezek~~ az erők határozzák meg

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}$$

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'^{(k)} \qquad \underline{N}_s = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}$$

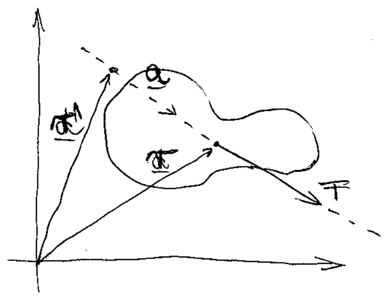
$\underline{M}$ = forgatónyomaték

M = össztömeg



$\longrightarrow$ erők

$\dashrightarrow$ helyettesítő erők, amelyek hatására ugyanúgy mozog a test



$\underline{F}$-et eltoljuk a hatásvonala mentén $\Rightarrow$ $\underline{a}$ (ha nem a hv. mentén toljuk el, változik a forgatónyomaték)

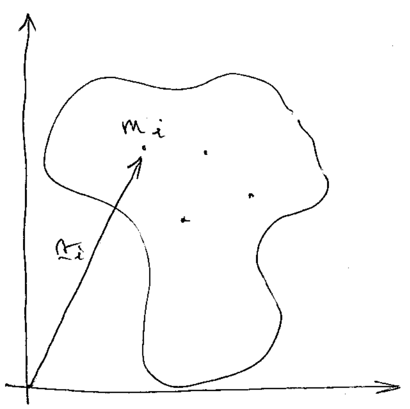
$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{r}' \times \underline{F} + \cancel{\underline{a} \times \underline{F}}$$

$$\underline{r} = \underline{r} + \underline{a}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} = \underline{F} \qquad \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)} = \underline{r}_0 \times \underline{F}$$

$$\underline{F}(\underline{r}_0 \times \underline{F}) \equiv 0$$

Ha $\sum F_i \perp \sum M_i$, akkor találhatunk egy olyan erőt, amellyel helyettesíthető a többi.



$$\underline{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{g} = M \cdot \underline{g}$$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times m_i \underline{g} =$$ (gravitációs erőből adódó forgatónyomaték)

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i\right) \times \underline{g} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M} \times M \cdot \underline{g} \equiv Z$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M} = \underline{r}_0 \text{ (= súlypont koordinátája)}$$

$$\tau = \underline{r}_0 \times M\underline{g} = \underline{r}_0 \times \underline{G} \qquad \underline{G} \text{ - súly}$$

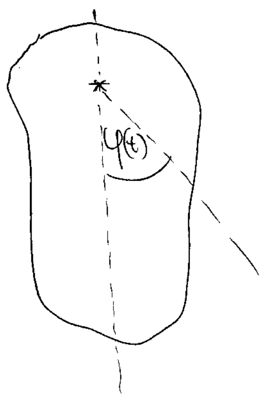
(M) Homogén gravitációs erőtérben súlypont $\equiv$ tkp.

$$\text{Tömegközéppont} := \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M}$$

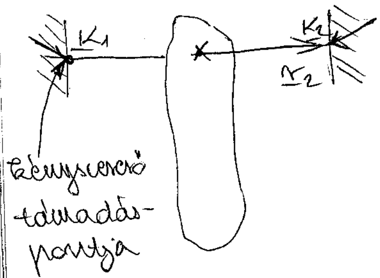
Súlypont: az az $\underline{r}_0$, amelyre $\underline{r}_0 \times \underline{G} = \underline{M}$

$\boxed{1.}$

Merev test tengely körüli forgása = fizikai inga



- egy? adat kell a mozgás leírásához: $\varphi(t)$
- egy egyenlet
- DE: vannak kényszererők, amelyek tengely körüli forgásra késztetnek ($\underline{K}_1$, $\underline{K}_2$)



$\underline{r}_2 \times \underline{K}_2$ -nek nincs tengelyirányú komponense, azaz ha tengely = z-tengely:

$$(\underline{r}_2 \times \underline{K}_2)_z \equiv 0$$

Emiatt a mozgásegyenletekből kiválasztjuk azt, melyre:

$$\frac{d\underline{N}_z}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}\right)_z$$

$$\underline{N} = \hat{\Theta}\,\underline{\omega} \xrightarrow[\text{komponense}]{\text{harmadik}} \underbrace{N_z = \Theta^{*}_{zi}\,\omega_i}_{} \qquad \underline{\omega} = (0,0,\omega)^{**}$$

Ⓜ Einstein: közös index (i) $\equiv$ autom. összegzés!

$$^{**}\quad N_z = \Theta_{zz}\,\omega \qquad \left(\Rightarrow N_3 = \Theta_{33}\,\omega\right)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$\underline{v}$ = merev test sebessége

$\underline{v}_0$ = kitüntetett pont sebessége

$$\underline{v} = \cancel{\underline{v}_0} + \underline{\omega} \times \underline{r} \longrightarrow \underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \hat{\Theta}^{*} \cdot \underline{\omega}$$

NEM konjugált! hanem forg. tengelyhez rögzített koord. r.-ben vett Θ!

így: $N_3 = \hat{\Theta}^{*}_{3i}\,\omega_i$

$$N_3 = \Theta^{*}_{33}\,\omega$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}\right)_3 \qquad \frac{d}{dt}\,\Theta^{*}_{33}\,\omega$$

Ⓜ ahogy elfordul a test, megváltozik $\Theta^{(*)} \longrightarrow \Theta(t)$

de:

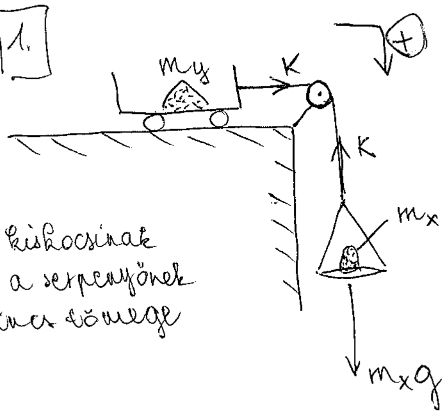
$$\Theta_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{}$$

forgástengelytől mért távolság $\Rightarrow$ NEM függ az időtől

$$\frac{d}{dt}\,\Theta^{*}_{33}\,\omega = \Theta^{*}_{33}\,\dot{\omega} \qquad [\dot{\omega} = \beta]$$

$$\Theta^{*}_{33}\,\beta = M_z \qquad \Theta^{*}_{33}\,\ddot{\varphi} = M_z(\varphi)$$

