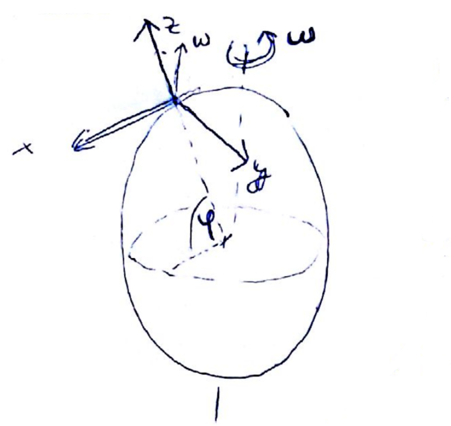
12.
Szabadesés a forgó Földön

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \text{ a felszín közelében, } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos(\varphi) \\ 0 \\ \omega\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

A Coriolis-erőhöz kell $\vec{v} \times \vec{\omega}$ szorzat. A lényeg, hogy a szabadon eső testre nem hat centrifugális erő, csak a Coriolis-erő.

$$m\vec{a} = m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \rightarrow \vec{a} = \vec{g} + 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) \tag{1}$$

A fentieket behelyettesítve:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega\cos(\varphi) \\ 0 \\ \omega\sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega \sin(\varphi)$

$\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos(\varphi) - 2\dot{x}\omega\sin(\varphi)$

$\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega\cos(\varphi)$

Kezdőfeltétel: $\vec{v}(0) = 0$

$$\dddot{y} = -2\omega\ddot{z}\cos(\varphi) - 2\ddot{x}\omega\sin(\varphi) \tag{3}$$

$$\dddot{y} = -2\omega(-g + 2\dot{y}\omega\cos(\varphi))\cos(\varphi) - 2(2\dot{y}\omega\sin(\varphi))\omega\sin(\varphi) \tag{4}$$

$$\dddot{y} = 2\omega g - 4\omega^2\dot{y}\cos^2(\varphi) - 4\dot{y}\omega^2\sin^2(\varphi) \tag{5}$$

Amiből:

$$\underline{\dddot{y} = 2\omega g\cos(\varphi) - 4\omega^2\dot{y}} \tag{6}$$

$$! \to \dot{y} = A\cos(2\omega t + \psi) + B \tag{7}$$

$$\dddot{y} = -A4\omega^2\cos(2\omega t + \psi) \tag{8}$$

(6)-ba beírva (7)-et és (8)-at:

$$-A4\omega^2\cos(2\omega t + \psi) = 2\omega g\cos(\varphi) - 4\omega^2 B - 4\omega^2 A\cos(2\omega t + \psi) \tag{9}$$

$$4\omega B = 2g\cos(\varphi) \tag{10}$$

$$B = \frac{g\cos(\varphi)}{2\omega} \tag{11}$$

$$\dot{y} = A\cos(2\omega t + \psi) + \frac{g\cos(\varphi)}{2\omega} \tag{12}$$

Tudjuk, hogy $\ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos(\varphi) - 2\dot{x}\omega\sin(\varphi) = 0$, $t = 0$-ban. És azt is tudjuk, hogy $\vec{v}(0) = 0$, tehát $\dot{y}(0) = 0$

$$0 = A\cos(2\omega 0 + \psi) + \frac{g\cos(\varphi)}{2\omega} \tag{13}$$

$$A = -\frac{g\cos(\varphi)}{2\omega\cos(\psi)} = -\frac{g\cos(\varphi)}{2\omega} \quad \Big| \psi \overset{!}{=} 0 \tag{14}$$

$\dot{y} = \frac{\cos(\varphi)g}{2\omega}\Big(1 - cos(2\omega t)\Big)$, ahol, ha ωt nagyon kicsiny, ami azért van, mert ω pici, vagy nagyon rövid ideig tartott az esés, akkor
$\cos(2\omega t) \approx 1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} = 1 - 2\omega^2 t^2$

$$\dot{y} = \frac{g\cos(\varphi)}{2\omega}\left(2\omega^2 t^2\right) = g\cos(\varphi)\omega t^2 \tag{15}$$

Ha $\dot{y}(0) = 0$ és $y(0) = 0$, akkor:

$$\int \dot{y}dt = y(t) + y(0) \tag{16}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}g\cos(\varphi)\omega t^3 \tag{17}$$

Ebből: $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ és $x(t) = 0$