KINEMATIKA

← mozgások leírása
hol van és mikor

- dimenziók: $\underset{\text{tér}}{3} + \underset{\text{idő}}{1}$ 3 tér $(x, y, z) = \underline{r}$ számhármas ⇒ műveletek

- $\underline{r}_1 + \underline{r}_2 = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2, \; z_1 + z_2)$

  $\lambda \underline{r} = (\lambda x_1, \; \lambda y, \; \lambda z)$

  $|\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

össze kell adni:
az idő nem fejlik
törvényesen függetlenül
a helytől (rel. elmélet)
de klassz. mech.: független

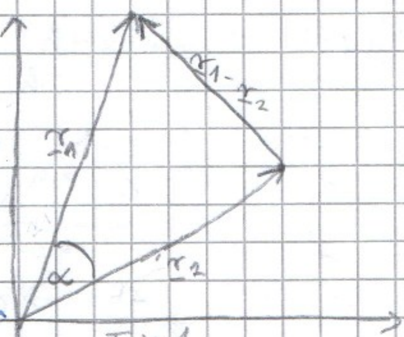


Fig 1

- $|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 =$

$$= \underbrace{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}_{|\underline{r}_1|^2} + \underbrace{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}_{|\underline{r}_2|^2} - 2\underbrace{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)}_{\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2}$$

$$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 = |\underline{r}_1|^2 + |\underline{r}_2|^2 - 2\, \underline{r}_1 \underline{r}_2$$

$$\text{Fig 1} \Rightarrow |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 = |\underline{r}_1|^2 + |\underline{r}_2|^2 - 2 |\underline{r}_1| |\underline{r}_2| \cos\alpha$$

skaláris szorzat
$\boxed{\underline{r}_1 \underline{r}_2 = |\underline{r}_1| |\underline{r}_2| \cos\alpha}$

- kinematika: $\underline{r}(t)$ fv

09.11. ~~kedd~~ szo − 3. óra

- $\underline{r}(t)$ fv → leszármaztatunk belőle alapfogalmakat

$$\frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}; \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}; \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right)$$

$$\boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\dot{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}$$

$$\boxed{\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})}$$

magasabb derivált
nem fordul elő a mozgásegyenletekben

szabadesés

- ha $\underline{a} = (0, 0, -g) \leftarrow \underline{v}(t) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} - gt)$ konstansok
  $\underline{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$

$$\underline{r}(t) = \left(x_0 + v_{x0} t, \; y_0 + v_{y0} t, \; z_0 + v_{z0} t - \frac{g}{2} t^2\right)$$

ismerjük "$\underline{a}$"-t ← még 6 konstans kell $\underline{r}$ meghatározásához
csak a 2. deriváltat ~~ismerjük~~ adott → 6 paramétert befolyásolhatunk

pontosan 6 paraméter - kísérleti tapasztalat
a mozgást kormányzó egyenletnek ⇒
azért kell diffegyenletnek lennie,
hogy megleggyenek ezek a szabad
paraméterek

a mérési
zajt a
deriválás
felerősíti

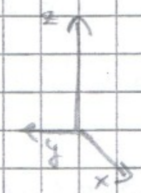
pálya: $y(x)$ vagy $z(x)$

parabola
érintője
mindig $x/2$-ben
metszi
az x tengelyt

(K) versenyszkóp
- Szabadesés
- ferde hajítás
- harmonikus rezgőmozgás

ferde hajítás

$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \qquad v_{y0} = 0$



$$\underline{r}(t) = (\underbrace{v_{x0}t}_{x},\ 0,\ \underbrace{v_{z0}t - \tfrac{g}{2}t^2}_{z})$$

$\Downarrow t = x/v_{x0}$

$$\boxed{z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2}$$ pályaegyenlet, parabola

harmonikus rezgőmozgás

$a = -\omega_0^2 x \quad \leftarrow \omega_0^2 \leftarrow$ mert poz. számot akarunk és $a \sim -\mathrm{const}\, x$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$v(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,\omega_0 = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$a(t) = A\omega_0(-\sin(\omega_0 t + \varphi))\,\omega_0 = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$$

két adat szabadon meghatározható a függőleges rugón lévő súly esetében $\leftarrow$ ezek a kezdeti feltételek $\leftarrow A$ és φ

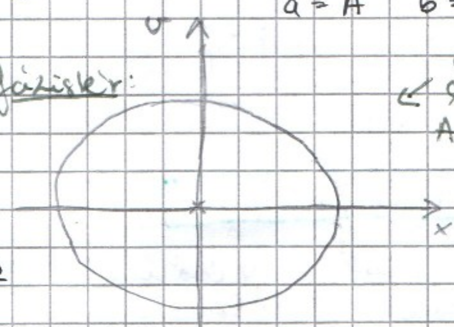
$x(0) = A\sin\varphi$
$v(0) = A\omega_0\cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{A} &= \sin(\omega_0 t + \varphi)\\ \frac{v}{A\omega_0} &= \cos(\omega_0 t + \varphi)\end{aligned}\right\}\quad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega_0}\right)^2 = 1$$

$\leftarrow$ ellipszis (origó kp-ú) $a = A \quad b = A\omega_0$

fázistér:

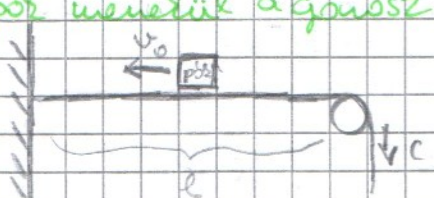
1D mozg. $\Rightarrow$ 2D
3D mozg $\Rightarrow$ 6D



