17.
Merev test mozgásának leírása

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019

$$\vec{N} = \vec{r}_0 \times m_t \vec{v}_0 + \vec{N}_s \tag{1}$$

(pályamomentum + sajátimpulzusmomentum)

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_0 + \dot{\vec{\varrho}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\varrho}}_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \dot{\vec{\varrho}}_i \vec{v}_0 \tag{2}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_t \vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\varrho}}_i^2 + \sum_i (m_i \dot{\vec{\varrho}}_i) \vec{v}_0 \tag{3}$$

$m_i \dot{\vec{\varrho}}_i \rightarrow$ tömegközéppont helyének deriváltja $\vec{0}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_t \vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\varrho}}_i^2 \tag{4}$$

A második tagot forgási energiának nevezzük majd.

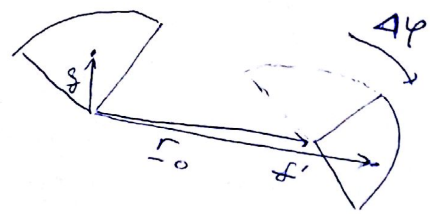
I.)

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(k)} \tag{5}$$

II.)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{(k)} \tag{6}$$

Merev testnél:



$$\vec{\varrho}' - \vec{\varrho} = \vec{r}_0 + \underline{\underline{O}}\vec{\varrho} \tag{7}$$

Ha $\vec{r}_0$ egy kicsiny elmozdulás $\vec{v}_0$ sebességgel.

$$\vec{\varrho}' - \vec{\varrho} = \vec{v}_0 \Delta t + \Delta\vec{\varphi} \times \vec{\varrho} \quad / : \Delta t \tag{8}$$

$$\dot{\vec{\varrho}} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\varrho} \tag{9}$$

Így megkaphatjuk egy merev test <u>tetszőleges</u> pontjának sebességét.

$$\vec{N}_s = \sum_i \vec{\varrho}_i \times m_i \dot{\vec{\varrho}}_i = \sum_i \vec{\varrho}_i \times m_i(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i) = \sum_i \vec{\varrho}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i) \tag{10}$$

Mivel tömegközépponti rendszerből nézve $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

$$\vec{N}_s = \sum_i m_i\big(\vec{\omega}\big(\vec{\varrho}_i\vec{\varrho}_i) - \vec{\varrho}_i(\vec{\omega}\vec{\varrho}_i)\big) = \sum_i m_i(\vec{\omega}\vec{\varrho}^2 - (\vec{\varrho}_i \circ \vec{\varrho}_i)\vec{\omega}) \tag{11}$$

$$\vec{N}_s = \left[\sum_i m_i(\underline{\underline{I}}\vec{\varrho}_i^2 - \vec{\varrho}_i \circ \vec{\varrho}_i)\right]\vec{\omega} = \underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} \tag{12}$$

Ha $\vec{\varrho}_i = (x_i; y_i; z_i) \quad \rightarrow$

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i z_i y_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i(y_i^2 + x_i^2) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Ez egy teljesen szimmetrikus mártix, így biztosan főtengelytranszformálható.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_t\vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{\varrho}}_i^2 = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}m_t + \vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i)(\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i) = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}m_t\vec{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{a}_i\vec{\omega}_i\vec{\varrho}_i) \tag{16}$$

Amiből a második tag ($\sum_i \frac{1}{2} m_i(\vec{a}_i\vec{\omega}_i\vec{\varrho}_i)$=

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i(\vec{\omega}_i\vec{a}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i(\vec{\varrho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i)) = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\omega}\left[\sum_i m_i(\varrho_i^2 \underset{=}{I} - \vec{\varrho}_i \circ \vec{\varrho}_i)\right]\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\underset{=}{\Theta}\vec{\omega} \tag{18}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\underset{=}{\Theta}\vec{\omega} \tag{19}$$

Ahol $\underset{=}{\Theta} = \vec{N}$. Merev test forgása során, ha az erők konzervatívak, akkor az használható.

Visszatérve a merev test mozgását leíró kezdeti egyenletekhez:

I.)

$$M\ddot{\vec{r}}_0 = \sum_i \vec{F}_i^{(K)} = \vec{F} \tag{20}$$

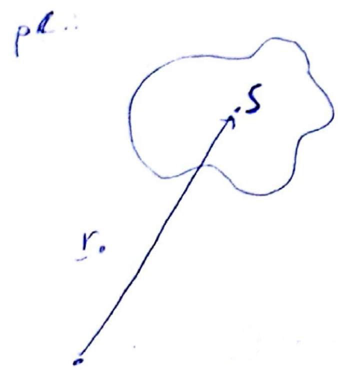
Az erők eredője, ami adott távolságban véve úgy forgat, mint a helyettesített erők.

II.)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{(k)} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F} \tag{21}$$

Merőlegesnek kell lennie a forgatónyomatékok összegére.

Ha:



$$\vec{G} = \sum_i m_i \vec{g}(\vec{r}_i) = (g \approx áll.) = m_t \vec{g} \tag{22}$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i qvecg(\vec{r}_i) = ... = (\sum_i m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} = m_t \vec{r}_0 \times \vec{g} \tag{23}$$

Azt a pontot, ahová $\vec{r}_0$ mutat súlypontnak nevezzük, ez homogén gravitációs mezőben egybeesik a tömegközépponttal.

Ha egy merev test síkban történő mozgását akarom leírni, akkor:

$$M\ddot{\vec{r}}_0 = \sum_i \vec{F}_i \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

Hat egyenlet, de mivel tudom, hogy az összes erő z irányú komponensei nem okoznak gyorsítást (kényszererők) és nincs forgatónyomatékuk, ezért:

$$M\ddot{\vec{x}}_0 = \sum_i \vec{F}_{i,x} \quad és \quad M\ddot{\vec{y}}_0 = \sum_i \vec{F}_{i,y} \tag{24}$$

És mivel síkban (x, y) mozog, ezért csak z irányú forgatónyomatéka és perdülete lehet.

$$\frac{d\vec{N}_s(z)}{dt} = \sum_i \vec{M}_i(z) \tag{25}$$

$$\vec{N}_{(s)}(z) = \underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} = \underline{\underline{\Theta}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta a' \\ \Theta b' \\ \Theta_{33}\omega_z \end{pmatrix} \tag{26}$$

Itt Θ diagonizált. $\Theta a'$-val és $\Theta b'$-vel tart ellen a kényszererő.

Így

$$\vec{N}_s = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ \Theta_{33}\omega_z \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\sum_i m_i(\vec{\varrho}_i^2 \underline{\underline{I}} - \vec{\varrho}_i \circ \vec{\varrho}_i) = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & a & b \\ -a & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & b \\ -b & -a & \sum_i m_i(y_i^2 + x_i^2) \end{pmatrix} \tag{28}$$

Mivel Θ diagonizált.

$$N_s(z) = \Theta_{33}\omega_z = \sum_i m_i(y_i^2 + x_i^2)\omega_z \tag{29}$$

$(y_i^2 + x_i^2$ állandó, mivel merev test.

$$\frac{dN_s(t)}{dt} = \sum_i M_i(z) = \Theta_{33}\frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_{33}\beta \tag{30}$$

Síkban tehát:

$$M = \Theta\beta \tag{31}$$