$\boxed{1.}$



a kiskocsinak és a serpenyőnek nincs tömege

$$M \begin{matrix} \nearrow m_x \\ \searrow m_y \end{matrix}$$

~~Adaga~~

M tömegű homokot hogyan osszunk szét a kocsi és a „serpenyő" között, hogy ~~egyensúlyban legyen~~?, $K \overset{!}{=} \max$ (kötélerő maximális legyen?) (súrlódás nincs)

$K = \max. \longrightarrow \underline{a} = ?$

nyújthatatlan kötél:

$a_1 = a_2 = a$

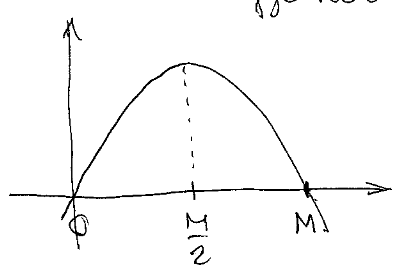
$$m_x a_1 = m_x g - K$$
$$(+)\ (M - m_x) a_2 = K$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$Ma = m_x g$$

$$a = \frac{m_x}{M} g$$

(Tehát bármilyen pici menny. homokot teszünk is a serpenyőbe, elindul lefelé.)

$$K = (M - m_x)\frac{m_x}{M} g \qquad 0 < m_x < M$$

(ez egy konkáv parabola)
gyökei: 0 és ~~M~~ M

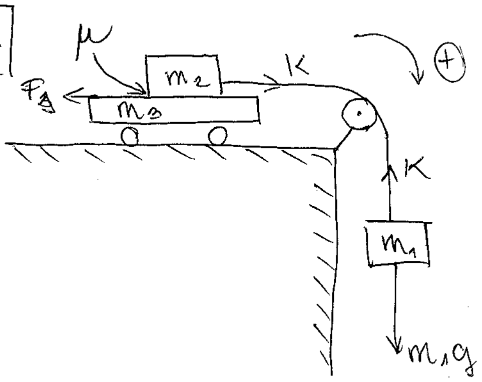


$\frac{M}{2}$-nél lesz maximális

$$m_x = \frac{M}{2}$$
$$m_y = \frac{M}{2} \longrightarrow \underline{a} = \frac{1}{2} g$$

(az ekkor a tömegekhez tartozó gyorsulás)

2.



(súrlódás van m_2 és m_3 között)

Írjuk le a rendszer mozgását

(az m_3-ról nem tudunk semmit, így 2 esetet vizsgálunk meg :))

(a) eset: m_2 és m_3 együtt mozog („összeragadva") [tapadási súrlódás]

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

$$m_1 a = m_1 g - K$$

$$m_2 a = K - F_s$$

$$m_3 a = F_s$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) a = m_1 g$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g$$

$$F_s = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g$$

$$K = m_1 g - m_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} g =$$

$$= \frac{\cancel{m_1^2} + m_1 m_2 + m_1 m_3 - \cancel{m_1^2}}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

$$K = \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

(b) eset: m_2 „elcsúszik" m_3-on [csúszási súrlódás]

$$a_1 = a_2 = a \neq a_3$$

$$m_1 a = m_1 g - K$$

$$m_2 a = K - F_s$$

$$m_3 a_3 = F_s$$

több ismeretlen ~~egyenlet~~, mint egyenlet ~~ismeretlen~~

(de: ismerjük μ-t)

$$F_s = \mu \cdot F_{ny} = \mu \cdot m_2 g$$

$$a_3 = \frac{F_s}{m_3} = \frac{\mu m_2}{m_3} \cdot g$$

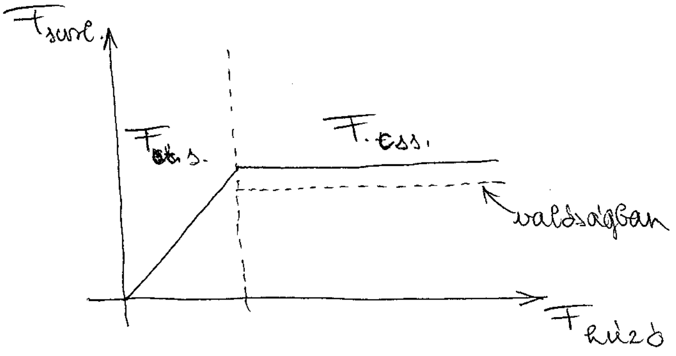
$$\text{1.} + \text{2.} \rightarrow (m_1 + m_2) a = m_1 g - \mu m_2 g$$

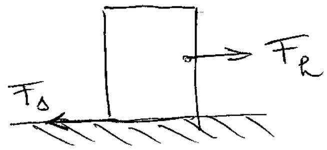
$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$K = \frac{m_2 m_1 - \mu m_2^2}{m_1 + m_2} g + \mu m_2 g$$

(a) vagy (b) a „helyes" ?

(tapadási vs. csúszási súrlódás)



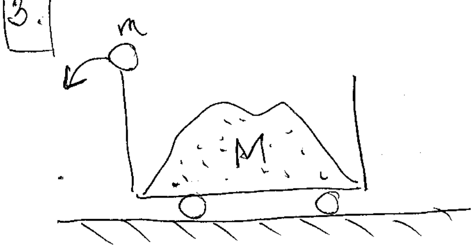


$F_{ts\,max.} = F_{css.}$

$$\frac{m_1 m_3}{m_1+m_2+m_3}\cdot \cancel{g} \le \mu \cdot m_2 \cancel{g}$$

$$\frac{m_1 m_3}{m_2(m_1+m_2+m_3)} \le \mu$$ → Ha teljesül, tapad, ha nem (ha =), akkor csúszik.

