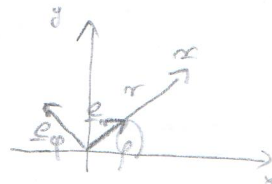
1. Kinematika, alapfogalmak, kül. koordrszek

- kinematika: mozgások leírása – hol van és mikor ⇐ $\underline{r}(t)$ fv!
- dimenziók: 3 + 1 ⇐ klasszikus: idő független
  ⇐ relativisztikus: összefügg
- $\underline{r}$ vektor ⇐ számhármas ⇒ műveletek
- műveletek: összeadás, skalárral szorz., abs érték
  skaláris szorz.: $|r_1 - r_2|$ komponensek és abs-a $\quad r_1 r_2 = |r_1||r_2| \cos\alpha$
- $\underline{r}(t)$ fv → deriváltakat leszármaztatunk: $\underline{v}$, $\underline{a}$
- pálya: $y(x)$ v. $z(x)$, időtől független
- vektoroszkóp
  - a) <u>szabadesés</u>
    - ismert: $\underline{a} = (0, 0, -g)$
    - $\underline{r}(t)$ fv-hez 6 paraméter kell (pontosan)
    - mozgásegyenlet diffegy. ⇒ paraméterek szabadok
  - b) <u>ferde hajítás</u>
    - $\underline{r}(t) = (v_{x0}t, 0, v_{z0}t - \frac{g}{2}t^2)$ ⇒ pályaegyenlet $z(x)$ parabola
  - c) <u>harm. rezgőmozg.</u>
    - $a = -\omega_0^2 x$
    - $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ⇒ $v(t)$, $a(t)$
    - kezdőfeltétel: A és φ ⇒ $x(0)$, $v(0)$ ⇒
    - fázistér: $v(x)$ diagram – ellipszis $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega_0}\right)^2 = 1$ ⇐ $\sin^2 + \cos^2 = 1$ miatt
      kezdeti pont A, φ-től függ

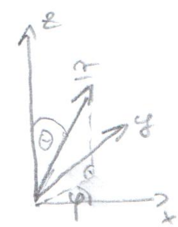
+ gonosz manó

Más koordrszek

1) <u>síkbeli polárkoord</u>



- $x(t) = r(t)\cos(\varphi(t))$
  $y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$
- $\underline{e}_r$ egységvektor radiális $\quad \underline{e}_r = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$
- $\underline{e}_\varphi$ egységvektor $\underline{e}_\varphi \perp \underline{e}_r$ $\quad \underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t))$
- $\underline{r} = r\,\underline{e}_r$ ↷ $\dot{\underline{e}}_r$
- $\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \ldots = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot\varphi\underline{e}_\varphi$ ⇐ rad. és tang. komponens
  ↷ $\dot{\underline{e}}_\varphi$
- $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ldots = (\ddot{r} - r\dot\varphi^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot\varphi + r\ddot\varphi)\underline{e}_\varphi$
- jelölés: $\dot\varphi = \omega$ szögsebl.
  $\ddot\varphi = \beta$ szöggyors. ⇒ behelyett.



2) <u>térbeli polárkoord</u>

- r – hossz, Θ – z tengellyel bezárt ∡,
  φ – x-y síkú vetület x tengellyel ∡ ⇒ $\quad x = r\cos\varphi\sin\Theta$
  $y = r\sin\varphi\sin\Theta$
  $z = r\cos\Theta$

3) (<u>hengerkoord.</u>)

4) <u>simuló kör</u>

- pálya minden pontjában körmozgás simuló körön
- sebesség: pályagörbe érintőjében
- $\underline{t}$ – tangens egységvektor ⇒ $\underline{v} = v\,\underline{t}$
- $\underline{a} = \dot{v}\underline{t} + v\dot{\underline{t}}$
- $\underline{t} = \underline{e}_\varphi$ ⇒ $\dot{\underline{t}} = -\dot\varphi\underline{e}_r = \dot\varphi\underline{n}$ ⇐ $\underline{n} = -\underline{e}_r$ befelé mutató normális
  ⇒ $\underline{a} = \dot{v}\underline{t} + \frac{v^2}{\varrho}\underline{n}$

+ csigák szabályos Δ-ben

2. Newton-törvények, speciális erőtörvények

- axióma: keretrsz ← nem léphetünk ki belőle

1) inerciarsz

- kell koordrsz → bármelyik jó, de van egyszerűbb
- létezik olyan koordrsz, melyben a magukra hagyott testek egy. von. egy. mozg.

2) $F = ma$

- $\underline{F} = m\underline{a}$ ← nem mond semmit
- $\boxed{\underline{f}(t, \underline{r}, \underline{v}) = \underline{a}}$ ← pontosan másodrendű diffegy.
- kezdőfeltétel: 6 ($\underline{r}$ és $\underline{v}$) → kísérleti tap. ⇒ mozgásegyenlet nem lehet magasabb rendű

3) kölcsönhatás: erő - ellenerő

- két test kölcsönhatása esetén: $\underline{a}$ párh. de ell. irányú és $\boxed{\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{m_2}{m_1} = konst}$

  $\Rightarrow m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2 \Rightarrow \boxed{\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}}$
- tömeg: testre jell. állandó
- több tömegpont esetén is érvényes páronként

4) szuperpozíció elve

- kölcsönhatás: több erő hat egyszerre pl. 3 töltött pont
- partneri test bevezetése
- partnerség esetén eredő erő = páronkénti erők összege $\boxed{\underline{F} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i}$

5) speciális erőtörvények

- állandó erő: $\underline{F} = m\underline{g}$ homogén tér
- rugóerő: $\underline{F} = -D\underline{x}$
- grav. erő: $\underline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$
- súrlódási erő: $F_t \leq \mu_0 N$ tapadási

  $F_{cs} = \mu N$ csúszási
- közegellenállás: $F_k \sim v^{\alpha}$ $\alpha = 1 \Rightarrow$ kicsi $\alpha = 2 \Rightarrow$ nagy $\alpha = 3 \Rightarrow$ turbulens
- kényszererő: csak a mozgás körülményeinek ismeretében

3. Csillapított rezgések

1) függőleges rezgőmozg.

