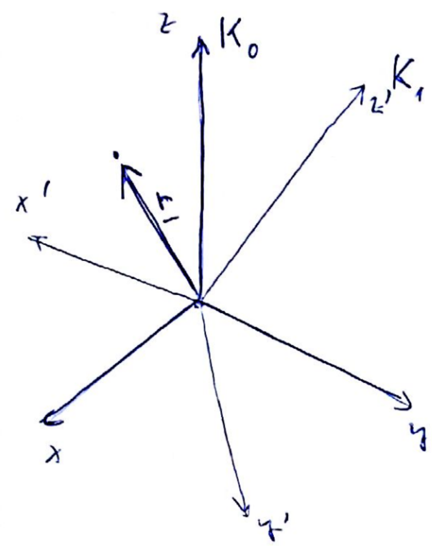
11.
Gyorsuló koordinátarenszerek

Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



Adott $\vec{r}$ vektort, ha reprezentáljuk ortonormált bázison, akkor ha azt egy másik ortonormált bázison reprezentáljuk, akkor:

$$\vec{r}' = \underline{\underline{O}}\vec{v} \tag{1}$$

Ahol $\underline{\underline{O}}$ egy térbeli forgásmátrix.

$$\vec{r}'(t) = \underline{\underline{O}}(t)\vec{r}(t) \tag{2}$$

$$\dot{\vec{r}}'(t) = \dot{\underline{\underline{O}}}(t)\vec{r}(t) + \underline{\underline{O}}(t)\dot{\vec{r}}(t) \tag{3}$$

Mivel $\underline{\underline{O}}$ egy forgatás, ezért kimondhatjuk azt a tulajdonságát, hogy a transzponáltja az inverze.

$$\underline{\underline{O}}^T(t)\dot{\vec{r}}'(t) = \underline{\underline{O}}^T(t)\dot{\underline{\underline{O}}}(t)\vec{r}(t) + \underline{\underline{O}}^T(t)\underline{\underline{O}}(t)\dot{\vec{r}}(t) \tag{4}$$

A második tag: $\underline{\underline{I}}$

Tudjuk, hogy $\underline{\underline{O}}^T\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}}$, amiből $\frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{O}}^T\underline{\underline{O}}\right) = 0 = \dot{\underline{\underline{O}}}^T\underline{\underline{O}} + \underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}}$

$\underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}} = -\dot{\underline{\underline{O}}}^T\underline{\underline{O}} \rightarrow$ Mivel ez egy teljesen antiszimmetrikus mennyiség, ezért három dimenzióban, a Hodge-dualitás alapján az megfeleltethaző a következő mátrix-szal:

$$\left(\underline{\underline{O}}^T\dot{\underline{\underline{O}}}\right)_{ij} = \left(\underline{\underline{\Omega}}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (\vec{\omega})_k = \varepsilon_{ijk}\Omega_{ij} \tag{5}$$

és

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{O}}^T\vec{v}'(t) = \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v} \tag{7}$$

Ebben a leírásban az összes vektor a K_0 koordinátarendszerben van felírva, még a $\vec{v}'(t)$ is, mivel az $\underline{\underline{O}}^T$ által vissza van forgatva.

Feltételezzük, hogy $\underline{\underline{O}}^T(t)\vec{v}'(t) = \vec{v}^*(t)$-ből úgy kaphatjuk meg $\vec{a}^*(t)$ vektort, hogy ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre $\vec{v}(t)$ vektoron.

$$\vec{a}^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}x\right)\left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega}x\right)\vec{r} = \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} + \frac{d}{dt}\big(\vec{\omega} \times \vec{r}\big) + \vec{\omega} \times \left(\frac{d}{dt}\vec{r}\right) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \vec{r}\big) = \tag{9}$$

$$\vec{a} + \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega}\big(\vec{\omega}\vec{r}\big) - \vec{r}\big(\vec{\omega}\vec{\omega}\big) \tag{10}$$

Összevonások után:

$$\vec{a}^*(t) = \vec{a} + \vec{\beta} \times \vec{r} + 2\big(\vec{\omega} \times \vec{v}\big) + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \vec{r}\big) + a_0 \tag{11}$$

$\vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \vec{r}\big) = \omega^2\big(\vec{r} - \vec{e}_\omega(\vec{e}_\omega\vec{r})\big)$, amiből $\vec{r} - \vec{e}_\omega(\vec{e}_\omega\vec{r}) = \vec{r}_\perp$

$\vec{a}_0$: konstans gyorsulásvektor, azt mutatja, hogy adott koordinátarendszer középpontja hogyan mozog a rögzítetthez képest

$$m\vec{a}^*(t) - m\vec{a}_0 = m\vec{a} + 2m\big(\vec{\omega} \times \vec{v}\big) + m\omega^2\vec{r}_\perp + m\big(\vec{\beta} \times \vec{r}\big) \tag{12}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} - ma_0 + 2m\big(\vec{v} \times \vec{\omega}\big) + m\big(\vec{r} \times \vec{\beta}\big) - m\omega^2\vec{r}_\perp \tag{13}$$

Ahol a második tag a Coriolis-erő, majd az Euler-erő és a Centrifugális erő.

Ezeket az erőket nevezzük tehetetlenségi erőknek.