$\boxed{3.}$



$m \ll M$

$F_e^{(k)} = 0 \longrightarrow I_{rend.} = \text{áll.}$

„rakétameghajtás"
(kilapátolunk egy kis homokot)

$$\frac{\Delta E_{kin,M}}{\Delta E_{kin,m}} = ? = \eta$$

$0 = Mu - mv \qquad u = \frac{m}{M} v$

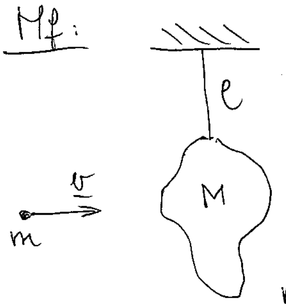
$\Delta E_{kin,M} = \frac{1}{2} M u^2$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} M \cdot \frac{m^2}{M^2} v^2}{\frac{1}{2} m v^2} = \frac{m}{M} \quad \left(= \frac{\Delta E_M}{\Delta E_m} \right)$$

$\Delta E_{kin,m} = \frac{1}{2} m v^2$

(a ~~egyre kisebb~~ nagyon kicsi tömeg viszi el majdnem az össz. kin. energiát)

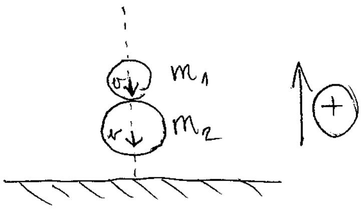
Hf:



$m \ll M$

Homokzsák és puskagolyó. Mekkora v sebességgel kell kilőni, hogy a zsák megtegyen egy teljes kört? (a golyó a zsákban marad) (M pontszerű)

4. Két gumilabdát közel a földhöz elengedünk. Milyen $\frac{m_1}{m_2}$ arányoknál repül a legmagasabbra m_1?



$\frac{m_1}{m_2} = ?$

- kezdetben: közös $\underline{v}$ sebesség
- az alsó labda $-\underline{v}$ sebességgel pattan vissza

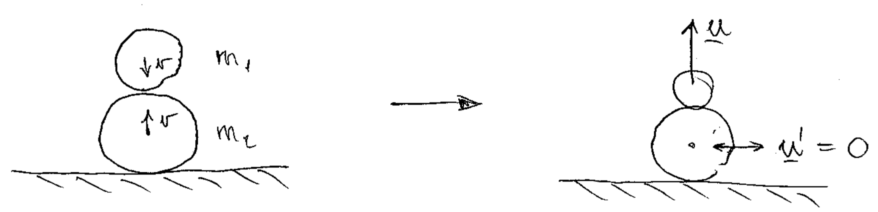
M falnak dobott labda:

$$m\underline{v} = -m\underline{v} + I_{fal}$$

$$2mv = I_{fal}$$

(de mivel $m_{fal} = \infty$; nem mozdul el, és az össz. kin. energiát a labda viszi el)

visszapattanáskor:



(az össz. kin. e.-t a felső labdának kell elvinnie)

$$m_2 v - m_1 v = m_1 u$$

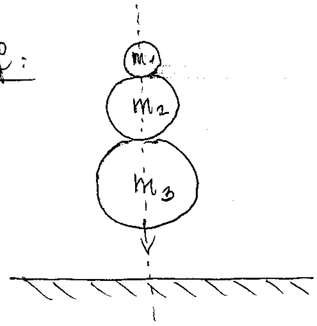
$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_1 u^2$$

$$\frac{m_2 - m_1}{m_1} v = u$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} m_1 \cancel{v^2} + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 \cancel{v^2} = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m_1} \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1^{\cancel{2}}} \cancel{v^2} \quad / \cdot 2 m_1$$

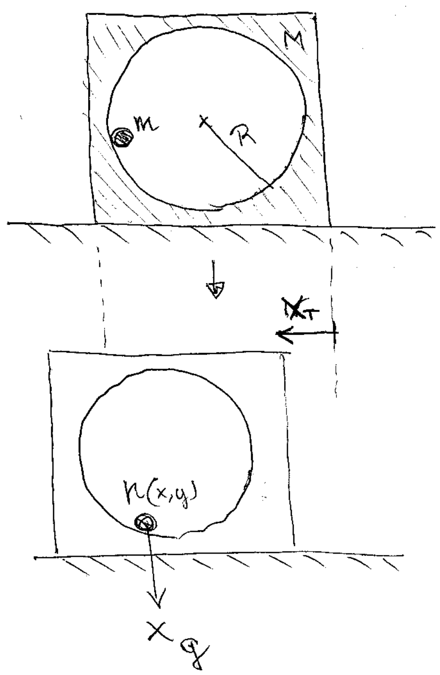
$$\cancel{m_1^2} + m_1 \cancel{m_2} = m_2^{\cancel{2}} - 2 m_1 \cancel{m_2} + \cancel{m_1^2} \longrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

Hf:



Mekkora legyen a 3 tömeg aránya, hogy m_1 a lehető legmagasabbra jusson?

$\boxed{5.}$



- m-et elindítjuk nagy sebességgel
- egy külső megfigyelőhöz képest milyen pályát ír le?
- vízszintes irányban (!) zárt r.
- M elmozdulhat $\Downarrow$
- vízsz. irányban nem mozdul el a tkp. (a telj. r. tkp.-ja nem mozdul)

x_T = külső (M) test elmozd.

x_g = golyó elmozd.

$$0 + MR = x_g m - x_T M$$

$$x_T = x - \sqrt{R^2 - y^2}$$

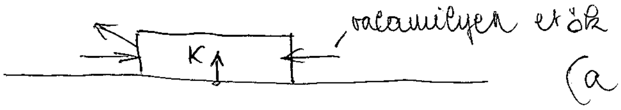
$p(x,y)$-t kell kifejezni $\rightarrow$ m.o.: a golyó ellipszis-pályán fog mozogni

12.02. | EA

Merev testek síkmozgása

$$M\ddot{\underline{x}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)} \qquad (6)$$

síkmozgás $\Rightarrow$ kényszererők $\longrightarrow$ $2\times 2 - 1 = 3$ egyenletre van szükségünk



(a kényszererőknek síkirányú komponense nincsen!)

$$M\ddot{x}_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}\right)_x$$

$$M\ddot{y}_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}\right)_y$$

$\longrightarrow$ (tkp. két komponensre vonatkozik)*(2)

$$\frac{dN_3}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}\right)_z$$

$\longrightarrow$ ebből a 3 egyenletből meghatározható a mozgás és a kényszererők; kivéve ha van surlódás!

$$\frac{dN_{s3}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'^{(k)}\right)_z \qquad \underline{N}_s = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}$$

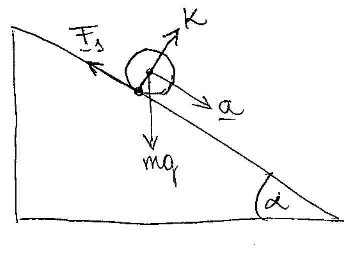
$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$N_{s3} = \hat{\Theta}_{33}\,\omega$$

($\hat{\Theta}_{33}$ nem függ az időtől) $\rightarrow$ $\hat{\Theta}_{33} = \text{áll.}$

$$\hat{\Theta}_{33}\,\beta = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'^{(k)}\right)_z \qquad ^*(1)$$