- $ma = mg - Dx$ $\leftarrow \omega_0^2 = \frac{D}{m}$ $\Rightarrow \ddot{x} = g - \omega_0^2 x$
- mo.: $\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + B}$ $\leftarrow$ B-be eltolt egyensúlyi helyzet

  kezdőft.: A, φ

2) közegben súrlódó szabadesés

- $ma = mg - \lambda v$ $\leftarrow \beta = \frac{\lambda}{m}$ $\Rightarrow \dot{v} = g - \beta v$
- mo.: exp. $\boxed{v(t) = v_0 e^{\alpha t} + v_\infty}$
- visszahelyett.: $\Rightarrow$ konst $= 0$ és exp. együttható egyenlő $\Rightarrow g = \beta v_\infty$ és $\beta = -\alpha$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + v_\infty}$ $\tau = \frac{1}{\beta}$ $\leftarrow 5\tau$ után $\sim$ egyensúly

3a) csill. rezgés – dinamikus súrlódás

- $ma = -Dx - \lambda v$ $\leftarrow \beta = \frac{\lambda}{2m}$ $\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
- mo: $\boxed{x(t) = A(t) \sin(\omega t + \varphi)}$ $\leftarrow$ amplitúdó időfüggő $\Rightarrow \dot{x}, \ddot{x}$
- visszahelyett.: sin-os és cos-os együtthatók $\leftarrow$ legyenek 0
  - cos együttható-ja 0 $\Rightarrow \dot{A} = -\beta A \Rightarrow A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ exp. amp. csill.
  - sin együttható-ja 0 $\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)}$ ahol $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta$ $\omega_0 > \beta$ kezdf.: A_0 és φ

- egyensúlyba beállás pontos
- logaritmikus dekrementum $\boxed{\ln \frac{A_{n+1}}{A_n} = -\beta T}$

3b) ha $\beta > \omega_0$ – túlcsill. rezgés

- mo.: $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ $\Rightarrow \dot{x}, \ddot{x}$
- visszahelyett.: $[\,]\, x_0 e^{\alpha t}$ $\leftarrow [\,] = 0$ $\Rightarrow \alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$
- mo. lineárisa: $\boxed{x(t) = x_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + x_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}}$ $\swarrow$ gyorsabban/lassabban lecseng idővel
- cmpx számokkal: $\alpha_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

  $\Rightarrow x(t) = x_1 e^{\cdots} + x_2 e^{\cdots}$ $\leftarrow x_1$ és x_2 is cmpx $x_2 = x_1^*$ fizikailag valós $x_1 = |x_1| e^{i\varphi}$

  $\Rightarrow x(t) = |x_1| e^{-\beta t} \cdot 2\cos(\ldots) \Rightarrow \boxed{x(t) = 2|x_1| e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi)}$

\+ krit. eset $\beta = \omega_0$

$x(t) = (x_1 + x_2) e^{-\beta t} \Rightarrow (x_1 + Ct) e^{-\beta t}$ $\beta \to \omega$

4) csill. rezgés – statikus súrlódás

- $ma = -Dx - F_S \frac{v}{|v|}$
- egy. helyz. eltolódik: lefelé menet felfelé $a + F_S/D$; felfelé menet lefelé $a - F_S/D$
- megáll: $a \pm F_S/D$ intervallumon belül bárhol
- alsó: egyre sinusok

4. Kényszerrezgés, rezonancia

1) kényszerrezgés

- $ma = -Dx - \lambda v + F_g(t)$ ← $F_g(t) := F_0 \sin(\omega t)$ gerjesztési fv
  $\Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)$
- próba: $\boxed{x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))}$ => (addíciós) => $x, \dot{x}, \ddot{x}$
- behelyett.: $\eta \sin\omega t + \mu \cos\omega t = f_0 \sin\omega t)$ ← $\eta = f_0$ és $\mu = 0$
  => két egyenlet → $\mu = 0$ => $\operatorname{tg}\varphi = \ldots$
  ↘ öadás => $\boxed{A(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$

2a) rezonanciafrekvencia

- $A(\omega)$ ábra → $\omega = 0$-nál $A = f_0/\omega_0$
  ↘ $\omega \to \infty$ $A \sim 1/\omega^2$ lecseng } köztük: szélsőérték-keresés
- szélsőérték: $\frac{dA}{d\omega} = 0$ ← $\sqrt{\ldots}$ alatti belső fv deriv. => szorzat: $[\ldots]\,\omega = 0$
  => $\omega = 0$ triviális
  $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ => $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$ (nem létezik, ha $\omega_0^2 < 2\beta^2$)
- rezonancia amplitúdó: visszahelyett. ω_r
  β (csillapodás) csökken → A nő

- görbe szélessége: $A_{max}/\sqrt{2}$
  $A(\omega)$ nevezője $\sqrt{2}$-szerese $A(\omega_r)$-énak
  => $(\omega^2)_{1,2}$ másodfokú => diszkrimináns: $D = 16\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)$
  => két gyök kül. ~~diszkr.~~ => $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 4\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \underbrace{(\omega_1+\omega_2)}_{\sim 2\omega_r}\underbrace{(\omega_1-\omega_2)}_{\Delta\omega}$ ⇒ $\Delta\omega \sim \beta$
  => a csillapítás csökkentésével a görbe egyre keskenyebb és magasabb

5. Rezgések összetétele

1) párhuzamos rezgések

- $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi}\sin(\omega t) + \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi}\cos(\omega t) = A\sin(\omega t+\varphi)$

$\Rightarrow A\cos\varphi = \dots$ és $A\sin\varphi = \dots$ $\Rightarrow$ II) : I) $\rightarrow \operatorname{tg}\varphi$

I)^2 + II)^2 $\rightarrow$ $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \underbrace{2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}_{\text{interferencia-tag}}$

- ábra $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\varphi$: A_1 és A_2 x és y komponensei
  A : cos-tétel

- ábra - cmpx számok $\Rightarrow A e^{i\varphi} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ ha $\omega_1 = \omega_2$

2) merőleges rezgések

- $x = A_1\sin(\omega t)$ $\sin(\alpha+\beta) \Rightarrow \sin\omega t = x/A_1$
  $y = A_2\sin(\omega t+\varphi)$ $\Longrightarrow$ $y = A_2(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi)$

- $y(x)$ fv

$\Rightarrow$ kvadratikus alak $\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{yx}{A_2A_1}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2\varphi$

mx: $\begin{pmatrix} 1/A_1^2 & -1/A_1A_2\cdot\cos\varphi \\ -1/A_1A_2\cdot\cos\varphi & 1/A_2^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(\dots)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sin^2\varphi$ $\Rightarrow$ kúpszelet

- $\varphi = 0 \Rightarrow$ egyenes
- $\varphi = 90° \Rightarrow$ ellipszis
  ha kicsit kül. frekv. $\Rightarrow$ ellipszis lassan forog

- $f_2 = 2f_1$ és $\varphi_1 = \varphi_2$
  $\Rightarrow x = A\cos(\omega t)$
  $y = A\cos(2\omega t)$ $\Rightarrow \frac{y}{A} = 2\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 1$ lefelé parabola

