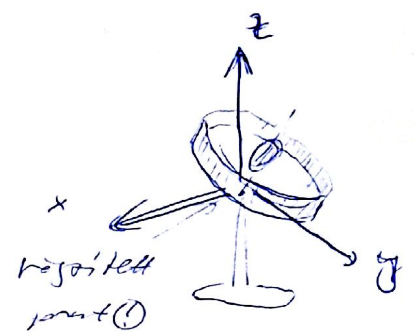
19.
Rögzített pont körüli forgás
Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



I.) $M\ddot{\vec{r}}_0 = \sum_i \vec{F}_i^{(k)}$ és II.) $\frac{d\vec{N}}{dt} = \sum_i M_i^{(k)}$

Csak a külső erők forgatónyomatékára kell figyelemmel lennünk, ha a koordinátarendszerünk középpontját a rögzített pontba helyezzük.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1}$$

Rögzített ponti rendszerben annak sebessége $\vec{0}$.

$$\vec{N} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \underline{\underline{\Theta}}^{**}\vec{\omega} \tag{2}$$

Ez egy új tehetetlenségi nyomaték, mivel <u>függ</u> az időtől.
$\frac{d}{dt}(\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega}) = \sum_i \vec{M}_i \rightarrow$ most azt kell kimutatmi, hogy ezt, hogy kapjuk meg

A koordinátarendszer, amiben vagyunk folyamatosan változik.

$$\underline{\underline{\Theta}}(t) = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Theta_0}}\,\underline{\underline{R}}^T \tag{3}$$

Felhasználjuk, hogy forgó koordinátarendszerben:

$$\vec{v}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{N}' = \frac{d}{dt}\vec{N} + \vec{\omega} \times \vec{N} = \vec{M} \tag{5}$$

Itt a testtel együtt forgó koordinátarendszerből írom fel az impulzusmomentumot.

$$\vec{N}^* = \underset{=}{\Theta_0}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$N_1 = \Theta_1\omega_1,\ N_2 = \Theta_2\omega_2,\ N_3 = \Theta_3\omega_3$$

- I.) $\frac{dN_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = M_1$
- II.) $\frac{dN_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = M_2$
- III.) $\frac{dN_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = M_3$

I.)

$$\Theta_1 \frac{d}{dt}\omega_1 + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = M_1 \tag{7}$$

II.)

$$\Theta_2 \frac{d}{dt}\omega_2 + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = M_2 \tag{8}$$

III.)

$$\Theta_3 \frac{d}{dt}\omega_3 + \omega_2\omega_1(\Theta_2 - \Theta_1) = M_3 \tag{9}$$

Ezek az Euler-féle pörgettyűegyenletek.

Ha a pörgettyű szimmetrikus, akkor $\Theta_1 = \Theta_2$, mivel van egy saját sík altere. Ha a pörgettyű szimmetrikus, akkor nincsenek forgatónyomatékok.

I.)

$$\Theta_1 \frac{d}{dt}\omega_1 + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_1) = 0 \tag{10}$$

II.)

$$\Theta_2 \frac{d}{dt}\omega_2 + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = 0 \tag{11}$$

III.)

$$\Theta_3 \frac{d}{dt}\omega_3 + \omega_2\omega_1(\Theta_1 - \Theta_1) = 0 \tag{12}$$

III.) $\rightarrow \quad \Theta_3\beta_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = áll.$

I.), II.)

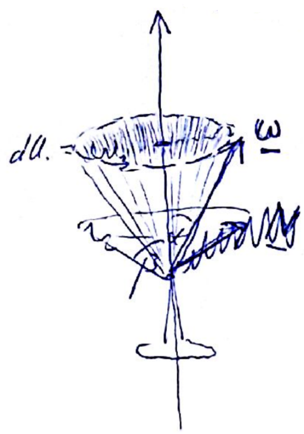
$$\Theta_1(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2) = 0 \tag{13}$$

$\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 = \dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2$

$$\frac{1}{2}\Theta_1\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad \rightarrow \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = áll. \tag{14}$$

Lényegében $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2} = |\vec{\omega}| = áll.$

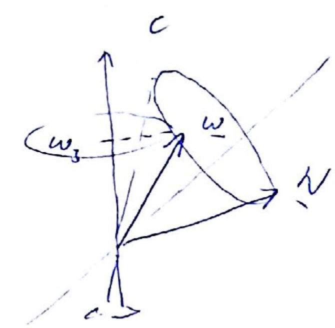
Egy α szögű kúp mentén forog körbe ω vektor egy c tengely körül, amit ω_3 komponens jelöl ki.



