8.
Munka, potenciális energia

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

$$m\vec{v}\vec{a} = \vec{v}\vec{F} = P(t) \tag{2}$$

Ezt az új skalármennyiséget teljesítménynek nevezzük.

Észrevesszük, hogy:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{v}) = \vec{a}\vec{v} + \vec{v}\vec{a} = 2\vec{a}\vec{v} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\vec{v}) = P(t) \to \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = P(t) \tag{4}$$

Az $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ új mennyiséget nevezzük mozgási/kinetikus energiának.

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)\right) = \int_{t_0}^{t}P(t)dt = W \tag{5}$$

A teljesítmény függvény integrálját egy időintervallumra nézve munkának nevezzük.

$$W = \left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}mv^2(t_0) \tag{6}$$

Lényegében ez a munkatétel, amely azt mondja ki, hogy:

$$\Delta E_{kin} = W \tag{7}$$

Ezért van, hogy a sebességvektorra merőlegesen ható erő munkája 0, mivel

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \tag{8}$$

Centrális erőtérben: $\vec{F}(\vec{r})$ - csak a helykoordinátától függ az erő

$$W = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)dt \approx \sum_{i=0}^{N} \vec{v}(t_i)\vec{F}\big(r(t_i)\big)(t_i - t_{i-1}) \tag{9}$$

Integrál-közelítő összeg

Mivel $\vec{v}(t_i)$ definíció szerint megegyezik:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \big|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\big|\vec{F}\big(\vec{r}(t_i)\big) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_i)(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) \tag{11}$$

A lényeg, hogy így már kiesett a t időváltozó és csak az általa meghatározott görbe maradt, amelynek minden pontjához rendelhetünk egy $\vec{F}(\vec{r}_i)$ erőt.

$$W = \int_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \tag{12}$$

Vonalmenti integrál

$$E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \int_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \tag{13}$$

Konzervatív erőtér esetén tetszőleges zárt görbén a vonalmenti integrálja a centrális erőnek zérus. Ez a gradiens-tételből következik.

$$\oint_G \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \Phi(A) - \Phi(B) \tag{14}$$

Erről részletesen:

Centrális erőtérben (konzervatív erőtér, zárt görbén az erő integrálja 0) megtehető az, hogy a tér $\forall$ pontjába mutató vektorhoz hozzárendelek egy skalármennyiséget, a következőképpen:

$$-\int_{\vec{0}}^{\vec{r}} \vec{F}d\vec{r} = \Phi(\vec{r}) \tag{15}$$

Ezt nevezzük helyzeti energiának.

Így A és B között a munka:

$$-\int_{\vec{0}}^{\vec{r}_A} \vec{F}d\vec{r} = \Phi(A) \quad -\int_{\vec{0}}^{\vec{r}_B} \vec{F}d\vec{r} = \Phi(B) \tag{16}$$

$$\Phi(B) - \Phi(A) = -\int_{\vec{0}}^{\vec{r}_B} \vec{F}d\vec{r} + \int_{\vec{0}}^{\vec{r}_A} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}d\vec{r} = -W \tag{17}$$

De tudjuk, mivel a munkatétel kimondja, hogy $W = \Delta E_{kin}$

$$\Phi(B) - \Phi(A) = E_{kin}(t_A) - E_{kin}(t_B) \tag{18}$$

Vagyis:

$$\Phi(B) + E_{kin}(t_B) = \Phi(A) + E_{kin}(t_A) = E \tag{19}$$

Az enegria a tér minden pontjában állandó egy pontszerű tesre nézve.

Energiamegmaradás tétele:

$$E_{kin} + \Phi = E \tag{20}$$

Ha egy $\Phi(\vec{r})$ potenciálfüggénynek $\vec{F}(\vec{r})$ centrális erő a negatív gradienseként áll elő, akkor ez egy konzervatív erőtér lesz. Azaz $\vec{F}(\vec{r})$ rotációja $=$ 0-val ($\nabla \vec{F}(\vec{r}) = 0$), és zárt görbére vett integrálja is egyenlő 0-val.

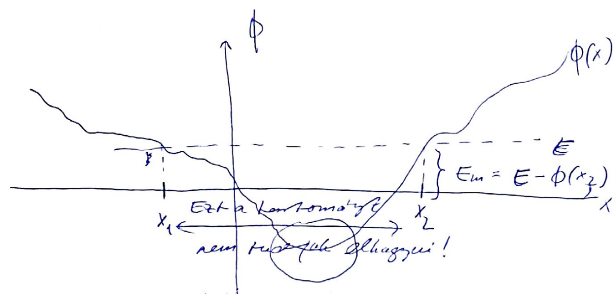
Egy dimenzióban ezt könnyű belátni. $F(x)$ helytől függő erő, itt előáll $\Phi(x)$ helytől függő potenciál függvény negatív deriváltjaként.

$$F(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx} \tag{21}$$

Ilyen feltételek mellett $\forall$ esetben megmarad az energia

$$\frac{1}{2}mx^2 + \Phi(x) = \acute{a}lland\acute{o} = E \tag{22}$$

Hogy mekkora kezdeti energiája van a rendszernek, az önkényes.



A bekarikázott részen bizonyos közelítéseket végezhetünk: közelíthetjük parabolával, $\Phi(x) \approx \frac{D}{2}(x - x_0)^2 + \Phi_0$ értékű függvénnyel ebben a kis tartományban.

Ezt harmonikus közelítésnek nevezzük, mivel ha van egy potenciálfüggvényünk ls annak minimuma, akkor azt ott közelíthetjük parabolával ls mondhatjuk, hogy a rendszer harmonikus rezgőmozgást végez.

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \Phi(x) \tag{23}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E - 2\Phi(x)}{m}} \tag{24}$$

Ez már egy elsőrendű differenciálegyenlet, ellentétben Newtonnal.

Ebben is megvan viszont a két szükséges szabad paraméter: E és x_0

$$\int_{t_0}^{t} 1dt = \int_{t_0}^{t} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E-2\Phi(x)}{m}}} \left(\frac{dx}{dt} \right) dt \tag{25}$$

$$t - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E-2\Phi(x)}{m}}} dx \tag{26}$$

Ezzel az a baj, hogy megoldani nehéz és szebb megoldása csak kevés esetben van.