9.
Gravitációs, tehetetlen és súlyos tömeg, gömbhéj, tömör gömb tere

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019

Tehetetlen tömeg: a tehetetlenség mértékét jelző tömeg; amely azt mutatja, hogy adott F erő mekkora gyorsulást hoz létre a testen.

Súlyos tömeg: megmutatja, hogy testek mennyire vonzzák egymást.

Matematikai inga:

$$\vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{m_s M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = m_s \vec{g}(r) \tag{1}$$

Itt most:

$$m_t \vec{a}_{tangenciális} + m_s \vec{g}(r) \sin(\varphi) = 0 \tag{2}$$

$$m_t \ddot{r} = -m_s g \sin(\varphi) \tag{3}$$

Kis kitérés esetén:

$$m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \varphi \tag{4}$$

Amiből:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_s}{m_t}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{m_t}{m_s}} \tag{5}$$

Mérésekkel igazolható, hogy $m_s = m_t$

Gravitációs erő: $\vec{F}(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Gravitációs térerősség: $\frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_1} = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \vec{g}(\vec{r})$

$$\vec{g}(\vec{r}) \approx \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{6}$$

Gravitációs potenciálnak nevezzük ebből:

$$U(\vec{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \tag{7}$$

Így belátható, hogy:

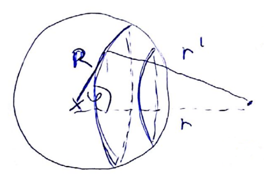
$$\vec{g}(\vec{r}) = -grad\big(U(\vec{r})\big) \tag{8}$$

Ha feltételezzük, hogy adott térfogatú térrészekben $\varrho(\vec{r})$ sűrűségfüggvény ír le egy anyagot:

$$U(\vec{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\varrho(\vec{r})\Delta V}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = -\gamma \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \tag{9}$$

Térfogati integrál

Homogén gömbhéj gravitációs potenciálja és gravitációs térerőssége



1. $r' = \sqrt{\Omega^2 + r^2 - 2R\cos(\varphi)}$
2. $\Delta\Omega = 2\pi R \sin(\varphi) R \Delta\varphi$

(Ez a héj sokkal keskenyebb)

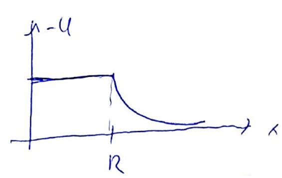
$$U(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi)}} d\varphi \tag{10}$$

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\gamma M \frac{1}{r\Omega} \left[\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi)}\right]_0^{\pi} \tag{11}$$

$$U(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{2rR}\Big(R + r - |R - r|\Big) \tag{12}$$

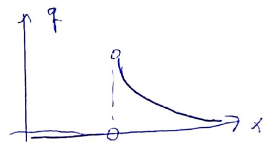
$$U(\vec{r}) = -\gamma M \frac{1}{r} \quad , ha \quad R < r \tag{13}$$

$$U(\vec{r}) = -\gamma M \frac{1}{R} \quad , ha \quad R > r \tag{14}$$

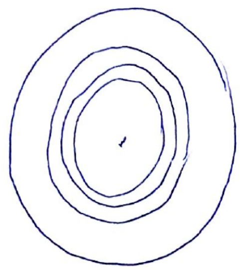


$$\vec{g} = -grad\big(U(\vec{r})\big) = \frac{\gamma M}{r^2} \quad ,ha \quad R < r \tag{15}$$

$$\vec{g} = -grad\big(U(\vec{r})\big) = 0 \quad ,ha \quad R > r \tag{16}$$



Tömör gömb gravitációs térerőssége:



Koncentrikus gömbhéjakra bontom, azoknak már ismerem a gravitációs térerősségét:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\gamma M}{r^2} = \frac{\gamma g 4\pi r^3}{3r^2} = \frac{\gamma g 4\pi r}{3} \quad ,ha \quad R > r \tag{17}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\gamma M}{r^2} \quad ,ha \quad R < r \tag{18}$$