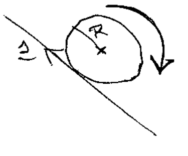
P



$\longrightarrow$ tiszta gördülés:

$$ma = mg\sin\alpha - s \qquad (s \approx F_{surl})$$

$$\hat{\Theta}_{33}\,\beta = R\cdot s$$



$$\beta R = a$$

$$\Theta_{33} \cdot \frac{a}{R} = R \cdot s$$

$$s = \frac{\Theta_{33}}{R^2} \cdot a$$

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - \frac{\Theta_{33}}{R^2} \cdot a$$

$$\left(m + \frac{\Theta_{33}}{R^2}\right) a = mg \cdot \sin\alpha$$

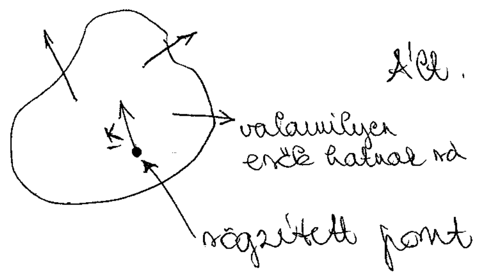
$$a = \frac{mg}{m + \frac{\Theta_{33}}{R^2}} \cdot \sin\alpha$$

(M) Minél nagyobb Θ_{33}, annál kisebb a gyorsulás (a).

Pl. és → tömegük megegyezik
(a tömör henger gyorsabban gördül le a lejtőn).

(M) egyensúlyi helyzet:
- stabil
- labilis
- indifferens

Merev test pont körüli forgása



→ 3 adata rögzítve van

Ált. 6 egyenletre van szükségünk, de

$\underline{K}$ kényszererő

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(e)}$$

Helyezzük a koord. középpontját a rögzített pontba! Így a $\underline{K}$-nak nem lesz forgatónyomatéka, hiszen a hatásvonala átmegy az origón.

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

Rögz. pont sebessége nulla $\Rightarrow$ $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

2 →

→ Így: $\underline{N} = \hat{\Theta}^{**}\underline{\omega}$ (innentől a ** -ot elhagyjuk)

(1) Ahogy mozog a test, a $\hat{\Theta}$ folyamatosan változik:

$$\underline{N} = \hat{\Theta}(t)\,\underline{\omega}(t)$$

Gyorsuló kr-beli adatokkal:

$$\boxed{\frac{d'\underline{N}}{dt} = \frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N}}$$

(inerciarendsz. beli $\underline{N}$ a gyors. r. beli számhármassal megadva)

$$\frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \underline{M}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{\Theta}\underline{\omega}\right) + \underline{\omega} \times \left(\hat{\Theta}\underline{\omega}\right) = \underline{M}'$$

ez már nem függ az időtől, kiemelhető

$$\hat{\Theta}\frac{d\underline{\omega}}{dt} + \underline{\omega} \times \left(\hat{\Theta}\underline{\omega}\right) = \underline{M}'$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ a testhez rögz. kr. ben (legyen!) diagonális (a kr. tengelyeit megfelelő irányban kell felvenni.)

Vektoriális szorzat formálisan:

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Theta_1\omega_1 & \Theta_2\omega_2 & \Theta_3\omega_3 \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{vmatrix} = \underline{\omega} \times \left(\hat{\Theta}\underline{\omega}\right) = \begin{bmatrix} \omega_2\Theta_3\omega_3 - \omega_3\Theta_2\omega_2 \\ \omega_3\Theta_1\omega_1 - \omega_1\Theta_3\omega_3 \\ \omega_1\Theta_2\omega_2 - \omega_2\Theta_1\omega_1 \end{bmatrix} =$$

= 2→

$$= \begin{bmatrix} \omega_2\omega_3(\Theta_3-\Theta_2) \\ \omega_3\omega_1(\Theta_1-\Theta_3) \\ \omega_1\omega_2(\Theta_2-\Theta_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{I.}\quad \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3-\Theta_2) = M'_1$$

$$\text{II.}\quad \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1(\Theta_1-\Theta_3) = M'_2$$

$$\text{III.}\quad \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2(\Theta_2-\Theta_1) = M'_3$$

$\rightarrow$ nagyon nem lineáris egyenletek

$\Downarrow$

Speciális esetek:

1. Forgatónyomaték nulla $\Leftrightarrow$ a rögz. pont a tkp.? (súlypont)
   = Erőmentes pörgettyű

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M} = 0 \qquad \underline{N} = \text{áll.}$$

(M) a kinetikus energia nem tud megváltozni

$$E_{kin} = \frac{N\omega}{2} = \text{áll.}$$

Szimmetrikus (erőmentes) pörgettyű:

Θ_3

$\Theta_2 = \Theta_1$

$$M'_1;\ M'_2;\ M'_3 = 0$$

$$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \longrightarrow \omega_3 = \text{áll.}$$

$$\text{I.} \cdot \omega_1 \Rightarrow \Theta_1\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_3-\Theta_1) = 0$$

$$\text{II.} \cdot \omega_2 \Rightarrow \Theta_2\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_1-\Theta_3) = 0$$

$(\mathrm{I}) \cdot \omega_1 + (\mathrm{II}) \cdot \omega_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta_1 \left(\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} \right) = 0$$

$$\Theta_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{áll.}$$

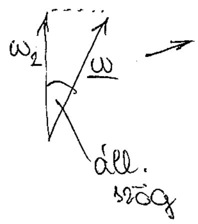
$$|\underline{\omega}|^2 = \text{áll.}$$

tehát: $\omega_3 = \text{áll.}$, $|\underline{\omega}|^2 = \text{áll.}$; $E_{kin} = \frac{\underline{N}\underline{\omega}}{2} = \text{áll.}$; $\underline{N} = \text{áll.}$

$\boxed{12.03. \mid EA}$

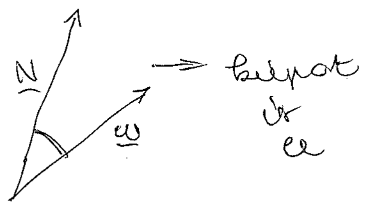
$\underline{N} = \text{áll.}$ $\qquad \omega_2 = \text{áll}$

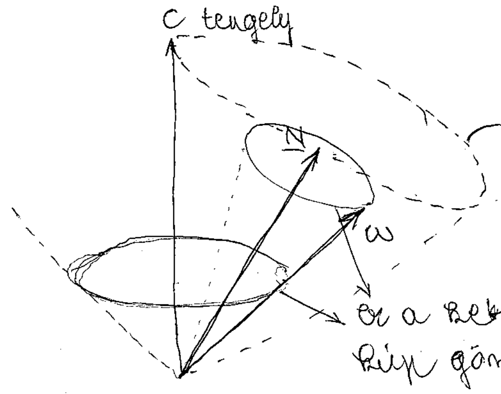
$\underline{N}\underline{\omega} = \text{áll.}$ $\qquad |\underline{\omega}| = \text{áll.}$



→ hossza áll.

