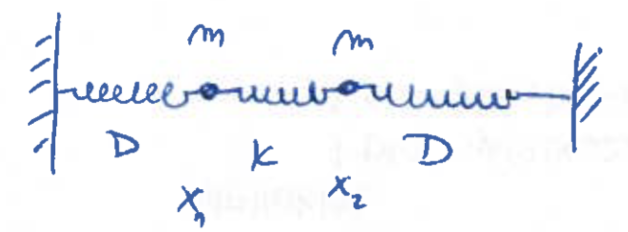
6.
Csatolt rezgések

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + k(x_2 - x_1) \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - k(x_2 - x_1) \tag{2}$$

$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ és $\Omega^2 = \frac{k}{m}$, ezeket behelyettesítve:

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \Omega^2(x_2 - x_1) \tag{3}$$
$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2(x_2 - x_1) \tag{4}$$

Először nézzük azt az esetet, amikor együtt mozognak az ingák, vagy éppen egymással szemben:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t) \tag{5}$$
$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t) \tag{6}$$

Amiből $((5) \to (7) \quad \acute{e}s \quad (6) \to (8))$:

$$-\omega^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 + \Omega^2(A_2 - A_1) \tag{7}$$
$$-\omega^2 A_2 = -\omega_0^2 A_2 - \Omega^2(A_2 - A_1) \tag{8}$$

Amiből $((7) \to (9) \quad \acute{e}s \quad (8) \to (10))$:

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)A_1 = \Omega^2 A_2 \to A_2 = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2} A_1 \tag{9}$$
$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)A_2 = \Omega^2 A_1 \tag{10}$$

(9)-ből és (10)-ből:

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)A_1 = \omega^4 A_1 \tag{11}$$

0-ra rendezve:

$$\big((\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^4\big)A_1 = 0 \tag{12}$$

Akkor és csak akkor, ha $A_1 = 0$, vagy, ha $(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) - \Omega^4 = 0$

A második esetben:

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2)^2 = \Omega^4 \tag{13}$$

$$\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 = \pm\Omega^2 \tag{14}$$

Ebből két megoldás adódik:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \quad \to \quad A_2 = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega_0^2}{\Omega^2} A_1 = A_1 \tag{15}$$

és

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \quad \to \quad A_2 = \frac{\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega_0^2 - 2\Omega^2}{\Omega^2} A_1 = -A_2 \tag{16}$$

Ez tehát három megoldás, melyből kettő nemtriviális:

1. $A_1 = A_2 = 0$
2. $A_1 = A_2$
   $\omega^2 = \omega_0^2$
3. $A_1 = -A_2$
   $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Az előbbi levezetésben ennek a sajátérték-problémájának a megoldásából adódott a három megoldás.

$$0 = \left[\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Kísérlet: Különböző frekvenciájú rezgések összeadása

$$x_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{19}$$

$$x_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{20}$$

Mi az $A = B$ egyenletet vizsgáljuk.

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$x_1(t) = A\big(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\big) = 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \tag{21}$$

Ez egy lassan változó amplitúdójú rezgés.

Kísérlet: Egymásra merőleges rezgések összetétele (mikola-eszköz + oszcilloszkóp)

$$x = A_1 \sin(\omega t) \tag{22}$$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi) = A_2\big[\cos(\varphi) \cdot \sin(\omega t) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega t)\big] \tag{23}$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2} \tag{24}$$

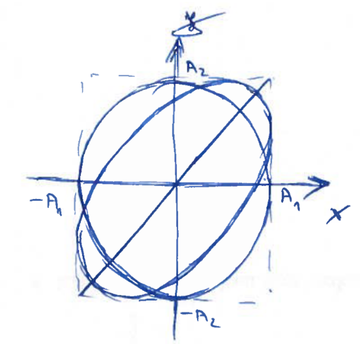
$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos\varphi \frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2\varphi\left(1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right) \tag{25}$$

Amiből:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - 2\cos\varphi\frac{xy}{A_1 A_2} = \sin^2\varphi \tag{26}$$

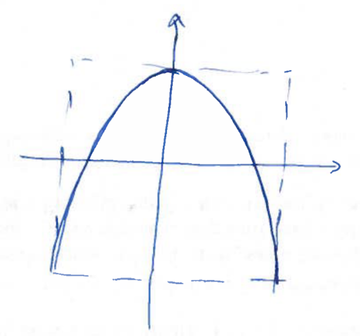
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \tag{27}$$

Ez vagy parabola, vagy hiperbola, vagy ellipszis.



$$\varphi = 0^\circ: \quad \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \tag{28}$$

$$\varphi = 90^\circ: \quad \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1 \tag{29}$$



$$x = A_1 \sin(\omega t) \tag{30}$$

$$y = A_2 \cos(2\omega t) = A_2\big(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\big) = A_2\big(1 - 2\sin^2(\omega t)\big) \tag{31}$$

$$\frac{y}{A_2} = 1 - 2\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 \tag{32}$$

Ez egy parabola.