3.
Csillapított rezgések

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019

Csillapodó rezgőmozgásról akkor beszélünk, ha a testre a rugó által kifejtett visszatérítő erőn kívül más fékező jellegű erő is hat. Ha a csillapító tényező elég nagy, az is előfordulhat, hogy a rezgés létre sem jön, vagyis a kitérített test még az egyensúlyi helyzet elérése előtt megáll.

A rezgőmozgás csillapodását két fontos fékezőhatás okozza, a súrlódás és a közegellenállás.

$$m\ddot{u} + \lambda\dot{u} + Du = 0 \tag{1}$$

/ vagy = K konstans, ami nem számít, mert a differenciálegyenlet megoldásában csak egy függőleges eltolásként jelenik meg.

$$\ddot{u} + \frac{\lambda}{m}\dot{u} + \frac{D}{m}u = \ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \tag{2}$$

Átírhatjuk úgy, hogy $L(d)u(t) = 0$, ahol $L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$ és feltesszük, hogy $u(t) = e^{\lambda t}$ alakot vesz fel minden esetben.

$L(D)$ - lineáris differenciál operátor!

$$L(D)u(t) = L(\lambda)u(t) = \lambda^2 u(t) + 2\beta\lambda u(t) + \omega_0^2 u(t) := 0 \tag{3}$$

, ahol $u(t)$ sajátfüggvénye $L(D)$-nek

Ez az egyenlőség akkor áll fenn, ha $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$, mivel $e^{\lambda}t$ minden valós t-re pozitív ω_0-t ad.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{4}$$

λ-ra vett megoldások alapján tisztán látható, hogy az egyenlet megoldása három részre esik szét!

$-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ diszkriminánsa, vagyis a

1. $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$
2. $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$
3. $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$ Ez a valóságban nyilvánvalóan soha nem fordul elő, mivel soha nem lehet a kitéréseket végtelen pontossággal kiegyenlíteni.

1.) $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$

$$\beta^2 - \omega_0^2 = \Omega^2 \quad , amiből \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm \Omega \tag{5}$$

$$u_1(t) = e^{(-\beta-\Omega)t} \quad és \quad u_2(t) = e^{(-\beta+\Omega)t} \tag{6}$$

Az általános megoldás:

$$u(t) = Ae^{-(\beta-\Omega)t} + Be^{(\Omega-\beta)t} = e^{-}\beta t\Big(Ae^{-\Omega t} + Be^{\Omega t}\Big) \tag{7}$$

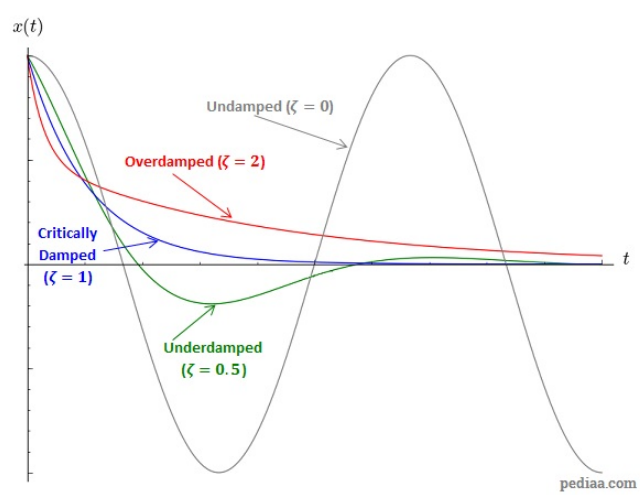
$u(0) = u_0$, $A + B = u_0$
$\dot{u}(0) = v_0$, $-\beta(A+B) + \Omega(B-A) = v_0$

$$\dot{u}(t) = -^{-\beta t}\Big(Ae^{-\Omega t} + Be^{\Omega t}\Big) + e^{-\beta t}\Big(-\Omega Ae^{-\Omega t} + \Omega Be^{\Omega t}\Big) \tag{8}$$

Átrendezés után:

$$u(t) = e^{-\beta t}\left[\frac{(\Omega-\beta)v_0 + u_0}{2\Omega}e^{-\Omega t} + \frac{(\Omega+\beta)v_0 - u_0}{2\Omega}e^{\Omega t}\right] \tag{9}$$

$\Omega < \beta$! (ugye $\Omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$



1. megoldástípus: a zöld függvény (itt β és Ω is viszonylag kicsi)
2. megoldástípus: a kék függvény (itt β és Ω is viszonylag nagy)

2.) $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\beta^2 - \omega_0^2 = -\Omega^2 \quad ,amiből \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i\Omega \quad (\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}) \tag{10}$$

$$u_1(t) = e^{(-\beta - i\Omega)t} \quad és \quad u_2(t) = e^{(-\beta + i\Omega)t} \tag{11}$$

Az általános megoldás:

$$u(t) = Ae^{-\beta t}e^{-i\Omega t} + Be^{-\beta t}e^{i\Omega t} = e^-\beta t\Big(Ae^{-i\Omega t} + Be^{i\Omega t}\Big) \tag{12}$$