$\leftarrow$ a helyzet kezdetben A, φ kf-ektől függ

kezdetben meghatározzuk: v_0 és x_0
tetszőleges pont a $v(x)$ síkban $\leftarrow$ kezdőkez
~~$\Rightarrow$ egyértelmű az ellipszis~~

(?) pók menekül a gonosz manótól, aki c sebességgel húzza a gumit, amin ő van



$v_{gumi}(x) = \frac{x}{l}c$

$v_{pók}(x) = \frac{x}{l}c - v_0 \qquad \leftarrow$ földhöz képest

$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{l}c - v_0 \qquad \leftarrow$ fv arányos a deriváltjával $\Rightarrow$ exp fv lehet csak

$x(t) = Ae^{\lambda t} + B$

$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda t}$

$\lambda A e^{\lambda t} = \frac{c}{l}\left[Ae^{\lambda t} + B\right] - v_0 = \frac{c}{l}Ae^{\lambda t} + \frac{c}{l}B - v_0$

$\Downarrow$

$\lambda = \frac{c}{l}$ és $\frac{c}{l}B = v_0 \Rightarrow B = \frac{l}{c}v_0$

kezdeti helyzet:

$x(0) = x_0$

$x_0 = A + \frac{l}{c}v_0$

$\boxed{A = x_0 - \frac{l}{c}v_0}$

$\longrightarrow \boxed{x(t) = Ae^{\frac{c}{l}t} + l/c\, v_0} \leftarrow$ 'A' szabad paraméter

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{l}{c}v_0\right)e^{\frac{c}{l}t} + \frac{l}{c}v_0$$

ha $x_0 < \frac{l}{c}v_0 \rightarrow x(T) = 0$ ✓

ha $x_0 > \frac{l}{c}v_0 \rightarrow x(T) = l$ ✗

$\Leftarrow$ ahhoz, hogy elérje a falat, $\therefore$ első tag negatív
$e^{c/l \cdot t} > 0 \Rightarrow x_0 - \frac{l}{c}v_0 < 0 \Rightarrow x_0 < \frac{l}{c}v_0$

ha $x_0 < \frac{\ell}{c} v_0$ $\rightarrow x(T) = 0$ megmenekül

ha $x_0 > \frac{\ell}{c} v_0$ $\rightarrow x(T) = \ell$

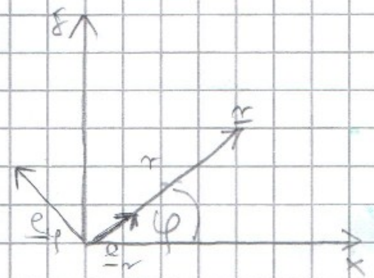
$\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{c}{\ell} x_0}_{v_{gumi}} < v_0$ ha az eredő sebesség kezdetben a fal felé mutat, megmenekül (eléri $x=0$-t)

[v-t vizsgáltuk + 1. derivált $\Rightarrow$ 1 paraméter (x_0)]

Más koordinátarendszerek

2019.09.23. hét 4. ea

Polárkoordináták (síkbeli)



$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) &= r(t)\sin(\varphi(t)) \end{aligned}}$$ } síkbeli leírás

$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$ $\qquad x^2 + y^2 = r^2$

egységvektor: $\underline{e}_r$ $\quad \underline{r}$ irányába mutat $\quad \underline{r} = r\,\underline{e}_r$

$\boxed{\underline{e}_r = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))}$ koordináták

- $\boxed{\underline{r} = r \cdot \underline{e}_r}$

- $\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r \cdot \dot{\underline{e}}_r =$
  $= \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$

$\dot{\underline{e}}_r$ – koordinátáit deriváljuk

$\dot{\underline{e}}_r = (-\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}, \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}) =$
$= \dot{\varphi}\,\underbrace{(-\sin\varphi, \cos\varphi)}_{\text{egységvektor}} = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$

ami $\perp$ $\underline{e}_r$-re! = $\boxed{\underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)}$

$\underline{e}_\varphi \perp \underline{e}_r$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi}$$

$\uparrow$ r irányú komponens $\qquad \uparrow$ φ irányú komponens $\perp r$

- $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\,\underline{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,\dot{\underline{e}}_\varphi =$

$\dot{\underline{e}}_\varphi = (-\dot{\varphi}\cos\varphi, -\dot{\varphi}\sin\varphi) \Rightarrow$
$\boxed{\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\underline{e}_r}$

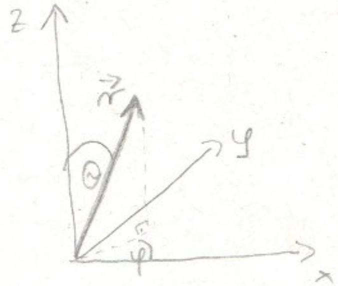
$= \ddot{r}\,\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\underline{e}_r$

$$\boxed{\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\underline{e}_\varphi}$$ $\leftarrow$ $\underline{e}_r$ és $\underline{e}_\varphi$ irányú komponens

- $\dot{\varphi} = \omega$
  $\ddot{\varphi} = \beta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \underline{v} &= \dot{r}\,\underline{e}_r + r\omega\,\underline{e}_\varphi \\ \underline{a} &= (\ddot{r} - r\omega^2)\,\underline{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\beta)\,\underline{e}_\varphi \end{aligned}}$

szögsebesség – ω
szöggyorsulás – β

Térbeli polár koord.



r - vektor hossza

θ - a z tengellyel bezárt szög

φ - a vektor x-y síkban vett vetületének az x tengellyel bezárt szöge

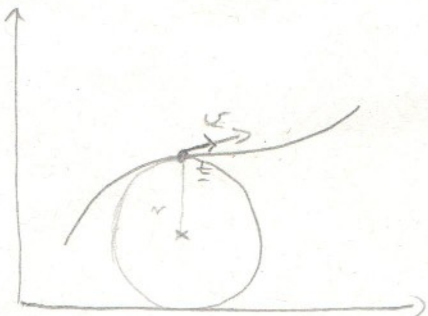
$x = r \cos\varphi \sin\theta$

$y = r \sin\varphi \sin\theta$

$z = r \cos\theta$

Hengerkoord.