(kúpot ír le)

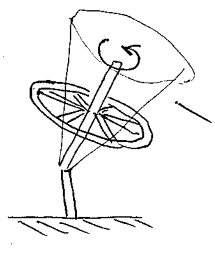




nutációs kúp (nutáció)

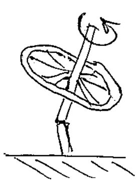
→ ez a két kúp gördül egymáson, eredménye: nutációs kúp

Pl.:



kúpon mozog

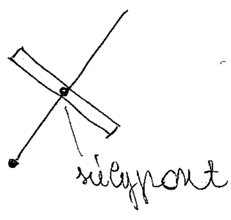
Súlyos (nem erőmentes) pörgettyű:



→ ha nem pörög, leesik

→ bonyolult mozgás = precesszió

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$



→ az impulzusmomentum mindig a pörgetési tengely irányába mutat

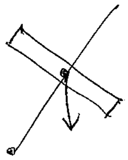
$$\underline{N} = \Theta_2 \, \underline{\omega}$$

$\Rightarrow$

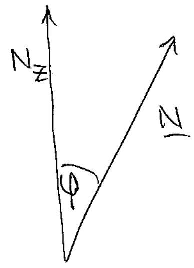
Z▸ $\underline{N}\,\frac{dN}{dt} = \underline{N}\,\underline{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}N^2\right) = \underline{N}\,\underline{M}$

$\Rightarrow \quad M_z = 0$ (a z irányú komponense $\underline{N}$-nek időben áll.)
N_z = áll.

$\underline{N}\,\underline{M} \approx 0$



N^2 = áll.



φ = az $\underline{N}$ függőlegessel bezárt szöge nem tud megváltozni $\Rightarrow$ precesszió

Föld:
- ~~súlypontja középen~~
- ~~erőmentes pörgettyű~~ } $\rightarrow$ DE:
- a súlypont és a tömegkp. nem esik egybe!
- NEM erőmentes pörgettyű
- precesszál
- oka: a Nap tere nem homogén

Erőmentes pörgettyű

$$\Theta_1 \omega_1 + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) \cancel{= M_1} = 0$$

$$\Theta_2 \omega_2 + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) \cancel{= M_2} = 0$$

$$\Theta_3 \omega_3 + \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) \cancel{= M_3} = 0$$

Triviális mo.: $\underline{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ $\rightarrow$ sajátértékek körüli forgás

ez is nulla lesz, mert időben állandó

$\Updownarrow$

triviális mo. = sajáttengely körüli forgás

Z▸

2. Mi történik, ha picit kitérítjük?

$$\underline{\omega} = (\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3 + \omega_0)$$

Egy.:
$$\Theta_1 \delta\dot\omega_1 + \delta\omega_2 \omega_0^{*} (\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$
$$\Theta_2 \delta\dot\omega_2 + \delta\omega_1 \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$
$$\Theta_3 \delta\dot\omega_3 + 0 = 0 \Rightarrow \delta\omega_3 = \text{áll.} \rightarrow \text{elhanyagoljuk}$$

(*) kicsik a δ-k, ezért itt elhanyagoljuk

$$\Theta_1 \delta\dot\omega_1 + \omega_0(\Theta_3 - \Theta_2)\delta\omega_2 = 0$$
$$\Theta_2 \delta\dot\omega_2 + \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3)\delta\omega_1 = 0$$

→ kicsit hasonlít a csatolt rezgésekhez

K.a.m: $\begin{bmatrix}\delta\omega_1\\ \delta\omega_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} e^{\lambda t}$ alakban!

$$\lambda\Theta_1 A_1 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0(\Theta_3 - \Theta_2) A_2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$
$$\lambda\Theta_2 A_2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3) A_1 \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda\Theta_1 A_1 + \omega_0(\Theta_3 - \Theta_2) A_2 = 0$$
$$\lambda\Theta_2 A_2 + \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3) A_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix}\lambda\Theta_1 & \omega_0(\Theta_3 - \Theta_2)\\ \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3) & \lambda\Theta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} = 0$$

→ homogén lin. egyenlet

↓

Spec. ha ennek a mátrixnak det $\neq 0$, van nemtriviális mo.

Ha a det $= 0$:

$$\lambda^2 \Theta_1\Theta_2 - \omega_0^2(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\lambda^2 = \omega_0^2 \frac{(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2}$$

1. Ha a nevező és a számláló pozitív, gyök vonható: $\lambda = \pm\sqrt{(\ldots)}$

Ha λ pozitív → labilis, ha λ negatív → stabil ↗

(2.) Ha a jobboldal negatív $\Rightarrow$ tisztán képzetes gyök

$$\delta\omega_1 = A_{1+}\, e^{+i\lambda t} + A_{1-} \cdot e^{-i\lambda t}$$

ha $A_{1+} = A_{1-}^*$ (egymás kompl. konj.) $\rightarrow$ koszinusz $\rightarrow$

$\rightarrow$ harmonikus rezgőmozgás az egyensúlyi helyzet környékén

(3.) Mikor lesz $(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3) < 0$?

1. eset: $\Theta_3 - \Theta_2 > 0$

$\Theta_1 - \Theta_3 < 0$

$\left.\begin{array}{l}\Theta_3 > \Theta_2 \\ \Theta_3 > \Theta_1\end{array}\right\}$ Θ_3 a legnagyobb

$\downarrow$

(Θ_3 körül forgatunk) $\rightarrow$ stabil.