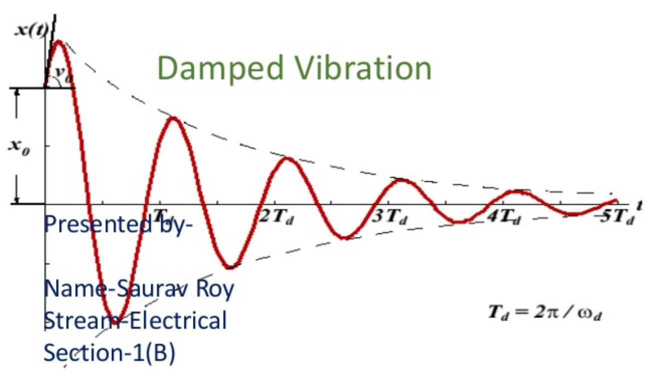
$$u(t) = e^{-\beta t}\Big((A+B)\cos(\Omega t) + i(A-B)\sin(\Omega t)\Big) \quad A^* = B \tag{13}$$

$$u(t) = e^{-\beta t}\Big(a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)\Big) \quad a, b \in R \tag{14}$$

$u(0) = u_0$
$v(0) = v_0$

$$u(t) = e^{-\beta t}\Big(u_0\cos(\Omega t) + \frac{\beta u_0 + v_0}{\Omega} sin(\Omega t)\Big) \tag{15}$$

Ennek is több típusú a megoldása $u_0 = 0$ / $v_0 = 0$ esetekben, de általában:



Első felső csúcsnál (A_1)-nél): $e^{-\beta\frac{T}{4}}$
Másodiknál (A_2-nél): $e^{-\beta\frac{5}{4}T}$

A felső csúcspontok $e^{-\beta t}$ szerint, az alsók $-e^{-\beta t}$ szerint közelítik a 0-t. A periódusidő $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\frac{A_1(t)}{A_2(t+T)} = \frac{e^{-\beta\frac{T}{4}\cdot 1}}{e^{-\beta\frac{T}{4}\cdot 5}} = e^{-\beta T} \quad ,amiből \quad ln\Big(\frac{A_1}{A_2}\Big) = -\beta T \tag{16}$$

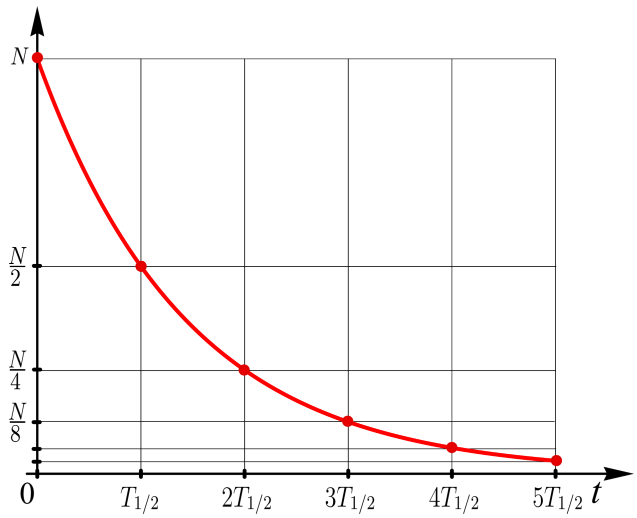
A K csillapodási hányados logaritmusa a logaritmikus dekrementum.

$u(t)$-t megszorozhatjuk akármilyen A_0 amplitúdóval, az nem változtat a megoldáson és annak menetén.

3.) $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \quad , tehát \quad \lambda = -\beta \tag{17}$$

$$u = A_0 e^{-\beta t} \tag{18}$$



Exponenciálisan lecseng.

Ilyen megoldás azonban a valóságban nincs, hiszen valamilyen kis eltérés biztos van ω_0 és β között. Így használhatjuk valamelyik megoldást, 1.), vagy 2.)-t.

1.)

$$u(t) = e^{-\beta t}\left[\frac{(\Omega - \beta)v_0 + u_0}{2\Omega} e^{-\Omega t} + \frac{(\Omega + \beta)v_0 - u_0}{2\Omega} e^{\Omega t}\right] \tag{19}$$

Itt, azt mondjuk, hogy Ω tart 0-hoz, akkor 0 határértéket kapunk, de lényegében ez ugyanaz a megoldás, csak nagyon szélsőségesen.

Azonban, ha 2.)-re alkalmazzuk az $\Omega \to 0$-hoz közelítést:

$$u(t) = e^{-\beta t}\Big(u_0 \cos(\Omega t) + \frac{\beta u_0 + v_0}{\Omega} sin(\Omega t)\Big) \tag{20}$$

$u_0 \cos(\Omega t) \to 0$ és $\frac{\beta u_0 + v_0}{\Omega} sin(\Omega t) \to 1$
Tehát:

$$u(t) = e^{-\beta t}\Big(\beta u_0 + v_0\Big)\frac{sin(\Omega t)}{\Omega} \tag{21}$$