Simuló kör (kísérő?)



sebesség: pályagörbe érintőjében

$\underline{t}$ - (tangens) egységvektor

$\underline{v} = v\,\underline{t}$

gyorsulás:

$\underline{\dot v} = \dot v\,\underline{t} + v\,\underline{\dot t}$ ← mekkora $\underline{\dot t}$?

adott pillanatban:
körmozgást végez
simuló körön ← 3 pontra egyértelműen illeszthető kör, közelítjük a két szélsőt

⇓

$\underline{t} = \underline{e}_\varphi$

$\underline{\dot t} = \underline{\dot e}_\varphi = -\dot\varphi\,\underline{e}_r = \dot\varphi\,\underline{n}$

görbe paraméterezése nem egyértelmű
de az ~~görbület~~ érintő egységvektora
és a görbületi sugara ettől független

$\underline{a} = \underline{\dot v} = \dot v\,\underline{t} + v\dot\varphi\,\underline{n} \Rightarrow \dot\varphi = \frac{v}{R}$

$$\boxed{\underline{a} = \underbrace{\dot v\,\underline{t}}_{\text{tangenc. komponens}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\,\underline{n}}_{\text{radiális komponens}}}$$

R - simuló kör sugara

feltétel, ← hogy mekkora erővel a pályán tartáshoz pl. hullámvasút

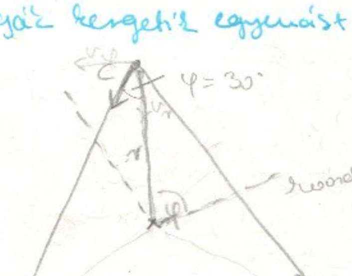
$\underline{e}_r$ - kifelé mutató egységvektor

$\underline{n} = -\underline{e}_r$ befelé mutató

$\underline{e}_\varphi$ - tangenciális egységvektor

$\underline{b} = \underline{v} \times \underline{n}$ binormális

(f) csigák kergetik egymást szabályos Δ-ben



mindig szabályos Δ-ben maradnak
az egyenlő oldalú Δ forog és zsugorodik

polárkoordináták?

$\vec c$ $\vec r$-ral mindig 30°-ot zár be

$\Rightarrow \vec c$ $\vec r$ irányú és φ irányú komponense konstans!

$v_r = -c \cdot \cos 30° = \dot r = \text{const}$

$v_\varphi = c \cdot \sin 30° = r\dot\varphi = \text{const}$

} $r(t)$ egyenest keressük olyan fv-t, melynek deriváltja const => lineáris fv

$r(t) = r_0 - \overbrace{c\cos(30°)}^{v_r} \cdot t$

találkozási időpont: $r(T) = 0$

$r_0 = c \cos 30°\, T \Rightarrow \boxed{T = \frac{r_0}{c\cos 30°}}$

+ mekkora szögelfordulás után találkoznak

$\overset{v_\varphi}{c\cdot\sin 30^\circ} = \overset{r\cdot\dot\varphi}{\left(r_0 - c\cos(30^\circ)t\right)\dot\varphi}$ $\dot\varphi$ - szögsebesség

$\dot\varphi = \dfrac{c\cdot\sin 30^\circ}{r_0 - c\cos(30^\circ)\,t}$ $\Big\}\ \varphi(t) = ?$

$\varphi = \displaystyle\int_0^t \frac{c\cdot\sin 30^\circ}{r_0 - c\cos(30^\circ)t}\,dt + \varphi_0$ ← szabad const

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)\Big|_{x_0}^{x} = \ln(x) - \ln(x_0) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$

keressük ezt az integrált:

$\dfrac{d}{dt}\ln\left(r_0 - c\cos(30^\circ)t\right) = -\dfrac{c\cos 30^\circ}{r_0 - \cos(30^\circ)\,t}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\,-\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\ln\left(r_0 - c\cdot\cos(30^\circ)t\right) = \dfrac{c\sin 30^\circ}{r_0 - c\cos 30^\circ\cdot t}$

$\varphi(t) = -tg(30^\circ)\ln(\underbrace{r_0 - c\cos(30^\circ)\,t}_{r})\Big|_{r_0}^{r} = -tg\,30^\circ\left[\ln r - \ln r_0\right]$

$\varphi = tg(30^\circ)\ln\left(\dfrac{r_0}{r}\right)$ ← $r(t) = r_0 - c\cos 30^\circ\, t$

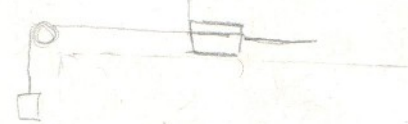
a kp felé lineárisan közeledik
φ - elfordulási szög
} logaritmikus spirál

szögelfordulás, mikor találkoznak (pontkiterjedés): ∞ sok ideig fordulnak el, de véges idő alatt találkoznak [φ képletben $r=0$ osztó!]

ha van kiterjedésük, már értelmes $\varphi \neq \infty$
a szög érzékeny a testek kiterjedésére, az idő nem