2. eset: $\Theta_3 - \Theta_2 < 0$

$\Theta_1 - \Theta_3 > 0$

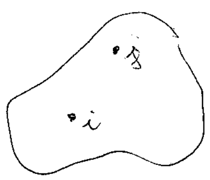
$\left.\begin{array}{l}\Theta_3 < \Theta_2 \\ \Theta_3 < \Theta_1\end{array}\right\}$ Θ_3 a legkisebb (és a körül forgatunk)

stabil $\leftarrow$

DE: csak nagyon pici amplitudó esetén

12.04.	GY

Merev testek



$d(i,j) = \text{áll.} \quad \forall i,j$

$M \ddot{\underline{r}}_{tkp} = \underline{F}_e^{(k)}$

impulzusmomentum:

$$\underline{N} = \sum_i \Big(\underline{r}_i \times \underbrace{m_i \dot{\underline{r}}_i}_{i.\ \text{tömegpont impulzusa}}\Big)$$

forgatónyomaték:

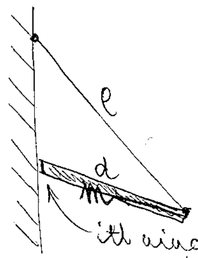
$$\underline{M} = \sum_i (\underline{r}_i \times \underline{F}_i) \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

Két nagy csoport: statika és dinamika

$\boxed{A}$ egyensúly

$\underline{F}_e^{(k)} = 0 \quad ; \quad \underline{M} = 0$

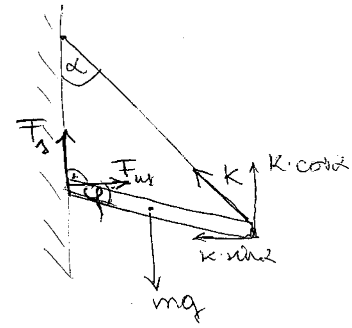
Pl.:



$\frac{d}{l} = \frac{3}{4} \qquad \mu = ?$

$F_s \leq \mu \cdot F_{ny}$

csúszás



$\underline{F}_e^{(k)} = 0 \rightarrow \sum_i x_i = 0 \quad ; \quad \sum_i y_i = 0$

(x és y irányú erők eredője is 0.)

$$\begin{cases} F_{ny} = K \cdot \sin\alpha \\ mg = F_s + K \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$\underline{M} = 0 \rightarrow \quad mg \frac{\cancel{d}}{2} \cdot \cos\varphi = K \cdot \cancel{d} \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

$$\frac{d}{l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\varphi)}$$

$$\frac{mg}{2} \cos\varphi = K \left(\cos\alpha \cdot \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi\right)$$

$$\frac{mg}{2} \sin\alpha \cdot \frac{l}{d} = K \cdot \left(\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \frac{l}{d} - \sin\alpha \cdot \left(1 - \cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= K \cdot \left(\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \frac{l}{d} - \sin\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{d^2}}\right)$$

$$K = \frac{\frac{mgl}{2d}}{\cos\alpha \cdot \frac{l}{d} - \sqrt{1 - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{d^2}}}$$

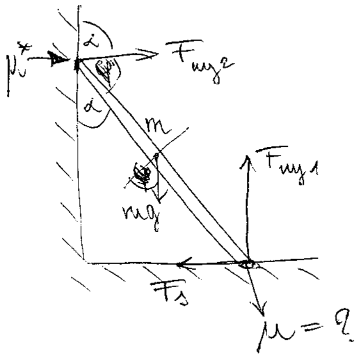
$$F_s = mg - \frac{\frac{mgl}{2d} \cos\alpha}{\cos\alpha \frac{l}{d} - \sqrt{1 - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{d^2}}}$$

$$F_{ny} = \frac{\frac{mgl}{2d} \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha \frac{l}{d} - \sqrt{1 - \frac{l^2 \sin^2\alpha}{d^2}}}$$

$\rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{mg - \dfrac{\frac{mgl}{2d}\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\,\frac{l}{d} - \sqrt{1-\frac{l^2\sin^2\alpha}{d^2}}}}{\dfrac{\frac{mgl}{2d}\sin\alpha}{\cos\alpha\,\frac{l}{d} - \sqrt{1-\frac{l^2\sin^2\alpha}{d^2}}}} = \text{stb.}$$

<u>Pl 2:</u> falhoz támasztott létra ($\mu^* = 0$)



<u>Hf:</u> $\mu^* \neq 0 = ?$

$$F_s = F_{ny2} \qquad \mu = \frac{F_s}{F_{ny}}$$
$$mg = F_{ny}$$

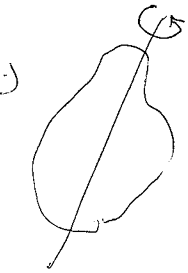
~~$mg\frac{l}{2}\cos\varphi = F_{ny2}\cdot l$~~ $\qquad mg\frac{l}{2}\sin\alpha = F_{ny2}\cdot l\cdot\cos\alpha$

$$\frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha = F_{ny2} \qquad \mu = \frac{\frac{\cancel{mg}}{2}\operatorname{tg}\alpha}{\cancel{mg}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

$\boxed{B}$ nincs egyensúly

$$\underline{M} = \Theta\cdot\ddot{\varphi} = \Theta\cdot\beta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{N} \neq \text{áll.}$$

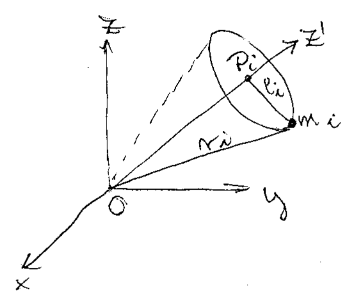
1.)



$\Rightarrow \Theta$ skalármennyiség (nulla indexes)

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

2.) ha nincs rögzített tengely: Θ kétindexes mennyiség // tenzor



$$l_i^2 = r_i^2 - \overline{OP_i}^2$$

$$\overline{OP_i} = \underline{r}_i \cdot \underline{e}_{P_i} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{e}_{P_i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \cos\psi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad \{\varphi, \psi, \vartheta : \text{Euler-szögek}\}$$

$$\overline{OP_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \cos\psi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{\underline{e}_{P_i}} = \sum_i m_i r_i^2 = \Theta_{xx}\cos^2\varphi + \Theta_{yy}\cos^2\psi + \Theta_{zz}\cos^2\vartheta -$$

$$- 2\Theta_{xy}\cos\varphi\cos\psi - 2\Theta_{xz}\cos\varphi\cos\vartheta - 2\Theta_{yz}\cos\psi\cos\vartheta$$

$$\Theta_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

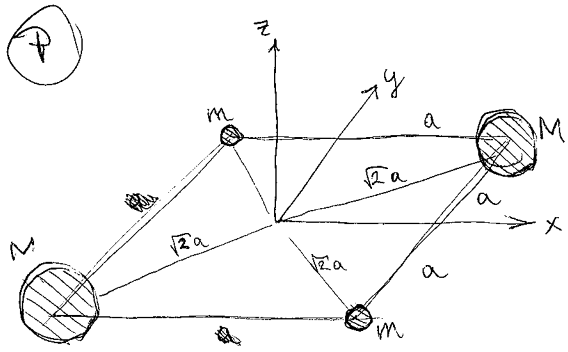
$$\Theta_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i$$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{bmatrix}$$