- Lissajous-görbék: ált. eset
  ha $\omega_2 = k\,\omega_1$ $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ zárt görbék

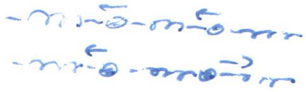
6. Csatolt rezgések

1) két golyó rugóval

- $\ddot{u}_1 = -\omega_0^2 u_1 + \Omega^2(u_2 - u_1)$
  $\ddot{u}_2 = -\omega_0^2 u_2 - \Omega^2(u_2 - u_1)$ ← $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ $\Omega^2 = \frac{K}{m}$
- mo.: $u_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$
  $u_2(t) = A_2 \sin(\omega t)$
- behelyett.: $\Rightarrow$ $(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)A_1 - \Omega^2 A_2 = 0$
  $(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)A_2 - \Omega^2 A_1 = 0$

$\Rightarrow A_1 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2} A_2$

$\Rightarrow \frac{(\dots)}{(\dots)} A_2 = 0$ → $A_2 = 0$
→ számláló 0 → $\omega_1^2 = \omega_0^2$
→ $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

- analógia páros ingával:
  - $\omega_1^2 = \omega_0^2 \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow$ 
  - $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow$

   } harm. rezgőmozg.
- mo a kettő összege
  $u_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$
  $u_2 =$ — " — — " — ← 4 paraméter: $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$
  ← ∅ új param.

2) lebegés

- ha a két frekv. közel azonos (gyenge csatolás)
- $u = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t) = 2A \sin(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega_0} t) \cos(\underbrace{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}}_{\Delta\omega} t)$

$\Delta\omega$ kicsi $\Rightarrow$ cos sokkal lassabban változik, mint sin
$\Rightarrow$ sinusrezgés $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ $A_0 = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t)$
lassan változó amplitúdó

7. Impulzus, impulzusmomentum

1) impulzus

- $\underline{p} = m\underline{v}$ levezetése
- $m\underline{a} = \underline{F}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F}$ és $\dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{\underline{p}}{m}$
- Euler-módszer: $\underline{p}(t+\Delta t) \approx \underline{p}(t) + \underline{F}\Delta t$
  $\underline{r}(t+\Delta t) \approx \underline{r}(t) + \dfrac{\underline{p}}{m}\Delta t$

2) impulzusmomentum

- $m\underline{a} = \underline{F}$ ← balról vekt $\underline{r}$ $\Rightarrow$ $\underline{r} \times m\underline{a} = \underbrace{\underline{r} \times \underline{F}}_{\underline{M}}$
- forgatónyomaték: $\underline{M} := \underline{r} \times \underline{F}$
- imp. mom.: $\underline{N} = \underline{r} \times m\underline{v} = \underline{r} \times \underline{p}$
  $\Rightarrow \boxed{\dfrac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}}$

- imp. mom. megmaradás
  a) egy. von. egy. mozg. $\underline{F} = 0$
  b) centrális erőtér

- centrális erőtér - erő minden pontban az origóba mutat $\underline{F} \parallel \underline{r}$
  - $\underline{F} \parallel \underline{r} \Rightarrow \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{N} = \text{áll}!$
  - $\underline{r}\underline{N} = \underline{r}(\underline{r} \times m\underline{v}) = 0 \Rightarrow \underline{N} \perp \underline{r} \Rightarrow$ $\underline{N}$-re merőleges síkmozgás
  - polárkoord $\Rightarrow$ Kepler !!!
    $\underline{N} = m r^2 \dot{\varphi} (\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi) \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\varphi} = r^2\omega = \text{áll.}}$
    ábra: körív, területi sebesség $\boxed{\dot{T} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{áll.}}$
    minden centr. erőtérre

8. Munka, potenciális energia

1) teljesítmény

- $\underline{F} = m\underline{a} \; / \cdot \underline{v}$ szorzásán $\Rightarrow \underline{v}\,\underline{F} = m\underline{v}\,\underline{a}$
- teljesítmény: $\boxed{P := \underline{v}\,\underline{F}}$
- E_{kin} deriv.: $dE_{kin}/dt = d/dt\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\underline{v}\,\underline{a}$ $\Rightarrow \boxed{\frac{dE_{kin}}{dt} = P}$
- ha $P = \underline{v}\,\underline{F} = 0$ $(\underline{v} \perp \underline{F})$ $\Rightarrow E_{kin} =$ áll. pl. gyorsítók
- munka: $W := \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = \int \frac{d}{dt}E_{kin} = E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \boxed{\Delta E_{kin} = W}$ munkatétel

2) erőterek

- erőtér: $\underline{F}(\underline{r})$ erő csak a hely fv-e
- munka: $W = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} \underline{F}(\underline{r}(t))\,\underline{v}(t)\,dt \xrightarrow[\text{időtől független}]{\text{közelítő összeg,}} \approx \sum \underline{F}(\underline{r}_i)\Delta\underline{r} \to \boxed{\int_G \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = W}$ görbementi integrál
- konzervatív erőtér:

  $\oint \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$ // rot $\underline{F}(\underline{r}) = 0$ // $\exists \phi : \underline{F}(\underline{r}) = -\text{grad}\,\phi$ // $W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = \phi(r_1) - \phi(r_2)$

  munka csak kezdő- és végponttól függ, görbétől nem

3) potenciális energia ← konz. erőtérben!

- minden ponthoz skalármennyiség rendelése $\phi(\underline{r}) = -\int_0^{r} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r} = E_{pot}$
- munka két pont közt: $\phi(r_2) = \phi(r_1) - W$
- konz. erőtér $\Rightarrow W = \phi(\underline{r}(t_0)) - \phi(\underline{r}(t_1)) = E_{kin}(t_1) - E_{kin}(t_2) = W \Leftarrow$ munkatétel

  $\Rightarrow$ energiamegm. $\boxed{E_{kin}(t) + \phi(\underline{r}(t)) = \text{áll.}}$
- gradiens: $\underline{F}(\underline{r})$ kiszámítása $\phi(\underline{r})$-ből
  - y, z rögzített
  - összes komponens: $\boxed{\underline{F}(\underline{r}) = -\nabla\phi = -\text{grad}\,\phi} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$
  - közelítő: $\phi(\underline{r}+\underline{h}) \approx \phi(\underline{r}) + (\text{grad}\,\phi)\,\underline{h}$ ← derivált szerepe

    $\Rightarrow$ változás legnagyobb, ha $\underline{h} \parallel \text{grad}\,\phi$
- centrális erőtér: $\underline{F}(|\underline{r}|) \Rightarrow E_{pot}(r)$ pl. grav., Coulomb
  - grad $|\underline{r}| = \underline{n}$ r irányú egys. vekt.
- erővonalak – erő érintő irányba
  - ekvipot. felületre $\perp$ $\Rightarrow$ ekvipot. felület ortogonális trajektóriája

4) pl. ingamozg.