(k) kiskocsit súly húzza

09.24.
5.ea



8

DINAMIKA ← kérdés: mozgás oka

okok feltárása ⇒ mozgásegyenlet felírása
(mozgásegyenlet: az egyenlet, ami leírja a tényleges mozgást)

Newton-axiómák / dinamika alaptvei

1) axióma: észetrendszer ← testek, amelyektől nem léphetünk ki (ha mégis → rossz!)
- kell koordrsz! – bármelyiket használhatjuk, de vannak egyszerűbbek
- axiómák nem minden koordrsz-ben igazak ←

de létezik olyan koordrsz, melyben a magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez ← inerciarsz – koordrsz lehet inerciarsz kiz. -ség szempontjától, pl. $v \approx c$ másikban nem

absztrakt fogalom, méréssel lehet igazolni

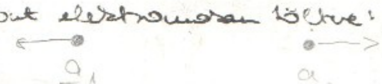
2) $\underline{F} = m\underline{a} \Rightarrow \underline{f} = \underline{a} \quad \leftarrow \underline{f} = \frac{\underline{F}}{m} \quad \Rightarrow \underline{q} = \underline{f} - \underline{a} = 0$ ← nem mond semmi újat, a probléma szempontjából ekkor van jelentősége, ha f helyén konkrét alak ⇒ függvény

$\boxed{\underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t) = \underline{a}}$ ← f nem függ magasabb deriválttól!

- a mozgást leíró egyenlet pontosan másodrendű diff. egyenlet mert $\ddot{r}$ mindig szerepel benne (de konkrétan még nem ismerjük a fvt)
- $\underline{r}, \underline{v}, t$ – től függő ismeretlen: gyorsulás
- kezdeti feltételek: hely 3 komponense, kezdő sebesség —″— } 6 szabad paraméter ← kísérleti tapasztalat! mindig van ← pontosan 6!
- $\underline{r}, \underline{v}, \underline{a}$: inerciarszben kell nézni ⇒ az egyenletben nem szerepelhet $\underline{r}$-nél magasabb derivált

3) testek kölcsönhatása

2 tömegpont elektromosan töltve!



gyorsulás: párhuzamos, de ell. irányú

$$\boxed{\frac{|\underline{a}_1|}{|\underline{a}_2|} = \text{const} = \frac{m_2}{m_1}}$$

a kezdeti feltételektől függetlenül!

3. tömegpont bevezetése esetén is érvényes páronként (kísérleti tapasztalat)

$m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2$

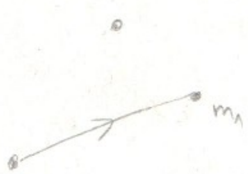
$m\,\underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t) = m\underline{a} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$

⇒ tömeg használata értelmet nyer: minden kölcsönhat. esetén ua. testre jell. állandó

$\boxed{\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}}$

2-es által 1-re ható ereje ? 1-es 2-esre ható ereje

4) szuperpozíció



$m\underline{a}_1 = \underline{F}_1$
$m\underline{a}_2 = \underline{F}_2$ } ? ha egyszerre hat mindkettő ⇒ összeadás

$m\underline{a} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2$

kiterjedt testek esetén nem érvényes: belső szabadsági fok: át tud rendeződni a töltés

- pontszerű test: ∅ kiterjedése ⇒ tömegpont
- erők szuperpozíciójának elve! páronként adódott vektori erők összege adja az eredőt
  = erők függetlenségének elve; ha pontszerű test

$$\boxed{\underline{F} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i}$$ F_i: pár-kölcsönhatásból adódó erő

Impulzus

- $m\underline{a} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$ ~~$\frac{dv}{dt}$~~

$m\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t) \rightarrow$ ~~$\frac{dp}{dt}$~~ $\boxed{\begin{matrix}\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \\ \frac{\underline{p}}{m} = \frac{d\underline{r}}{dt}\end{matrix}}$ ← két elsőrendű diffegy. az egy másodrendű helyett; p hasznos több test esetén

- impulzus $\underline{p} = m\underline{v} \Rightarrow$

$\frac{d\underline{p}}{dt} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$

videó: 8:20

$$\frac{dp}{dt} = F \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{p}{m}$$

$$\frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = F\big(r(t), p(t), t\big)$$

$$\frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{p(t)}{m}$$

a dinamika adja meg

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + F\big(r(t), p(t), t\big)\,\Delta t$$
$$r(t+\Delta t) \approx \underbrace{r(t)}_{} + \frac{p(t)}{m}\,\Delta t$$

2 x 3 szabad paraméter

} Euler-módszer (könnyen leprogramozható) $p(t)$ és $r(t)$: 6db kezdőfelt.

Harmonikus rezgőmozg.: (függőleges)

$$\boxed{ma = mg - Dx} \quad /:m$$

$$a = g - \underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2} x = g - \omega_0^2 x$$

ω_0 ② ← hogy mindig poz. legyen

[1. $ma: a = 0$
$\Rightarrow x_0 = B = g/\omega_0^2$]

$$\boxed{\ddot{x} = a = g - \omega_0^2 x}$$

harmonikus rezgőmozg.

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + B}$$

← egyensúlyi helyzet a B-ben van eltolva

09. 30.
kedd 6. ea.

