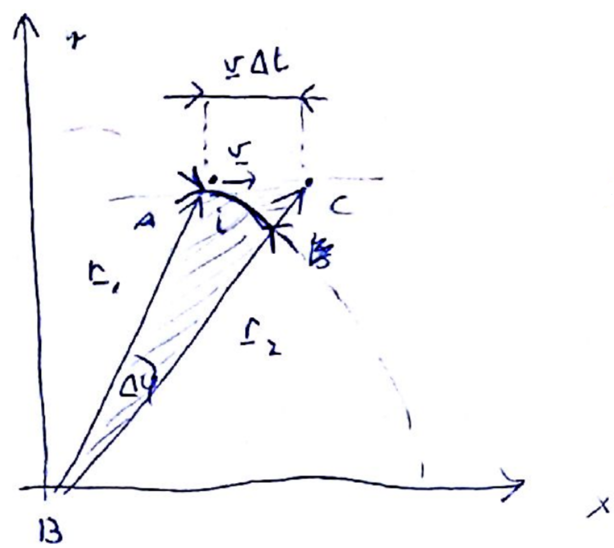
10.
Bolygók mozgása
Emelt mechanika szóbeli vizsga tételsor 2019.

Szabolcs Szepesi
forrás: Fizweb

January 2019



$\Delta\varphi << 1 \quad : \quad \vec{r}_1 \approx \vec{r}_2 = \vec{r}$

$i = \Delta\varphi\vec{r}$

$\Delta T_{ABC} \approx \frac{r^2\Delta\varphi}{2}$

Kepler II.

$$\frac{\Delta T_{ABC}}{\Delta T} = \frac{r^2\Delta\varphi}{2\Delta T} \tag{1}$$

$$\dot{T} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} \tag{2}$$

Mivel tudjuk, hogy centrális erőtérben az impulzusmomentum nagysága megmarad,így tudjuk, hogy ez a *területsebesség*-nek nevezett mennyiség is megmarad. ($|\vec{N}| = mr^2\dot{\varphi}$)

Gravitációs helyzeti energia: $\Phi(r) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$, ennek gradiense $\vec{F}(\vec{r})$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$áll. = E = \frac{1}{2}m_1 v^2 - \gamma\frac{m_1 m_2}{r} \quad \Big| m_2 = M \quad és \quad m_1 = m \tag{3}$$

$$v^2 - \frac{2\gamma M}{r} = v^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{2E}{m} = h \tag{4}$$

Ennek kifejtése (magyarázat):

$\vec{v}$-t polárkoordinátarendszerben felírva: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2|\varrho_r|^2 + r^2\dot{\varphi}^2|\vec{e}_\varphi|^2 + \dot{r}r\varphi\vec{e}_r\vec{e}_\varphi = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{5}$$

Mivel $\vec{e}_r\vec{e}_\varphi = 0$

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{6}$$

Ezt beírva (4)-be:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2\mu}{r} = h \tag{7}$$

Mivel $|\vec{N}| = mr^2\dot{\varphi} = \textit{állandó}$ centrális erőtérben, ezért

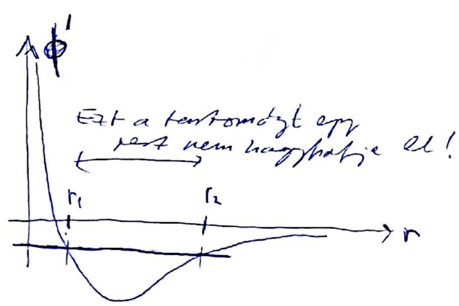
$$r^2\dot{\varphi} = c \quad , amiből \quad \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \tag{8}$$

$$\dot{r}^2 + \left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = h \tag{9}$$

Ez hasonlít az $E_{kin} + \Phi(\vec{r}) = E$ egyenletre.

$$\Phi'(\vec{r}) = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} \tag{10}$$

Valamilyen effektív helyzet, energiasűrűség.



Van egy $r_{1(min)}$ és egy $r_{2(max)}$ távolság, amerre eltávolodhat a test.

$$\dot{r} = \pm\sqrt{h - \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \frac{2\mu}{r}} \tag{11}$$

Mivel $r\big(\varphi(t)\big)$ függvényében is megadhatom, ezért kompozíció függvény deriválási szabálya alapján:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right) \tag{12}$$

Behelyettesítem (11)-be:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right) = \pm\sqrt{h - \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \frac{2\mu}{r}} \tag{13}$$

$A^2 = h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right) = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right)} \tag{14}$$

$\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} = K(\varphi)$ behelyettesítéssel:

$$\frac{dK}{d\varphi} = \pm\sqrt{A^2 - K(\varphi)} \tag{15}$$

$$K = A \cdot \cos(\varphi + \varphi_0) \quad : \quad \varphi_0 = 0 \tag{16}$$

$$K = A \cdot \cos(\varphi) \tag{17}$$

Összeírva:

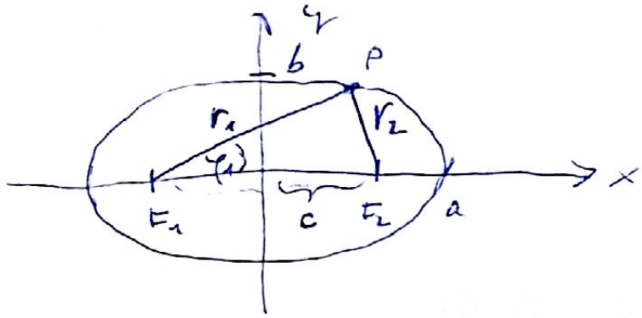
$$\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} = \left(h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2\right)\cos(\varphi) \tag{18}$$

$$\frac{c}{r} = \frac{\mu}{c} - A\cos(\varphi) \tag{19}$$

$$r = \frac{c}{\frac{\mu}{c} - A\cos(\varphi)} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - \varepsilon\cos(\varphi)} \tag{20}$$

$$\varepsilon = \frac{cA}{\mu} = \frac{c}{\mu}\sqrt{h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2} = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{\mu^2}} \tag{21}$$

Ellipszis polárkoordinátákkal:



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{22}$$

$$r_1 + r_2 = d = 2a \tag{23}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{24}$$

(23)-ból:

$$r_2 = 2a - r_1 \tag{25}$$

(24)-be:

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4r_1 c \cos(\varphi) \tag{26}$$

Egyszerűsítés után:

$$a^2 - c^2 = r_1(a - c \cdot \cos(\varphi_1) \tag{27}$$

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cdot \cos(\varphi)} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a} \cdot \cos(\varphi)} \quad ellipszisnél: \quad 0 < \frac{c}{a} < 1 \tag{28}$$

Kepler III:

$q = \frac{dA}{dt}$, $T_0 = ab\pi$

$$q = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} c \tag{29}$$

$$\frac{1}{2} vT = T_0 \tag{30}$$

$$\frac{c^2}{\mu} = \frac{b^2}{a} \tag{31}$$

$$c^2 T^2 = 4\pi^2 a^2 b^2 \tag{32}$$

$$\mu T^2 \frac{b^2}{a} = 4\pi^2 a^2 b^2 \quad / : b^2 \tag{33}$$

A végső forma:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \tag{34}$$