- kényszererő munkája 0 $\Leftarrow \underline{K} \perp \Delta\underline{s} \Rightarrow \int \underline{K}\,d\underline{s} = 0$

  $\Rightarrow$ munkatétel érvényes
- szokásos: polárkoord.

  $E = E_{kin} + E_{pot} =$ áll. $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) \Rightarrow \boxed{l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi}$

  $\Rightarrow$ harmonikus közelítés $\Rightarrow \boxed{l\ddot{\varphi} \approx -g\varphi}$ harm. rezgőmozg.

5) 1D mozgás

- mindig konzervatív $\Rightarrow$ energiamegm. $m\ddot{x} = \underline{F}(x) = -\frac{d\phi}{dx}$ $\forall$ tetsz. $\underline{F}(x)$
- E. megm.: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \phi(x) =$ áll. $\Rightarrow 1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}} \xrightarrow{\int} t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}\,dx$ ← $t(x)$ fv
- potenciálgödör, ábra
- minimum közelében parabola $\Rightarrow$ harm. közelítés

  $\phi(x) \simeq \frac{D^*}{2}(x-x_0)^2 \Rightarrow \underline{F}(x) = -\frac{d\phi}{dx} = -D^*(x-x_0) \Rightarrow \boxed{D^* = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x=x_0}}$

  $\Rightarrow$ energiaminimum környezetében harm. rezgés

6) megpengetett húr

- kérdés: húr frekvenciája $\omega_L = 2\frac{D}{m}$ longitudinális frekv.

  $\omega_T^2 \simeq \omega_L^2\left(1 - \frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}\right)$ transzv. frekv. $\omega_T \sim \sqrt{F}$

9. Gravitációs, tehetetlen és súlyos tömeg, gömbhéj, tömör gömb tere

1) tehetetlen és súlyos tömeg

- tehetetlen tömeg: tehetetlenség mértékét jelzi – adott F erő mekkora gyorsulást okoz
  $F = m_t a$
- súlyos tömeg: kölcsönhatás során mennyire képes vonzani
  mérés: sztatikai tömegméréssel pl. mérleg
- kül. testek súlyainak aránya független a mérés helyétől, de egy test súlya nem
  - $m_s g_F = G$ m_s: testre jell., súlyos tömeg; g_F: helyre jell.; G: konstans
    $m_t a = F$ Newton II
  - ha a testre csak a nehézségi erő hat $\Rightarrow m_t a = m_s g_F \Rightarrow \frac{m_s}{m_t} = \frac{a}{g_F} = \frac{g}{g_F}$ ← g: kísérletileg megh.
  - kérdés: $g/g_F \stackrel{?}{=} 1$
  - probléma, ha a grav. gyors. függ az anyagi minőségtől
    ⇒ Eötvös mérése (19. sz., 8 jegy pontosan ua.)
- matematikai inga esetén:
  $F_{grav} = m_s g$
  $F_{\varphi} = m_t a_{tan}$ $\Rightarrow m_t a_{tan} + m_s g \sin\varphi = 0$
  $\Rightarrow$ kis kitérés: $m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \varphi$ $\Rightarrow$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{m_s}{m_t}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{m_t}{m_s}}$

2) kiterjedt testek grav. tere

- grav. potenciál (nem pot. energia) $\phi(r) = -\gamma \frac{m}{r}$
- pontszerű test ⇒ szuperponálódnak az erők $\Rightarrow \phi'(r) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|r - r_i|}$
- sűrűség bevezetése „elmossuk"
  $\Rightarrow \phi'(r) = -\int \gamma \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV'$ térfogati int.

3) gömbhéjak grav. tere

- gömbön ~ korong –okra $\Delta A = 2\pi R \sin\varphi \, R\Delta\varphi$
  cos-tétel ⇒ r' $\Delta m = \frac{\Delta A}{4\pi R^2} m = \frac{m}{2} \sin\varphi \Delta\varphi$
- $\phi(r)$ potenciál $\phi(r) = -\gamma \int_0^{\pi} \frac{m}{2} \frac{\sin\varphi}{r'} d\varphi = \ldots = -\gamma \frac{m}{2Rr} [R + r - |R - r|]$

$$\Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} -\gamma \frac{m}{r} & \text{ha } r > R \\ -\gamma \frac{m}{R} & \text{ha } r < R \end{cases} \qquad g(r) = \begin{cases} -\gamma \frac{m}{r^2} & \text{ha } r > R \\ 0 & \text{ha } r < R \end{cases}$$ ← árnyék!

4) tömör gömb grav. tere

- gömbhéjakra felosztás
- grav. térerősséggel

$$g(r) = \begin{cases} \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{r^2} & \text{ha } r > R \\ \gamma \frac{4\pi}{3} \rho r & \text{ha } r < R \end{cases}$$

← kívül: mintha egyben lenne a tömeg
← belül: lineárisan nő –ra

- alagút a Földön keresztül
- paradoxonok → térerősség függ a geometriától
  ↳ Olbers
  ↳ entrópia

} feloldás: tágulú világegyetem
stabilitás $1/r^2$-tel elképzelhetetlen

10. Bolygók mozgása

1) fogalmak

- grav. erőtér: $F(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{r}{r}$ ← pontszerű testek
  - centrális erőtér
  - $F = ma$: tehetetlen tömeg és $F = -\gamma\frac{mM}{r^2}\frac{r}{r}$: súlyos tömeg
  - grav. térerősség: $g = F/m$
  - konz. erőtér, mert előáll egy ϕ negatív gradienseként
- potenciál
  - grav. potenciális energia: $\phi = -\gamma\frac{mM}{r}$ ← $-\text{grad}\,\phi = F(r)$
  - grav. potenciál: $u = \phi/m = -\gamma\frac{M}{r}$ ← $-\text{grad}\,u = g(r)$

2) $\dot r$ fv

- konz. erőtér ⇒ síkmozg. ⇒ energiamegm. ⇒ imp.mom. megm. ⇒ területi seb. áll
- energiamegm. $E = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{r} =$ áll.
- imp.mom. megm. ⇒ területi seb. áll. $r^2\dot\varphi := c$
- síkbeli polárkoord. ⇒ $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$
- új ismeretlenek bev. $\mu := \gamma M$ $\quad h := \frac{2E}{m}$ ⇒ $\boxed{h = \dot r^2 + \underbrace{\left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}}_{\phi^*(r)\ \text{effektív potenciál}}}$
- effektív potenciál
  1D-s potenciállal analógia ⇒ pot. gödör ábra
  - $h > 0$ nyílt pálya
  - $h < 0$ zárt pálya