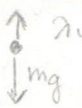
$$a = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi) \underbrace{- \omega_0^2 B + g}_{} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

A, φ - kezdeti feltételek szabad paraméterek

0, ha a B-t úgy választjuk meg ← egyensúlyi helyzetben megnyúlás

$$B = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{D}$$

Közegben súrlódó esés



sebességgel arányos erő: súrlódási erő

$$\boxed{mg - \lambda v = ma}$$

$$g - \beta v = a \qquad \leftarrow \boxed{\beta = \lambda/m}$$

ha nem lenne g
$-\beta v = \dot{v}$
$\Rightarrow$ exp. fv

$$g - \beta\dot{x} = \ddot{x}$$

keressük

$$\boxed{g - \beta v = \dot{v}}$$

$v(t) := v_0 e^{\alpha t} + v_\infty$
exp. alak

$$\Rightarrow \dot{v} = \alpha v_0 e^{\alpha t}$$

$$\Rightarrow g - \beta v_0 e^{\alpha t} - \beta v_\infty = \alpha v_0 e^{\alpha t}$$

ha $g = \beta v_\infty$ és $\beta = -\alpha$ $\Rightarrow$ $v_0 e^{\alpha t} = v_0 e^{\alpha t}$ $\rightarrow$ jó mo.

$$\rightarrow \boxed{v_\infty = \frac{g}{\beta} = \frac{mg}{\lambda}}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-\beta t} + \frac{mg}{\lambda}}$$

v_∞ : ha $v \to \infty$, $v_0 e^{\alpha t} = v_0 e^{-\beta t} \to 0 \Rightarrow a \to 0$
$\Rightarrow$ állandó sebesség áll be, mert a gyorsulás a 0-hoz tart

$$\boxed{v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + v_\infty \qquad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{m}{\lambda}}$$

kezdőfelt: $v(0)$

5 τ után beáll az állandó sebesség (v_∞)

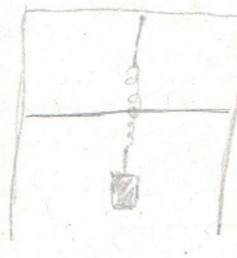
mert $e^{-5} \simeq 1\%$ $\rightarrow$ elhanyagolható a további változás

[folyadékban mozgó test: Stokes-tv]

csillapított rezgés – statikus súrlódás

$ma = \cancel{mg} - Dx - F_s$ ← a súrlódási erő ellentétes irányú a sebességgel ⇔ szorzunk $v/|v|$-vel

$$\boxed{ma = \cancel{mg} - Dx - F_s \frac{v}{|v|}}$$



↙ fénymidhoz súrlódik a felfüggesztés

⇒ ~~v iránya~~ fellbontjuk két esetre $|v|$ szerint eltolt egyensúlyi helyzetű harmonikus rezgőmozg.

$a = g - \omega_0^2 - \frac{F_s}{m}\frac{v}{|v|}$

lefelé megy → egyensúlyi helyzet felfelé tolódik

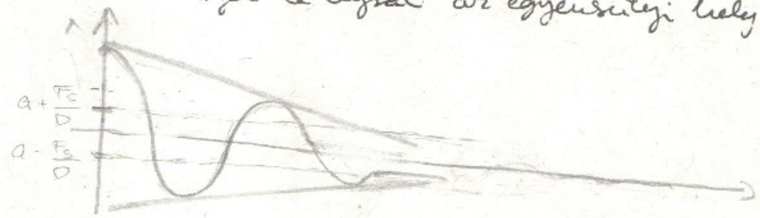
$\Leftrightarrow -\omega_0^2 B + g - \frac{F_s}{m}\frac{v}{|v|} = 0$

felfelé megy → egy. hely. lefelé tolódik

$B = \frac{g}{\omega_0^2} - \frac{F_s}{m\omega_0^2}\frac{v}{|v|}$ poz. v. neg.

a pályagörbe sinusokból áll, csak „fel-le ugrál" az egyensúlyi helyzet

a mozgás a végén megáll



mikor bekerül

$a \pm \frac{F_s}{D}$ intervallumba

elkezd rá hatni a tapadási súrl. erő a csúszási helyett → megáll

bárhol előfordulhat ebben az intervallumban

az feltételja be, hogy hol áll meg, hogy hol indítottuk el

= az egyensúlyi helyzet függ a kezdeti feltételektől

csillapított rezgés – dinamikus súrlódás

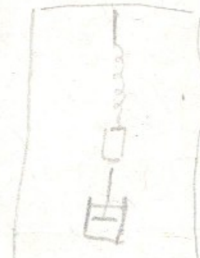
$$\boxed{ma = -Dx - \lambda v \cancel{+mg}}$$

← $+mg$ konstans csak eltolja az egyensúlyi helyzetet

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$ $\quad \boxed{\beta = \lambda/2m}$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

{ másodrendű, állandó együtthatós, lineáris, homogén diff. egyenlet

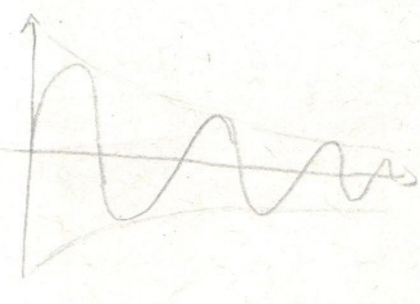


vízespohárba beleér a testről lelógó korong ↙

A sinusok amplitúdója függ az időtől

$x(t) = A(t)\sin(\omega t + \varphi)$

$\dot{x} = \dot{A}(t)\sin(\omega t+\varphi) + A(t)\cos(\omega t+\varphi)\,\omega$



$\ddot{x} = \ddot{A}(t)\sin(\omega t+\varphi) + \dot{A}(t)\,\omega\cos(\omega t+\varphi) + \dot{A}(t)\omega\cos(\omega t+\varphi) - A(t)\,\omega^2\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow$

$\ddot{x} = \ddot{A}(t)\sin(\omega t+\varphi) + 2\dot{A}(t)\omega\cos(\omega t+\varphi) - A(t)\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$

⇓

$[\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A]\sin(\omega t+\varphi) + [2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega]\cos(\omega t+\varphi) = 0$

mo.: ha van olyan $A(t)$ fv, hogy a sin() és a cos() együtthatója is 0 legyen

- $2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega = 0$ $\quad$ triviális mo.: $\omega = 0$

$\dot{A} = -\beta A$

$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$ alakú a fv lesz mo. $\Rightarrow$ $\dot{A} = -\beta A_0 e^{-\beta t}$, $\ddot{A} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}$

- a $\sin(\omega t+\varphi)$ együtthatóját ez a fv kielégíti?

