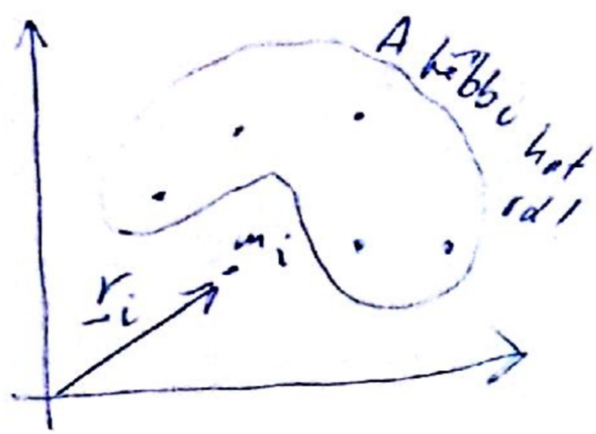
15.
Pontrendszerek törvényei
Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



Impulzustétel ($^{(k)}$- külső erő):

$$\vec{F}_1^{(k)} + \sum_j \vec{F}_{ij} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 \tag{1}$$

$$\vec{F}_2^{(k)} + \sum_j \vec{F}_{ij} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \tag{2}$$

$$\underline{\vec{F}_i^{(k)} + \sum_j \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i} \tag{3}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{(k)} + \underline{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \tag{4}$$

Konzervatív erőtérben a belső erők eredője $\forall$ esetben 0, mivel $\vec{F}_i j = -\vec{F}_j i$.

$$\sum_i \vec{F}_i^{(k)} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i \dot{r}_i\Big) = \frac{d}{dt}\vec{P} \quad : \quad \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{5}$$

Tehát a külső erők eredője megegyezik a rendszer impulzusváltozásával:

$$\vec{F}_e^{(k)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{6}$$

Ilyen rendszerben a pontok mozgását jellemezhetjük egy pont mozgásával.

$$M_t = \sum_i m_i \tag{7}$$

$$\vec{P} = M_t \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} = M_t \vec{v}_0 \tag{8}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{\dot{\Big(\sum_i m_i \vec{r}_i\Big)}}{\sum_i m_i} \tag{9}$$

Amiből:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{TKP} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{10}$$

Térjünk vissza az eredeti egyenleteinkhez:

$$\vec{r}_i \times / m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(k)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \tag{11}$$

$$m_i(\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(k)} + \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij} \tag{12}$$

Ami megegyezik:

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \vec{M}_i^{(k)} + \sum_j (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \tag{13}$$

Ahol $\vec{M}_i^{(k)}$ a külső erők forgatónyomatéka.

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{N}_i = \sum_i \vec{M}_i + \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \tag{14}$$

Newton III. szerint: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$$\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \vec{M}^* \tag{15}$$

$$-\sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = -\sum_{ij} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \vec{M}^* \tag{16}$$

$$\vec{M}^* = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \quad (!) \tag{17}$$

Mivel centrális erőtérben $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ párhuzamos $\vec{f}_{ij}$-vel, tehát keresztszorzatuk $\equiv 0$.

Tehát az impulzusmomentum-megváltozás, megegyezik a külső erők forgatónyomatékával.

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{18}$$

Most megpróbáljuk felírni az impulzusmomentumot tömegközépponti rendszerből.

$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$, ahol $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{\varrho}_i$ és $\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \dot{\vec{\varrho}}_i$

$$\vec{N} = \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{\varrho}_i) \times m_i (\vec{v}_0 + \dot{\vec{\varrho}}_i) \tag{19}$$

$$= \sum_i \Big[m_i(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) + m_i(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{\varrho}}_i) + m_i(\vec{\varrho}_i \times \vec{v}_0) + m_i(\vec{\varrho}_i \times \dot{\vec{\varrho}}_i) \Big] \tag{20}$$

$$= m_t(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) + \vec{r}_0 \times \dot{\Big(\sum_i m_i \vec{\varrho}_i \Big)} + \Big(\sum_i m_i \vec{\varrho}_i \Big) \times \vec{v}_0 + \sum_i m_i (\vec{\varrho}_i \times \dot{\vec{\varrho}}_i) \tag{21}$$

Ahol

- $m_t(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) = \vec{N}_{TKP}$
- $\sum_i m_i \vec{\varrho}_i$, a tömegközépponti rendszer tömegközéppontja a $\vec{0}$
- $\sum_i m_i(\vec{\varrho}_i \times \dot{\vec{\varrho}}_i)$ pedig $\vec{N}_s$ sajátimpulzusmomentum.

$\sum_i m_i(\vec{\varrho}_i \times \dot{\vec{\varrho}}_i) \rightarrow$ különleges tulajdonsága, hoyg nem függ a koordinátarendszer eltolásától és elforgatásától sem, mivel csak a pont belső szerkezetére (?) jellemző.

$$\vec{N} = \vec{N}_{TKP} + \vec{N}_s \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{N}_i = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{\varrho}_i) \times \vec{F}_i \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m_t(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) + \sum_i m_i(\vec{\varrho}_i \times \dot{\vec{\varrho}}_i) \Big) = \sum_i \vec{r}_0 \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{\varrho}_i \times \vec{F}_i \tag{24}$$

$$m_t(\vec{r}_0 \times \vec{a}_0) + \sum_i \vec{\varrho}_i \times m_i \ddot{\vec{\varrho}}_i = \sum_i \vec{r}_0 \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{\varrho}_i \times \vec{F}_i \tag{25}$$

Ahol:

- $m_t(\vec{r}_0 \times \vec{a}_0) = r_0 \times (m_t \vec{a}_0)$
- $\sum_i \vec{r}_0 \times \vec{F}_i = \vec{r}_0 \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r}_0 \times (m_t \vec{a}_0)$

Így $\vec{r}_0 \times (m_t \vec{a}_0)$ mindkét oldalból levonható.

$$\frac{d}{dt}\vec{N}_{saját} = \sum_i \vec{M}_i \tag{26}$$

Ez akkor is működik, ha a tömegközépponti rendszer nem inerciarendszer, mivel a tehetetlenségi erőknek nincs forgatónyomatéka.

Ha újra visszatérünk az eredeti egyenletünkhöz:

$$\vec{v}_i \cdot / m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(k)} + \sum_j \vec{F}_{ij} \tag{27}$$

$$m_i \vec{v}_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i \vec{F}_i^{(k)} + \sum_j \vec{v}_i \vec{F}_{ij} = P_i^{(k)} + \sum_j \vec{v}_i \vec{F}_{ij} \tag{28}$$

Ahol $P_i^{(k)}$ a külső erők teljesítménye.

$m_i \vec{v}_i \ddot{\vec{r}}_i \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v_i^2\right)$

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = P^{(k)} + \sum_i \sum_j \vec{v}_i \vec{F}_{ij} \tag{29}$$

Tegyük fel, hogy: Ha a belső és a külső erők is konzervatívak, akkor:

$$E = E_{kin} + \Phi + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\Phi_{i,j} = \acute{a}lland\acute{o} \tag{30}$$

Ahol $\sum_{i,j} \frac{1}{2}\Phi_{i,j}$ akkor nulla, ha $\vec{F}_{ij}$ kényszererő.

Merev testnél az összes belső erőt kényszererőnek vehetjük.