3) $r(\varphi)$ fv

- szükség: $\dot r$ analitikusan nem kiszámolható, ez igen
- $r(\varphi(t)) \Rightarrow \dot r = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = \pm\sqrt{h - \frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$

új ismeretlenek: $A = \frac{\mu}{c}$ és $B = h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2$ és $K(\varphi) := \frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} = A - \frac{c}{r}$

$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{c}{r}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(A - \frac{c}{r}\right) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{c}{r}\right)^2}$$

$$\frac{dK}{d\varphi} = \pm\sqrt{B - K^2} \Rightarrow \boxed{K(\varphi) = \sqrt{B}\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{c^2/\mu}{1 - \varepsilon\cos\varphi}} \quad \text{ahol} \quad \boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}h}}$$

ugyanolyan alak!

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu}$$

4) ellipszis polárkoord. egy.

- ellipszis: két ponttól vett táv. összeg áll. $r + r' = 2d$
- ábra ⇒ cos-tétel ⇒ $r = \frac{\frac{d^2 - c^2}{d}}{d - \frac{c}{d}\cos\varphi}$ ⇒ $\boxed{r = \frac{b^2/d}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}$
- kistengely végpontjában: $b^2 = d^2 - c^2$ és $\varepsilon := c/d$
- nagytengely végpontjában: $2d = 2a \Rightarrow d = a$
- összehasonlítás ⇒ a kapott $r(\varphi)$ fv-t kielégíti az ellipszis egyenlete

$$\frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\gamma M}$$

$$\dot T = \frac{c}{2} = \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow c = \frac{2\pi ab}{T} \Rightarrow \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}}$$

5) Kepler-tvek – összefoglaló

- Kepler II: imp.mom. megm. ⇒ területi seb. ⇒ síkmozg. ← ld. 7. tétel levezetés!
- Kepler I: ellipszis pálya
- Kepler III: $a^3/T^2 =$ áll

11. Gyorsuló koordrszek

1) gyorsuló koordrsz

- $r = r' + \frac{a_0}{2} t^2 \Rightarrow a = a' + a_0 \quad \leftarrow a = \frac{F}{m}$ inerciarsz
  $\Rightarrow m a' = F - m a_0$

2) forgó koordrsz

- először: K inerciarsz és K' forgó koordrsz kpja közös
- $\underline{r} = \hat{O}\,\underline{r}'$ $\quad \hat{O}$: forgatásoperátor $\quad \hat{O}(t)$ időfüggő
- $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{\hat{O}}(t) \cdot \underline{r}'(t) + \hat{O}(t)\,\dot{\underline{r}}'(t) \quad / \cdot \tilde{O}$
  $\tilde{O}\,\underline{v} = \tilde{O}\,\dot{\hat{O}}\;\underline{r}'(t) + \underline{v}' \quad \leftarrow \hat{O} \cdot \tilde{O} = \hat{1}$
- új operátor: $\hat{\Omega} := \tilde{O} \cdot \dot{\hat{O}}$
  $\hat{O}\,\tilde{O} = \hat{1} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{O}\cdot\tilde{O}) = 0 \Rightarrow \tilde{\hat{\Omega}} + \hat{\Omega} = 0 \Rightarrow \hat{\Omega}$: antiszimm. mx 3x3

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\boxed{\hat{\Omega}\,\underline{r} = \underline{\omega} \times \underline{r}}$$

- inerciarszbeli seb. forgó koordrszbeli adatokkal leírva:
  $\tilde{O}\,\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}' + \underline{v}'$

- gyorsulás
  új operáció $\frac{d'}{dt} \dots = \underline{\omega} \times \dots + \frac{d}{dt} \dots$ inerciarszbeli derivált
  $\underline{a} = (\dots) \cdot \underline{v} = \dots = \underline{a}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + 2(\underline{\omega} \times \underline{v}') + \beta \times \underline{r}' \quad \leftarrow \beta = \frac{d}{dt}\omega$
  $\Rightarrow m\underline{a} = \underline{F} \underbrace{- m a_0}_{\text{koordrsz. gyorsulása}} + \underbrace{m\omega^2 \underline{s}}_{F_{cf}} + \underbrace{2m(\underline{v} \times \underline{\omega})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m(\underline{r} \times \beta)}_{\text{Euler}} \quad \leftarrow$ 4 tehetetlenségi erő

  centrifugális erő: $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$ kétszeres vektorszorzat
  $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}) = \omega^2 \underline{r} - (\underline{\omega}\,\underline{r})\,\underline{\omega} = -m\omega^2 \underline{s} \quad \leftarrow$ ábra, $\underline{s} = (\underline{r}$ vetülete $\underline{\omega}$-n$) - \underline{r}$

+ inga?

12. Szabadesés a forgó Földön

1) koordsz, vektorok

- derékszögű koordsz: x - hossz. körön ; y - széless. körön ; z - sugárirányú
- forgó koordsz => $m\underline{a} = m\underline{g} + m\omega^2 \underline{s} + 2m\underline{v} \times \underline{\omega}$
- vektorok komponensei: g, a, v $\quad \underline{\omega}(-\omega\cos\varphi, 0, \omega\sin\varphi)$ => $\underline{v} \times \underline{\omega}$

2) mozgásegyenletek

- $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$
- $\ddot{y}$ bevezetése => $\ddot{v}_y = -4\omega^2 v_y + 2g\omega\cos\varphi$ ← harmadfokú diffegy => 3 kezdőfelt.
- mo.: $v_y = A\cos(2\omega t + \varphi) + B$ => $a_y = \dot{v}_y$ és $\ddot{v}_y$
- $\varphi = ?$ ← kezdetben minden irányú sebesség 0 => $a_y(0) = 0$ => $\varphi = 0$
- $B = ?$ ← $\ddot{v}_y = \ldots$ behelyett. => $B = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$
- $A = ?$ ← $v_y(0) = 0$ => $A = 1$
- $v_y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}(1 - \cos(2\omega t)) \xrightarrow{\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}} v_y = g\cos\varphi\, \omega t^2$

