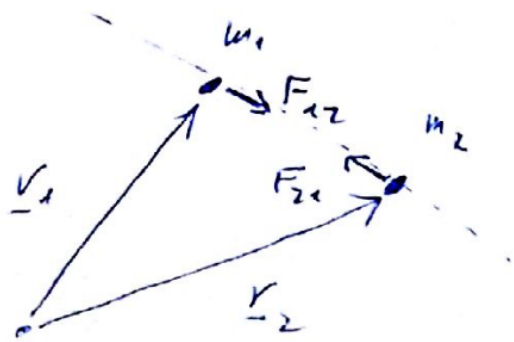
14.
Kéttest probléma
Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019

Feltesszük, hogy a két test között ható erő centrális és csak távolságuktól függ.



Távolságuk: $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{1}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad ,míg \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}(2)$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{m_1\vec{r}_1 \overset{\cdot\cdot}{+} m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = 0 \quad (< 3) \tag{4}$$

Ahol a bal oldal az $\vec{r}_{TKP}$ vektor második deriváltja.

Vagyis ilyen feltételek mellett azt kaptuk, hogy a tömegközéppont gyorsulása 0. Ebből következően a sebessége csak konstans lehet.

$$(m_1\dot{\vec{r}}_1 \overset{\cdot}{+} m_2\dot{\vec{r}}_2) = 0 \quad ,vagyis \quad (\vec{P}_1 \overset{\cdot}{+} \vec{P}_2) = 0 \tag{5}$$

Amiből következik, hogy:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \acute{a}lland\acute{o} \tag{6}$$

Mivel az erő csak az adott helyvektorok különbségétől függ, jelöljük így: $\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad / \cdot m_2 \tag{7}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad / \cdot m_1 \tag{8}$$

$$m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_1 - m_1 m_2\ddot{\vec{r}}_2 = (m_2 + m_1)\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{9}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{r}_1 \ddot{-} \vec{r}_2) = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{10}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}(\vec{r}_0) \tag{11}$$

Ahol $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a redukált tömeg nevű mennyiség, amit m^*-al jelölünk.

A kétest probléma során tehát nem magát a testet, hanem egy úgynevezett *kvázirészecskét* vizsgálok. (Wikipédia: A kvázirészecske nem valódi részecske, hanem egy adott anyaghoz kapcsolódó állapot illetve tulajdonság leírását segíti elő.)

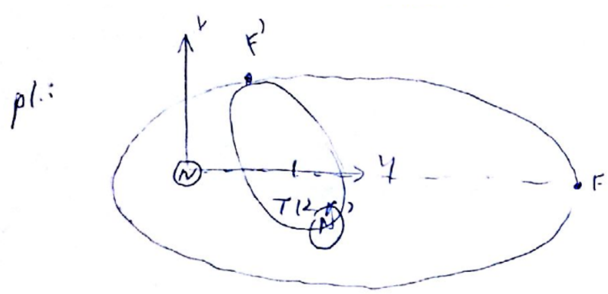
$$\text{I.) } \ddot{\vec{r}}_{TKP}(t) = 0 \qquad \text{II.) } m^*\ddot{\vec{r}}(t)\vec{F}(\vec{r})$$

$$\vec{r}_{TKP} = \frac{m\vec{R}}{m + M} \tag{12}$$

$$\vec{r}_F = \vec{R} - \frac{m}{m + M}\vec{R} = \vec{R}\frac{M}{m + M} \tag{13}$$

$$\vec{r}_N = .\frac{m}{m + M}\vec{R} \tag{14}$$

A tömegközéppont körül mindkét égitest ellipszispályán kering.



Ha a Napot tekintjük origónak, és az nem mozog:

$$m\ddot{\vec{r}}_F = -\gamma \frac{mM}{r_F^2} \frac{\vec{r}_F}{r_F} \quad \rightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \tag{15}$$

Ha a tömegközéppontból nézzük, akkor:

$$m\ddot{\vec{r}}'_F = -\gamma \frac{mM\vec{r}'_F}{\vec{r}'^2_F} \quad \rightarrow \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{m+M}{M} \right) \tag{16}$$

De a Naprendszerünkben a $\frac{m+M}{M}$ korrekció még a Jupiter esetében is nagyon-nagyon kicsiny.