- $\underbrace{\beta^2 A_0 e^{-\beta t}}_{\ddot{A}} - \underbrace{\omega^2 A_0 e^{-\beta t}}_{-\omega^2 \cdot A} \underbrace{- 2\beta^2 A_0 e^{-\beta t}}_{+2\beta \cdot \dot{A}} + \underbrace{\omega_0^2 A_0 e^{-\beta t}}_{+\omega_0^2 \cdot A} \stackrel{?}{=} 0$

$A_0 e^{-\beta t}$ -vel egyszerűsítünk

$\Rightarrow \beta^2 - \omega^2 - 2\beta^2 + \omega_0^2 = 0$ ← az ω-ról eddig nem tudjuk, hogy mennyi

$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2}$

↑ ha ez teljesül, akkor az $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ alakú jó mo.

$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)}$ ahol $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2}$ $\boxed{(\omega_0 > \beta)}$ ← A_0 és φ: kezdeti feltételek

$\omega_0^2 = D/m$ $\beta = \lambda/2m$

↑ ω: a β módosítja ω_0-t (az előző esetben $\omega = \omega_0$ volt)

⇓

exponenciális amplitúdó csillapodás

⇓

ha megáll $\leq \tau$ idő alatt, az egyensúlyi helyzetben áll be pontosan
=> pontosabb, $\emptyset$ bizonytalanság, mint az előző esetben
(alkalmazás: mérleget légfékezet használnak)

⇓

nem egzakt sinus görbék
(előző eset: pontosan sinus görbék egymásutánja)

- két egymásutáni maximális kitérés aránya:

$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-\beta T}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periódusidő

$\boxed{\ln \frac{A_{n+1}}{A_n} = -\beta T}$

↑
logaritmikus dekrementum ← könnyen megmérhető adatokból
=> a csillapítás (β) mérhető => ω_0 megkapható

- ha $\beta > \omega_0$ => $\omega^2 \neq \omega_0^2 - \beta^2$ ↯ => másik mo. keresése
túlcsill. rezgés
- a diffegyenletbe új fv helyettesítése $(\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0)$
$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ => $\dot{x} = x_0 \alpha e^{\alpha t}$, $\ddot{x} = x_0 \alpha^2 e^{\alpha t}$

$\alpha^2 x_0 e^{\alpha t} + 2\beta\alpha x_0 e^{\alpha t} + \omega_0^2 x_0 e^{\alpha t} = 0$

$[\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2]\, x_0 e^{\alpha t} = 0$ minden t-ben => a $[\dots]$-nek kell mindig 0-nak lennie, mert az konstans

$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$

$\alpha_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

a diff. egy. lineáris természete miatt összeg is mo.

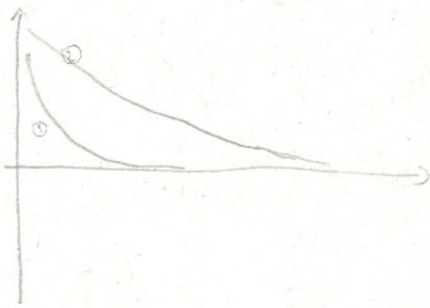
$\boxed{x(t) = x_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + x_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}}$ x_1, x_2 – kétféle amplitúdó
↑ szabad paraméterek

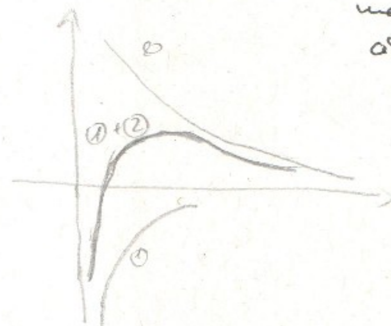
$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$ => exp negatív => csillapít

2019. 10. 01.
kedd. 7. ea

$$x(t) = \underbrace{x_1 e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}_{\text{gyorsabban cseng le}} + \underbrace{x_2 e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}_{\text{hosszabban cseng le, hosszútávú viselkedést ez a tag határozza meg}}$$

2 db exponenciálisan lecsengő fv összege





∅ oszcilláció, max. 1x megy át a túloldalra

↑

túlcsillapított rezgés

- ha $\beta = \omega_0$ kritikus eset (fizikában ∅, csak elmélet)

$$x_1 e^{-\beta t} + x_2 e^{-\beta t} = (x_1+x_2) e^{-\beta t}$$ ← csak 1 szabad paraméter (x_1+x_2) nem általános mo.

$\boxed{(x_1 + C t) e^{-\beta t}}$ $\beta \to \omega$ $\beta > \omega$

ugyanúgy viselkedik, mint a túlcsillapított (lecseng).

- komplx számokkal fölírva az előző esetet:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$$

$$x_0\underbrace{(\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2)}_{0} e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$x(t) = x_1 e^{(-\beta+i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t} + x_2 e^{(-\beta-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t}$$

legyen x_1 és x_2 cmplx! ← megválaszthatjuk úgy, hogy az eredmény tisztán valós legyen ~~(a+a*)~~ (x_1 és x_1^*) cmpx konj.