  => $y = \frac{g\cos\varphi\, \omega}{3} t^3$

  $z = h - g/2\, t^2$ ← szabadesés

  $x = 0$ $\quad$ } ω^2 elhanyagolható

- a jelenség alkalmatlan a Föld forgásának kimutatására

13. Foucault-kísérlet

- 1850's ← kérdés: inerciarsz vagyunk-e
- inga => kötélerő (kötélirányú) ← $m\underline{a} = m\underline{g} + 2m(\underline{v}\times\underline{\omega}) + K$
- geometria => $l = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow z \approx -l \Rightarrow \dot{z}=0,\ \ddot{z}=0,\ \dot{y}\approx 0$
- mozgásegyenletek: ld. 12 tétel $+\lambda\cdot$(komponens) λ: kötélerő nagysága
- kötélerő nagysága: $\lambda = -g/l$ ← $\ddot{z}$-ből
- => $\ddot{x}$ és $\ddot{y}$ (z-s tagok eltüntetése) ← $\omega_1 := \omega \sin\varphi$

$\ddot{x}\ /\ -1 = ii \qquad \ddot{y}\ /\cdot i$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\ddot{x} + i\,2\omega_1 i\dot{y} + \tfrac{g}{l}x = 0 \\ &i\ddot{y} + i\,2\omega_1\dot{x} + \tfrac{g}{l}iy = 0 \end{aligned}\right\}\ z := x+iy \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + 2\omega_1 i\dot{z} + \tfrac{g}{l}z = 0}$$

- próbafv. $z = Ae^{i\lambda t}$ alak

visszahelyett.: $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}} \approx -\omega_1 \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$ ↙ $\frac{g}{l} \gg \omega_1$

$\Rightarrow z = e^{-i\omega_1 t}\left(A_1 e^{i\sqrt{g/l}\,t} + A_2 e^{-i\sqrt{g/l}\,t}\right)$ kinrank

- kezdőfelt.
  - $z(0) = a \Rightarrow x(0) = a \quad y(0) = 0$
    $\dot{z}(0) = 0$ ← kezdetben áll
  - $z(0) = a = A_1 + A_2$
  - $\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow A_1 - A_2 = \dfrac{-\omega_1 a}{\sqrt{g/l}}$ $\Big\}$ ⊕ és ⊖ $\Rightarrow A_1$ és A_2

$$\Rightarrow z = a e^{-i\omega_1 t}\left[\left(1+\frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right)\frac{e^{i\sqrt{g/l}\,t}}{2} + \left(1-\frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right)\frac{e^{-i\sqrt{g/l}\,t}}{2}\right] =$$

$$= a e^{-i\omega_1 t}\left[\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right) + i\frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)\right]$$

=> nagyon elnyúlt ellipszis forog

14. Kéttest - probléma

1) Kéttest - probléma

- testek közti kölcsönhatás csak a relatív távolságtól függ
- $m_1 a_1 = F_{21}(r_1 - r_2)$ és $m_2 a_2 = -F_{21}(r_1 - r_2)$
- $\Rightarrow m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$

  $\Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2) = 0 \Rightarrow$ összimpulzus áll.

  $\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(m_1 r_1 + m_2 r_2) = 0 \Rightarrow$ az elő linearis fve
- kp def.: $r_0 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$

  kp gyorsulása 0 $\Rightarrow M \ddot{r}_0 = 0$
- mozgásegyenletek $\ominus \Rightarrow \ddot{r}_1 - \ddot{r}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F_{12}(r_1 - r_2)$
- redukált tömeg m_*
- relatív koord.: $r = r_1 - r_2 \longrightarrow m_* \ddot{r} = F_{12}(r)$ egytest - prob.
- bolygómozg.: $m_* \ddot{r} = F_g \Rightarrow \ddot{r} = \frac{m+M}{r^2} \frac{r}{r} \Rightarrow (m+M)$!

2) rakétamozgás

- üzemanyag: u, Δm
- impulzusmegm.: $m \Delta v + \Delta m u = 0 \leftarrow \oplus$ mert Δm neg. a rakéta szempontjából

  $\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m} \Rightarrow v(m) = \int_{m_0}^{m} -\frac{u}{m}\, dm = \boxed{u \ln \frac{m_0}{m} = v(m)}$ Tsiolkovsky

15. Pontrendszerek törvényei

1) általános

- N db tömegpont $\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m\ddot{r}_i = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{i,j} K_{ij}}$

$F_i^{(k)}$ - külső erő
K_{ij} - kölcsönhatás j. hat az i.-re

- mozgásegyenlet független a belső erőktől:

$$\sum_{i,j} K_{ij} \xrightarrow[\text{csere}]{\text{index-}} \sum_{j,i} K_{ji} \xrightarrow[\text{Newton III}]{} -\sum_{i,j} K_{ij} \Rightarrow \sum_{i,j} K_{ij} = 0$$

- rendszer összimpulzusa: $\sum m_i \dot{r}_i = P \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} P = \sum_i F_i^{(k)}}$
  - $\Rightarrow$ ha $\emptyset$ külső erő, megmarad
- tömegkp.: $r_0 = \frac{\sum_i m_i r_i}{M}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i r_i\right) = \sum_i F_i^{(k)} \Rightarrow \boxed{M\ddot{r}_0 = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(k)}}$$

2) impulzusmomentum

- mozgásegyenlet elölről vekt. szorozva r_i-vel:

$$r_i \times m_i \ddot{r}_i = r_i \times F_i^{(k)} + \sum r_i \times K_{ij}$$

- imp.mom. deriváltja = forg. nyom.

$$r \times m\ddot{r} = \frac{dN}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dt} = \sum M_i^{(k)}} + \underbrace{\sum r_i \times K_{ij}}_{\text{0 ha belső erők centrálisak}}$$

indexcsere Newton III $\Rightarrow \frac{1}{2}\sum (r_i - r_j)\times K_{ij}$

- tkp-i koordrsz.: $r_i = r_0 + \varrho_i$ és v_i

$$\Rightarrow N = \sum r_i \times m_i v_i = \ldots = \underbrace{M r_0 \times v_0}_{\text{pályaimp.m.}} + \underbrace{\sum \varrho_i \times m_i \dot{\varrho}_i}_{\text{sajátimp.m.}} + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N = M(r_0 \times v_0) + N_s} \leftarrow \boxed{N_s = \sum_i \varrho_i \times m_i \dot{\varrho}_i}$$

- visszahelyett. forgatónyom. egyenletbe:

$$\frac{d}{dt}(M r_0 \times \dot{r}_0) + \frac{dN_s}{dt} = \sum_i (r_0 + \varrho_i)\times F_i^{(k)} \xrightarrow[\text{kiesnek}]{\text{tagok}} \boxed{\frac{dN_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times F_i^{(k)}}$$