Kétindexes matematikai mennyiség = tenzor

$$\underline{N} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$$

P



$$\Theta_{xx} = 2M(a^2 + 2a^2) + 2m\,3a^2 =$$

$$= 6(m+M)a^2$$

$$\Theta_{yy} = 6(m+M)a^2$$

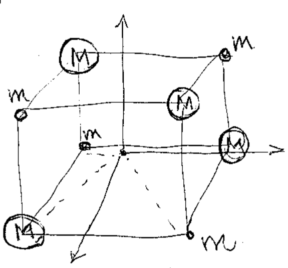
$$\Theta_{zz} = 6(m+M)a^2$$

$$\Theta_{xy} = Ma^2 + Ma^2 + ma(-a) + m(-a)a = 2(M-m)a^2$$

$$\Theta_{xz} = M\sqrt{2}a\cdot a + M\sqrt{2}a(-a) + m\sqrt{2}a\cdot a + m\sqrt{2}a(-a) = 0$$

$$\Theta_{yz} = 0$$

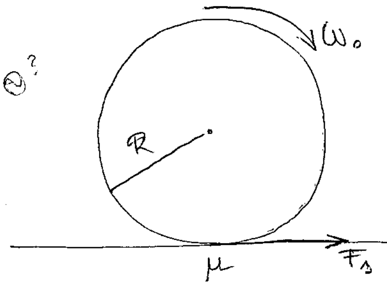
Hf:



$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} 6(m+M)a^2 & 2(M-m)a^2 & 0 \\ 2(M-m)a^2 & 6(m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6(m+M)a^2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{1.}$

$m\Theta$?



Egy pörgő hengert helyezünk egy asztalra. Csúszik, kipörög***

$v_0 = 0$

$F_s = ma$

$\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a$

$a = \mu g \rightarrow v(t) = at$

(a súrlódási erő gyorsítja)

$M = \Theta \cdot \beta$ $\qquad$ $\left[\Theta = \frac{1}{2} m r^2\right.$ (henger esetén)$\left.\right]$ (skalár)

$F_s \cdot R = \Theta \cdot \beta$

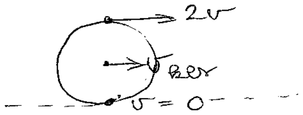
$\beta = \frac{\mu m g R}{\Theta}$

(transzlációs mozgás**: egyenletesen gyorsul; forgómozgás lassul!) (β negatív* lesz)

(** „haladó mozgás")

$\omega(t) = \omega_0 - \beta t$ ← *

(μ) tiszta gördülés esetén: $v = R\omega$; $v_{tkp} = v_{ker}$



*** Mikor kezd el a hengerünk tisztán gördülni? $t^* = ?$

$a \cdot t^* = R(\omega_0 - \beta t^*)$

$\mu g t^* = R\left(\omega_0 - \frac{\mu \cancel{m} g \cancel{R}}{\frac{1}{2} \cancel{m} R^{\cancel{2}}} \cdot t^*\right)$

$\mu g t^* = R\omega_0 - 2\mu g t^*$

$3\mu g t^* = R\omega_0$

$\boxed{t^* = \frac{R\omega_0}{3\mu g}}$

$\boxed{v^* = \cancel{\mu g} \frac{R\omega_0}{3 \cancel{\mu g}}}$ $\boxed{= \frac{R\omega_0}{3}}$

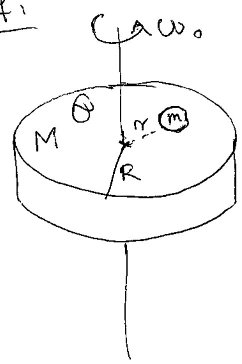
Szögsebessége?

$\boxed{\omega^* = \frac{\omega_0}{3}}$

Mekkora lesz ekkor a sebessége? $v^* = ?$

t^*-tól kezdve a henger e.v.e.m. sal megy tovább.

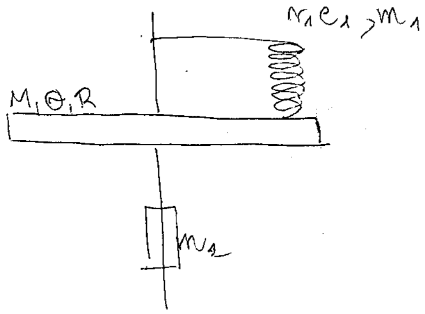
Hf.:



Mekkora ΔW munka árán tudjuk behúzni m-et a forgástengelyig?

$r = \frac{1}{2}R$

Hf.:

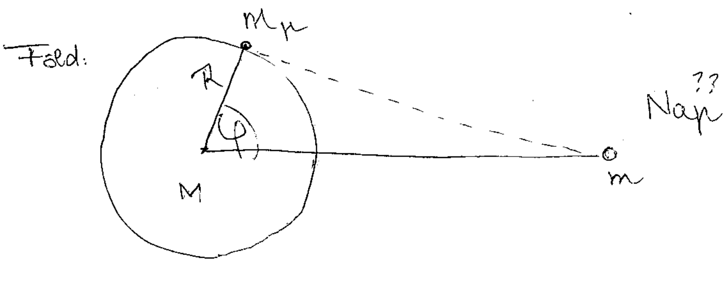


Magára hagyjuk. Mi történik?

$\boxed{12.09. \mid EA}$

„A víz vízszintes" = Az azonos nyomású felületek és az ekvipotenciális felületek megegyeznek.

Árapály-jelenség



m_p: próbatömeg

$$a_g = -\gamma \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$F_t = \gamma \frac{m \cdot m_p}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$V_{tehetetlenségi} = -F_t\, x \qquad (V = \text{potenciál})$$

$$\frac{dV_t}{dx} = |F_t| = \gamma \frac{m m_p}{r^2}$$

$$V_t = -\gamma \cdot \frac{m m_p}{r^2} \cdot x = -\gamma \cdot \frac{m m_p}{r^2} \cdot R \cdot \cos\varphi$$

$$V_{gravitációs} = -\gamma \frac{m_p M}{R} - \gamma \frac{m_p m}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi}}$$

→ nagyított vonal

→ elhanyagolható a F–N távhoz képest

$$V(\varphi) = -\gamma \frac{m m_p}{r^2} R\cos\varphi - \gamma \frac{m_p M}{R} -$$

$$- \frac{\gamma m_p m}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2R}{r}\cdot\cos\varphi}}$$