4 szabad paraméter

2x valós és képzetes rész

$$x(t) = x_1 e^{(-\beta+i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t} + x_1^* e^{(-\beta-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2})t}$$

$$x_1 = |x_1| e^{i\varphi} \qquad x_1^* = |x_1| e^{-i\varphi}$$

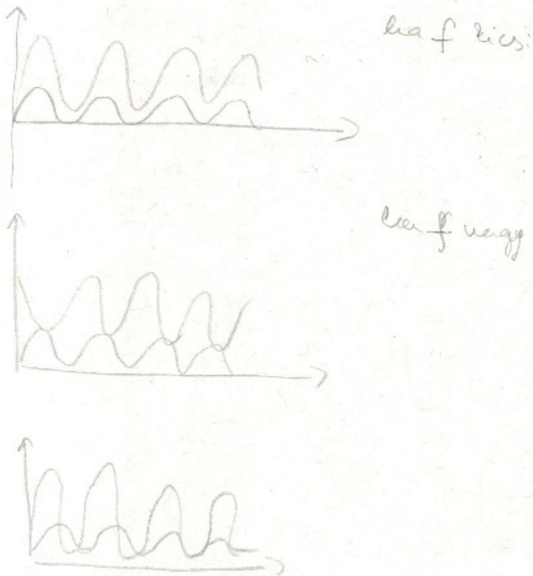
$$x(t) = |x_1| e^{-\beta t}\left[\underbrace{e^{i(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi)} + e^{-i(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi)}}_{2\cos\alpha}\right] = |x_1| e^{-\beta t} \cdot 2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \underbrace{2|x_1|}_{A} e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi\right)}$$

(K) kívülről mozgatott rugón lévő test – kényszerrezgés

kényszerrezgés, rezonancia

$$\boxed{ma = -Dx - \lambda v + F_g(t)}$$ ← gerjesztési fv

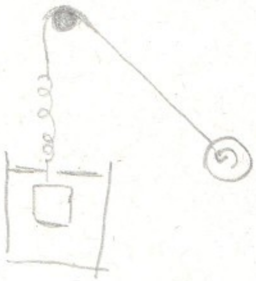


periodikus fv:

$F_g(t+T) = F_g T$

$F_g(t) = F_0 \sin(\omega t)$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$



Fourier-transzf.: periodikus fv felírható sinfvek összegeként

- spec. fv kiválasztása F_g-nek: $F_g(t) = F_0 \sin(\omega t)$

$ma = -Dx - \lambda v + F_0 \sin(\omega t) \quad /:m$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{f_0 \sin(\omega t)}} \qquad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

⇒ inhomogén, mert ez ≠ 0

másodrendű, állandó együtthatós, lineáris diffegy

- legyen $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$ – specifikus mo.

$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

trigonometrikus azonosságok (addíciós tételek):

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{cases} x(t) = A\left[\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\right] \\ \dot{x}(t) = A\omega\left[\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi\right] \\ \ddot{x}(t) = -A\omega^2\left[\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\right] \end{cases}$$

- behely. ⇓ $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)$

$$\underbrace{\left[-A\omega^2\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin\varphi + \omega_0^2 A\cos\varphi\right]}_{\eta}\sin\omega t + \underbrace{\left[-A\omega^2\sin\varphi + 2\beta A\omega\cos\varphi + \omega_0^2 A\sin\varphi\right]}_{\mu}\cos\omega t = f_0\sin(\omega t)$$

↑ a két oldalnak mindig meg kell egyeznie ⇒ $\eta = f_0$ és $\mu = 0$

⇓

$$\left.\begin{aligned} &\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi\right]A = f_0 \\ &\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi\right]A = 0 \end{aligned}\right\}$$ ismeretlen: A és φ

$A \neq 0 \Rightarrow [\cdot] = 0$

⇓

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

A kiszámolása: 1. egyenletből – bonyolult

⇒ négyzetre emeljük és osszuk

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi\right]^2 A^2 = f_0^2$$

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi\right]^2 A^2 = 0 \quad (+)$$

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] A^2 = f_0^2$$

inhomogén diffegy:
=> mo.: specifikus mo. + homogén ált. mo.
homogén: $\ddot{x}' + 2\beta\dot{x}' + \omega_0^2 x' = 0$
ld. csillapított rezgés
=> lecsengő amplitúdó (exp-san)
(=> egy idő után eltűnik ez a tag)

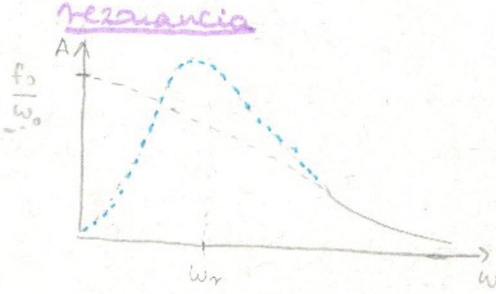
=> végeredmény:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

ha $\omega_0 = \omega$ $\operatorname{tg}\varphi \to \infty$ $\varphi \to 90°$

rezonancia



felrajzolás:
kezdet: $\frac{f_0}{\omega_0}$-ról ha $\omega = 0$
vég: $\sim 1/\omega^2$ szerint leesenk
közben: fvanalízis!

deriváljuk
szélsőérték akkor van, mikor a nevező a legkisebb

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = -2(\omega_0^2-\omega^2)2\omega + 4\cdot 2\cdot\beta^2\omega := 0$$