$\Rightarrow$ tehetetlenségi erők összforgatónyomatéka 0

3) kinetikus energia

- mozgásegyenlet skalárisan szorozva v_i-vel

$$m_i v_i \ddot{r}_i = v_i F_i^{(k)} + \sum_{i,j} v_i K_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E_{kin} = \sum_i P_i + \sum_{i,j} v_i K_{ij}$$

P_i - teljesítmény

$$\int \Rightarrow \boxed{\Delta E_{kin} = W^{(k)} + W^{(b)}} \leftarrow \text{külső, belső erők munkája}$$

- belső és külső erők konzervatívak ($\Rightarrow$ összpot. def.)

$$E = E_{kin} + \sum_i \varphi_i^{(k)}(r_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \varphi_{ij}^{(b)}(r_i, r_j)$$

- merev test esetén belső erők munkája 0 (kényszererők) $\Rightarrow \emptyset$ utolsó tag

és $E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(v_0 + \dot{\varrho})^2 = \frac{M}{2} v_0^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\varrho}_i^2 + 0$

16. Rugalmas ütközések

1) egyenletek

- szórási kísérlet ← kezdő- és végállapot ismert, mi történt közben?
- imp. megm.
  energiamegm. ← kölcsönhatás konzervatív ⇒ $E_{kin,1}+E_{kin,2}+\Phi_{12}$ } 6 egyenlet, 4 param. rögzített
  ⇒ elég nagy messze vannak ⇒ $\Phi_{12}=0$
- tkpi rszben:
  - $r_0 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1+m_2}$ $\quad v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}$
  - sebesség: $v_1' = v_1 - v_0 = \dots$
  - impulzus: $p_1' = m_1 v_1' = m_* (v_1 - v_2)$
    tkpi rszben összimp. 0 ⇒ $p_2' = -p_1'$
- energiamegm. impulzusokkal ⇒ $p_1'^{(i)2} = p_1'^{(f)2}$
  ⇒ $|p_1'^{(i)}| = |p_1'^{(f)}| = m_*|v_1^{(i)} - v_2^{(i)}| = |p_2'^{(i)}| = |p_2'^{(f)}|$
  ⇒ kimenő imp.: $p_1'^{(f)} = |p_1'^{(i)}| n$ $\quad$ n: egységvektor, csak a szög változik
- laborrendszerbe visszatérve:
  - $v_1^{(f)} = v_1'^{(f)} + v_0$ és $v_2^{(f)}$
  - $p_1^{(f)} = m_1 v_1$ és $p_2^{(f)}$ $\quad$ $p_1^{(f)} = m^*|v_1^{(i)} - v_2^{(i)}| n + \frac{m_1}{m_1+m_2}(p_1^{(i)}+p_2^{(i)})$

2) ütközési diagram

- kör ← sugár: $m^*|v_1^{(i)} - v_2^{(i)}|$ ⇒ sugár · n vektor
- A és B pont: $\vec{OA}$ és $\vec{BO}$ $\quad$ $p_1^{(f)}$ és $p_2^{(f)}$ második tagja
  ⇒ $p_1^{(f)}$ és $p_2^{(f)}$ vektorösszeget
- álló tárgyra lőve $p_2^{(i)}=0$
  - ⇒ $\vec{OA}$ vége a körön
    ⇒ $\vec{BO} = m_1/m_2 \, \vec{OA}$
  - esetek tömegarány szerint
    - $m_1<m_2$ ⇒ B körön belül ⇒ van visszaszórás
    - $m_1=m_2$ ⇒ B a körön ⇒ végső impulzusok ⊥
    - $m_1>m_2$ ⇒ B körön kívül ⇒ határszög
- ütközési paraméter:
  m_2 és v_1 egyenesének távolsága

17. Merev testek mozgása

1) bevezetés

- merev test: pontok távolsága áll.
- belső erők: kényszererők => összmunka 0
- pozíció: 3 pont, de távolságuk fix => $3\times3-3=6$ egyenlet
- alapegyenletek: $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i^{(k)}$
  $\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_i \underline{M}_i^{(k)}$
- mozgás leírása: kitüntett pont elmozd. és elford.
  $\Delta\underline{r} = \Delta\underline{r}_0 + \Delta\underline{\varphi}\times(\underline{r}-\underline{r}_0)$
  $\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega}\times(\underline{r}-\underline{r}_0)$ ← tetszőleges pont sebessége 6 adattal $\underline{v}_0$ és $\underline{\omega}$
- szögseb. vektor független a kitüntetett ponttól ← $\underline{v}$ ua kell legyen

2) sajátimp.mom., $\hat{\Theta}$ tenzor

- tkp-i vsz: $\underline{r}_0 = 0$ és $\dot{\underline{s}}_i = \underline{\omega}\times\underline{s}_i$
- sajátimp.mom.: $\underline{N}_S = \sum_i \underline{s}_i \times m_i \dot{\underline{s}}_i = \sum_i \underline{s}_i \times (m_i \underline{\omega}\times\underline{s}_i)$
  $\underline{\omega}$ lineáris fv => $\hat{\Theta}\underline{\omega}$
  kettős vektorszorzat => skalár és diadikus szorz.
  => $\underline{N}_S = \left(\sum_i m_i\left((\underline{s}_i\underline{s}_i)\hat{1} - (\underline{s}_i \circ \underline{s}_i)\right)\right)\underline{\omega}$
- $\hat{\Theta}$ tenzor: $(\dots)$ szimm. mx. => valós saj.ért.
  diag. elemek ≥ 0 => saj.ért.ek ≥ 0
  => bármilyen $\underline{a}$-ra $\underline{a}\hat{\Theta}\underline{a} \geq 0$ pozitív definit

3) kinetikus energia, hatásvonal

- belső erők összmunkája 0 => $E_{kin} = \frac{1}{2}M\underline{v}_0^2 + \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\underline{s}}_i^2$ és $\dot{\underline{s}}_i = \underline{\omega}\times\underline{s}_i$
  hármasszorzat - ciкl. perm.
=> forgási energia: $E_f = \frac{1}{2}\underline{N}_S\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\hat{\Theta}\underline{\omega} \geq 0$
- erő hatásvonal mentén eltolva => forg.nyom. ua.