(M) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4}$ ((sorfejtés)) így:

$$V(\varphi) \sim \cancel{-\gamma \frac{m m_p}{r^2} R\cos\varphi} - \gamma \frac{m_p M}{R} - \gamma \frac{m_p m}{r} +$$

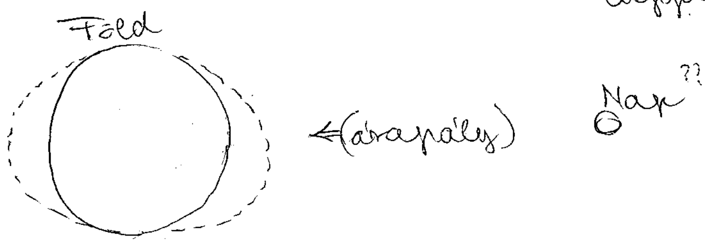
$$\cancel{+ \frac{\gamma m_p m}{r} \cdot \frac{R}{r}\cos\varphi} - \frac{\gamma m_p m}{r} \cdot \frac{3}{4}\left(\frac{2R}{r}\cos\varphi\right)^2$$

$$V(\varphi) = V_0 - \frac{\gamma m_p m}{r} 3 \frac{R^2}{r^2}\cos^2\varphi$$

→ ($\varphi = 0$-nál és $\varphi = \pi$-nél ugyanannyi)

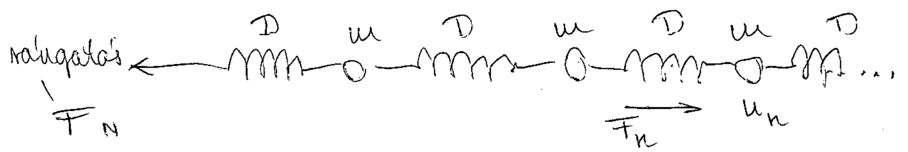
V_0 = φ-től nem függő tagok

Eredmény:



(M) Miért mutatja mindig a Hold ugyanazt az oldalát felénk? Az árapály-jelenség miatt. Régebben a Föld mellett a Holdnak is folyamatosan változott az alakja → ez energiaveszteséggel jár → a Hold így állt be.

Rugók varázsa



u_n: elmozdulás

$$F_N = f_N \sin(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned} m a_n &= -F_n + F_{n-1} \\ F_{n-1} &= -D(u_n - u_{n-1}) \end{aligned}\right\} \text{mozgásegyenlet}$$

Megoldás alakja: $F_n = f_n \sin(\omega t + \phi)$

$$u_n = A_n \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_n = -\omega^2 A_n \sin(\omega t + \phi)$$

$$m\omega^2 A_n = f_n - f_{n-1}$$

$$f_{n-1} = -D(A_n - A_{n-1})$$

K.a.m.: $f_n = -D K_n A_n$ $D K_n$ = arányossági tényező „effektív rugóállandó"

Ekkor, $\omega^2 m A_n = -D K_n A_n + D K_{n-1} A_{n-1}$

$$-D K_{n-1} A_{n-1} = -D(A_n - A_{n-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} A_n = -K_n A_n + K_{n-1} A_{n-1}$$

$$K_{n-1} A_{n-1} = (A_n - A_{n-1})$$

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + K_n\right)(1 + K_{n-1}) - K_{n-1} = 0$$ (rekurziós egyenlet)

$$K_n = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_{n-1}}{1 + K_{n-1}}$$

ha $n \to \infty$: $K_\infty = (-)\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{K_\infty}{1 + K_\infty}$

$$K_{\infty\,1,2} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - 4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}{2}$$ ha $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 4 \rightarrow \sqrt{\ominus}$

(M) K = erő és elmozdulás aránya, ne legyen komplex!

$$c := 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad < 1$$

$$K_{n+1} = 2(c-1) + \frac{K_n}{1+K_n}$$

$$K_{\infty\,1,2} = (c-1) \pm \sqrt{c^2-1} \qquad \text{ha } |c|<1 \rightarrow \sqrt{\ominus}$$

$$K_+ = (c-1) + \sqrt{c^2-1}$$

$$y_n := K_n - K_+$$

$$y_{n+1} = \frac{(c-\sqrt{c^2-1})y_n}{c+\sqrt{c^2-1}+y_n} \qquad S := c-\sqrt{c^2-1}$$

$$S^* := c+\sqrt{c^2-1}$$

$$y_{n+1} = \frac{S\cdot y_n}{S^*+y_n} \qquad t_n := \frac{1}{y_n}$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{S} + \frac{S^*}{S}t_n \qquad \left(\left(\frac{1}{S} \text{ nélkül: mértani sor}\right)\right)$$

$$t_n := \mathcal{J}_n + G \quad \text{ha } G = -\frac{1}{2\sqrt{c^2-1}}$$

$$\mathcal{J}_{n+1} = \frac{S^*}{S}\mathcal{J}_n \qquad \text{(mértani sor)}$$

$$\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_0\left(\frac{S^*}{S}\right)^n \qquad \text{így:}$$

$$K_n = \frac{2\sqrt{c^2-1}}{\mathcal{J}_0\left(\frac{S^*}{S}\right)^n - 1} + c - 1 + \sqrt{c^2-1}$$

és

$$A_n = (K_n \pm 1)A_{n-1}$$

- ha $c < -1$, azaz $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gtrsim 4$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{c-\sqrt{c^2-1}}{c+\sqrt{c^2-1}} < 1 \xrightarrow{\text{ekkor}} \ldots$$

$\Rightarrow K_N = c - 1 - \sqrt{c^2 - 1}$

- ha $-1 < c < 1$

$$c + \sqrt{c^2-1} = \cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0 = S^*$$

$$c - \sqrt{c^2-1} = \cos\varphi_0 - i\sin\varphi_0 = S$$

$$\frac{S^*}{S} = \cos(2\varphi_0) + i\sin(2\varphi_0)$$

$$\left(\frac{S^*}{S}\right)^n = \cos(2n\varphi_0) + i\sin(2n\varphi_0) \qquad \mathfrak{I}_0 = |\mathfrak{I}_0|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$K_n = \frac{2i\sin\varphi_0}{\mathfrak{I}_0 \cdot e^{i\varphi_0 n 2} - 1} + e^{i\varphi_0} - 1$$

$$K_n = \cos\varphi_0 - 1 + \frac{\sin\varphi_0 \sin(n\varphi_0 + \varphi)}{|\mathfrak{I}_0|\cos(n\varphi_0 + \varphi) - 1} \qquad \text{ha } |\mathfrak{I}_0| = 1$$

(valós)

Numerikus megoldás:
(geometriai mo.)