Mivel $\sum_i \vec{M}_i = 0 = \frac{d}{dt}\vec{N} \quad \rightarrow \quad \vec{N} = áll.$

Ez azt jelenti, hogy $\vec{N}$ is egy kúpon megy körbe.

Ezáltal a mozgási energia is állandó, hiszen $E_{kin} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{N} = \frac{1}{2}\vec{N}\vec{\omega}$



Ahogy $\vec{N}$ és $\vec{\omega}$ vektorok körbejárják a kúpjainkat, úgy egymást is.

Ezt <u>nutációnak</u> nevezzük és ez is meghatároz $\vec{N}$ körül egy kúpot.

Nutációs kúp

Ha az erők forgatónyomatéka nem nulla, akkor súlyos pörgetyűről beszélünk.

$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$, $\vec{N}\vec{M} = \vec{N}\frac{d}{dt}(\vec{N})^2$, ha ez is szimmetrikus, akkor van egy forgásszimmetria tengely, amely körül pörgetve $\vec{N}$ ezzel párhuzamos lesz. (Ekkor, ha nincs külső forgatónyomaték, akkor $|N| = áll.$.)

Stabilitásvizsgálat:

I.)

$$\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = 0 \tag{15}$$

II.)

$$\Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = 0 \tag{16}$$

III.)

$$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_2\omega_1(\Theta_2 - \Theta_1) = 0 \tag{17}$$

$\vec{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ megoldása az egyenletrendszernek. Mivel akkor, ha $\vec{\omega}_0 + \varrho\vec{\omega} = \vec{\omega}$, perturbáció $\rightarrow$

I.)

$$\Theta_1(\varrho\dot{\omega}_1) + \varrho\omega_2\omega_0(\Theta_3 - \Theta_2) = 0 \tag{18}$$

II.)

$$\Theta_2(\varrho\dot{\omega}_2) + \varrho\omega_1\omega_0(\Theta_1 - \Theta_3) = 0 \tag{19}$$

III.)

$$\Theta_3(\varrho\dot{\omega}_3) + \varrho\omega_2\omega_1(\Theta_2 - \Theta_1) = 0 \tag{20}$$

$\Theta_3(\varrho\dot{\omega}_3) \equiv 0$, az összeg második tagját elhanyagoljuk. ω_0 önkényesen megválasztott volt, bármilyen nagyságú lehet.

Tegyük fel, hogy a differenciálegyenlet megoldható:

$$\begin{pmatrix} \varrho\omega_1 \\ \varrho\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\omega_{1,0} \\ \varrho\omega_{2,0} \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{21}$$

I.)

$$\Theta_1 \lambda \varrho \omega_{1,0} e^{\lambda t} + \varrho \omega_{2,0} e^{\lambda t} \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) = 0 \tag{22}$$

II.)

$$\Theta_2 \lambda \varrho \omega_{2,0} e^{\lambda t} + \varrho \omega_{1,0} e^{\lambda t} \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0 \tag{23}$$

$e^{\lambda t}$-vel egyszerűsítek.

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 \lambda & \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) & \Theta_2 \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho \omega_{1,0} \\ \varrho \omega_{2,0} \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

$\det \underline{\underline{A}} = 0$, ahhoz, hogy legyen nemtriviális megoldás.

$$\lambda^2 = \omega_0^2 \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_1 \Theta_2} \tag{25}$$

Amiből: $\Theta_1 - \Theta_3 > 0$ és $\Theta_3 - \Theta_2 > 0$, vagy $\Theta_1 - \Theta_3 < 0$ és $\Theta_3 - \Theta_2 < 0$

Stabil, ha:

$\Theta_3 > \Theta_2$ és $\Theta_3 > \Theta_1$
Ez jelenti a legnagyobb tengelyt (valóságban mindig ilyen).

vagy:

$\Theta_3 < \Theta_2$ és $\Theta_3 < \Theta_1$
Ez jelenti a legkisebb tengelyt.

Intabil, ha:

$\Theta_3 > \Theta_2$ és $\Theta_3 < \Theta_1$
Középső tengely körüli forgás.

vagy:

$\Theta_3 < \Theta_2$ és $\Theta_3 > \Theta_1$
Középső tengely körüli forgás.