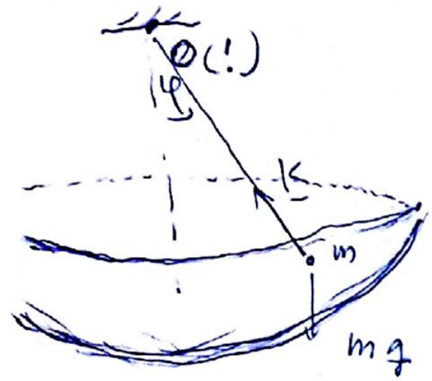
13.
Foucault kísérlet

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



Feltételezzük az ingára:

I.) $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi^2 \quad \forall t \in R$-re.

Ezek a feltételek egy gömbfelületet határoznak meg. Tudjuk, hogy ha egy kényszererő fellép, az a mozgás síkjára merőleges mivel nem végez munkát.

Tehát $f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l = 0 \rightarrow K = \lambda' grad(f(\vec{r})) = \lambda^* \vec{r}$

Ha a testet csak igen kis mértékben térítem ki és l fonál igen hosszú, akkor mondhatom azt, hogy z koordináta körülbelül állandó. $z = -l$

Most:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + 2m(\vec{v} \times \vec{w}) + K \tag{1}$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega\cos(\varphi) \\ 0 \\ \omega\sin(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda^* x \\ \lambda^* y \\ \lambda^* z \end{pmatrix} \tag{2}$$

II.) $\dot{x} = 2\dot{\varphi}\omega\sin(\varphi) + \lambda x$

III.) $\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos(\varphi) - 2\dot{x}\omega\sin(\varphi) + \lambda y$

IV.) $\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega\cos(\varphi) + \lambda z = 0$

A $2\dot{y}\omega\cos(\varphi)$ tagról: $-g$-hez képest igen kis kitérések esetén ez a gyorsuláskorrekció is elhagyható.

$$\lambda = -\frac{g}{l} \tag{3}$$

II.) $\dot{x} = 2\dot{\varphi}\omega\sin(\varphi) + \lambda x = 2\dot{y}\omega_1 + \lambda x$

III.) $\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos(\varphi) - 2\dot{x}\omega\sin(\varphi) + \lambda y = -2\dot{x}\omega_1 + \lambda y$

IV.) $\lambda = -\frac{g}{l}$

II.)

$$\ddot{x} - 2\omega_1\dot{y} + \frac{g}{l}x = \ddot{x} + i^2 2\omega_1\dot{y} + \frac{g}{l}x = 0 \tag{4}$$

III.)

$$\ddot{y} + 2\omega_1\dot{x} + \frac{g}{l}y = \ddot{y}i + i^2 2\omega_1\dot{x} + i\frac{g}{l}y = 0 \tag{5}$$

$$c = x + iy \quad \rightarrow \quad \dot{c} = \dot{x} + i\dot{y} \quad \rightarrow \quad \ddot{c} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

II.)+III.)

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + 2\omega_1 i(\dot{x} + i\dot{y}) + \frac{g}{l}(x + iy) \tag{6}$$

Behelyettesítve c-t:

$$\ddot{c} + 2\omega_1 i\dot{c} + \frac{g}{l}c = 0 \tag{7}$$

Keressük a megoldást $c(t) = e^{i\alpha t}$ alakban.

$$0 = -c_0\alpha^2 e^{i\alpha t} + 2\omega_1 i^2 c_0\alpha e^{i\alpha t} + \frac{g}{l}c_0 e^{i\alpha t} \tag{8}$$

$$0 = -\alpha^2 - 2\omega_1\alpha_0 + \frac{g}{l} \tag{9}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 + 4\frac{g}{l}}}{-2\cdot 1} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}} \tag{10}$$

Ha $\omega_1 << \sqrt{\frac{g}{l}}$, akkor ω_1^2, $\sqrt{\frac{g}{l}}$ mellett elhanyagolható.

$$c_1(t) = c_1 e^{(-\omega_1 - \frac{g}{l})it} \tag{11}$$

$$c_2(t) = c_2 e^{(-\omega_1 - \frac{g}{l})it} \tag{12}$$

(11)-ből és (12)ből:

$$c(t) = e^{-i\omega_1 t}\Big(c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\Big) \tag{13}$$

$$c(0) = c_1 + c_2 = a + 0i \tag{14}$$

$$\dot{c}(t) = -i\omega_1 e^{-i\omega_1 t}\Big(c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\Big) + e^{-i\omega_1 t}\Big(-i\sqrt{\frac{g}{l}}c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + i\sqrt{\frac{g}{l}}c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\Big) \tag{15}$$

$$\dot{c}(0) = (0 + 0i) = i\omega_1(c_1 + c_2) + i\sqrt{\frac{g}{l}}(c_2 - c_1) = 0 + 0i \tag{16}$$

$c_1 + c_2 = a$ behelyettesítése és átrendezés után:

$$\omega_1 a = \sqrt{\frac{g}{l}}(c_1 - c_2) \tag{17}$$

Amiből:

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a = b = c_1 - c_2 \tag{18}$$

$$a = c_1 + c_2 \text{ és } b = c_1 - c_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a$$

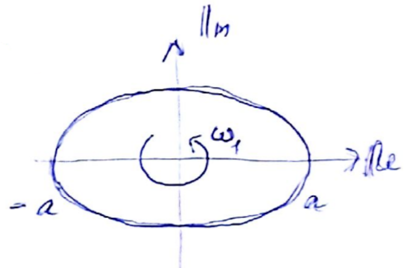
$$c_1 = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a\Big) \text{ és } c_2 = \frac{1}{2}\Big(a - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a\Big)$$

$$z(t) = e^{-i\omega_1 t}\left\{\frac{1}{2}\Big(a + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a\Big)e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \frac{1}{2}\Big(a - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a\Big)e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right\} \tag{19}$$

$$z(t) = e^{-i\omega_1 t}\left\{a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - i\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right\} \tag{20}$$

$$z(t) = e^{-i\omega_1 t}\left\{a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - i\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}a\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right\} \tag{21}$$

A kapcsos zárójeles tag:



Emellett ω_1-gyel forog az egész koordinátarendszer ($\omega_1 = \omega\sin(\varphi)$)