4) eredő erő

- keressük: eredő erő ($\underline{F}$) és pont, ahol hat ($\underline{r}_0$)
- $\underline{M} = \underline{r}_0 \times \underline{F}$ $/\cdot\underline{F}$ => $\underline{M}\cdot\underline{F} = 0$ ← csak, ha $\underline{M} \perp \underline{F}$
- grav. erőtérben:
  - erő: $\underline{G} = \sum_i m_i\underline{g} = M\underline{g}$
  - forg.nyom.: $\underline{M} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i\underline{g} = \underline{r}_0 \times \underline{G}$ => súlypont $\underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{M}$
    ha $\underline{g}$ = áll. (homogén erőtér)
    => egybeesik: tkp

18. Merev test rögzített tengely körüli forgása és síkmozgása

1a) tengely körüli forgás - alapok

- alapegyenletek: $\boxed{M\ddot{x}_0 = \sum_i F_i^{(k)}}$ és $\boxed{\frac{dN}{dt} = \sum_i M_i^{(k)}}$
- tengely rögzített => φ -vel leírható => 1 egyenlet, a többi a kényszererőket írja le

$$\frac{dN_3}{dt} = \left(\sum_i M_i^{(k)}\right)_3$$

kényszererők forgatónyomaték-nak $\varnothing$ $\hat{e}(3)$ irányú komp.

- tetszőleges pont sebessége: $v = \omega \times r + \cancel{v_0}$ ← 0, ha koordsz tengelyhez rögz.
- imp. mom.: $N = \sum_i m_i r_i \times (\omega \times r_i) = \hat{\Theta}^* \omega$

$$\Theta_{33}^* = \sum_i m_i (\underbrace{x_i^2 + y_i^2}_{\varrho_i \text{ - tengelytől vett távolság}}) = \text{áll.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Theta_{33}^* \omega \quad \Rightarrow \frac{dN_3}{dt} = \boxed{M_3(\varphi) = \Theta_{33}^* \beta}$$

1b) fizikai inga

- merev test grav erőtérben forog fix tengely körül
- Θ: súlypontban φ: tengely és súlypont ∢ függőleges

$$M(\varphi) = -Gs\sin\varphi = \Theta_{33}\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{Gs}{\Theta_{33}}\sin\varphi \overset{\text{kis szög}}{\approx} -\frac{Gs}{\Theta_{33}}\varphi$$

1c) Steiner-tétel

- Θ_{33}^* tképi rszben ← behelyett.: $r = S + s$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{33}^* = \Theta_{33} + Ms^2} + 0$$

- fordítva: dfjuwa a testet -> elforgatott koordsz

$u\,\hat{\Theta}\,u$ $\quad u$: egységvekt., tengellyel párh.

2) síkmozg.

- alapegyenletek => 6
- 2 pont rögz. síkon => $2\times2-1=3$ koord (mert fix táv.)
- kényszererő: felületre merőleges => $\varnothing$ sík irányú komp.
  => forg. nyom.: $\varnothing$ z irányú komp.

$$\Rightarrow M\ddot{x}_0 = \left(\sum_i F_i^{(k)}\right)_x \text{ és } y\text{-ra}$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \sum_i M_i^{(k)}$$

- súlyponti rszben:
  - $\frac{dN_{S3}}{dt} = \sum_i M_i^{(k)}$
  - $\omega = (0, 0, \omega)$
  - $N_{S3} = \hat{\Theta}_{33}\omega$

$$\Bigg\} \quad \boxed{\hat{\Theta}_{33}\beta = \left(\sum_i M_i^{(k)}\right)_z}$$

3) Lejtő

- súlypont mozgása: $ma = mg\sin\alpha - s$
- külső erők forg.ny.: $\Theta_{33}\beta = Rs$
- tiszta gördülés: $\beta R = a$

$\Big\} \Rightarrow a$

19. Rögzített pont körüli forgás

1) Euler-féle pörgettyűegyenletek

- 6 adatból 3 rögzített => 3 egyenlet
- tengelyhez rögzített koordsz.: inerciarsz., de $\hat{\Theta}(t)$ időfüggő
  testhez rögzített koordsz.: gyorsuló, de $\hat{\Theta}$ = áll.
- $\frac{dN'}{dt} = \boxed{M' = \frac{dN}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N}}$ és $\underline{N} = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}$

  $\Rightarrow \boxed{\hat{\Theta}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times (\hat{\Theta}\,\underline{\omega}) = \underline{M}'}$

- forgó koordsz. irányai legyenek a sajátirányok => $\hat{\Theta}$: csak diagonális
- $(\underline{\omega} \times \hat{\Theta}\,\underline{\omega}) = \ldots$
- => Euler-féle pörgettyűegy. $\underline{M}_1' = \Theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2)$ és $\underline{M}_2', \underline{M}_3'$

2) erőmentes pörgettyű

- alátámasztási pont a súlypontban => $\underline{M} = 0$ => $\underline{N}$ = áll.
  => E_{kin} = áll.
- szimmetrikus pörgettyű
  => két sajátért. megegyezik $\Theta_1 = \Theta_2$
  => pörgettyűegyenletek => $\omega_1^2 + \omega_2^2$ = áll. => $|\underline{\omega}|$ = áll.
- nutációs kúp: a forgástengely $\underline{N}$ körül
  ötvöződik: $\underline{\omega}$ $\underline{N}$ körül és $\underline{\omega}$ c körül
- megpörgetett test <- súlyos pörgettyű
  - gyors pörgetés => $\underline{N} \hat{\parallel}$ c forgástengely => $\underline{N}\underline{M} \approx 0$
    $N \frac{dN}{dt} = \underline{N}\,\underline{M}$ => $N^2 \approx$ áll.
  - z irányú $M_z = 0$ => N_z = áll.
  - $\underline{N}$ és $\underline{N}_z$ áll. => precesszió
- Föld: nem erőmentes, mert inhom. grav. erőtér

3) szabad tengely stabilitása

- pörgettyű egyenletek <- $\underline{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ triviális mo. és $M_1 = M_2 = M_3 = 0$
- pici kitérítés => $\underline{\omega} = (\delta\omega_1, \delta\omega_2, \omega_0 + \delta\omega_3)$
- behelyett. pörg. egyenletekbe => két egyenlet és elsőrendben $\delta\omega_3$ = áll.
- két egyenlet mo.: $\begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
  => visszahelyett.
  => $\begin{pmatrix} \lambda\Theta_1 & \omega_0(\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0(\Theta_1 - \Theta_3) & \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$ → triviális: $\lambda = 0$
  ↳ nemtriv. létezik, ha det = 0

  det: $\lambda^2 = \frac{\omega_0^2 (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3)}{\Theta_1 \Theta_2}$
  ↳ számláló poz. => labilis egyensúly
  ↳ számláló neg. => λ tisztán képzetes
  - A_{1+} és A_{1-} egymás kompx konj. => valós eredmény
    => stabil egy. súly, z tengely körül harm. rezgőmozg.
  - számláló neg.
    ↳ Θ_3 a legnagyobb <- stabil V
    ↳ Θ_3 a legkisebb <- lineáris stabilitás M