← elég a belső fvt deriválni, a gyök deriváltja sohasem 0

$$\left[2\beta^2 - \omega_0^2 + \omega^2\right]\omega = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\omega = 0} \text{ triviális mo.}$$

$$2\beta^2 - \omega_0^2 + \omega^2 = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2} \text{ - szélsőérték}$$

ha $2\beta^2 > \omega_0^2$, ez a szélsőérték nem létezik
(kiértékelésnél jól jöhet)

rezonancia frekvencia:

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$ (ha létezik akkor $\omega_0^2 > 2\beta^2$)

$$A(\omega_r) = \frac{f_0}{\sqrt{\left[\omega_0^2-(\omega_0^2-2\beta^2)\right]^2 + 4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{(-2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} =$$

A_{max}

$$= \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\beta^2+\omega_0^2-2\beta^2}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

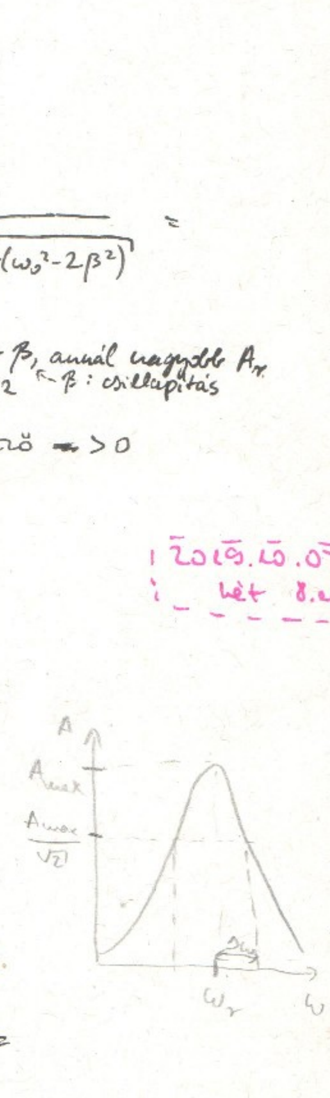
minél kisebb β, annál nagyobb A_r
ha $\omega_0^2 > 2\beta^2$ ← β: csillapítás
=> a nevező > 0

90°-os fáziseltolódás az ω_0-n
max. amplitúdó ω_r-nél
β csökken -> amplitúdó nő

$$A_{max} = \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}}$$

2019.10.07.
hét 8.ea.

- görbe szélessége : FWHM
  v. mikor esik le a $\sqrt{2}$-ed részére



$$\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2} = \sqrt{2}\cdot 2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 = 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^4 + (-2\omega_0^2 + 4\beta^2)\omega^2 + \omega_0^4 - 8\beta^2\omega_0^2 + 8\beta^4 = 0$$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{2\omega_0^2 - 4\beta^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 16\omega_0^2\beta^2 + 16\beta^4 - 4\omega_0^4 + 32\beta^2\omega_0^2 - 32\beta^4}}{2} =$$

15

$\cancel{\omega_{1,2}^2 = \frac{2\omega_0^2-4\beta^2 \pm \sqrt{8\beta^4}}{2} = \omega_0^2 - 2\beta^2 \pm \sqrt{2\beta^4} =}$

diszkrimináns:

$D = 4\omega_0^4 + 16\beta^4 - 16\omega_0^2\beta^2 - \cancel{4\omega_0^4} + \overset{32}{\cancel{8}}\beta^2\omega_0^2 - \overset{32}{\cancel{8}}\beta^4 =$

$= \beta^2(16\omega_0^2 - 16\beta^2) = 16\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$

másodfokú egyenlet:

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{b^2-4ac}$

$\omega_{1,2}^2 = \frac{2\omega_0^2-4\beta^2\pm\sqrt{16\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}}{2} = \omega_0^2 - 2\beta^2 \pm \sqrt{4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)}$

$\underbrace{\omega_1^2-\omega_2^2}_{\text{a két gyök}} = \sqrt{16\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)} = 4\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} = \underbrace{(\omega_1+\omega_2)}_{\approx 2\omega_r}\underbrace{(\omega_1-\omega_2)}_{\Delta\omega} \Rightarrow \Delta\omega \sim \beta$

a két gyök különbsége a diszkrimináns gyöke

szimmetria miatt

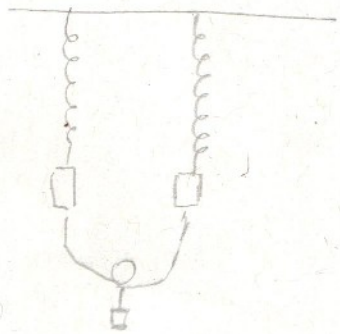
⇒ ha csökkentjük a csillapítást → a görbe egyre keskenyebb és magasabb

rezonancia lehet, ha 2β ← rezonancia kis effektusok méréséhez szükséges

~~Csatolt~~ rezgések összeadása – párhuzamos

(u) 1) egyiket kitérítjük – másik nyugalomban
⇒ a másik is elkezd rezegni

2) a kettőt ellentétesen kitérítjük
⇒ nem történik semmi



$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \dots$

$x(t) = A_1 \cos\varphi_1 \sin(\omega t) + A_1 \sin\varphi_1 \cos(\omega t) +$
$+ A_2 \cos\varphi_2 \sin(\omega t) + A_2 \sin\varphi_2 \cos(\omega t) =$

$= \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi} \sin(\omega t) + \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi} \cos(\omega t)$

← keressünk olyan A-t és φ-t, amiért teljesül

akkor: $x(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$ – rezgés A amplitúdóval és φ fázissal

akkor teljesül (I) és (II):

(I) $A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$

(II) $A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$

$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$

$(I)^2+(II)^2$: $A^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) = \cancel{(A_1^2+A_2^2)\sin^2\varphi_1 + (A_1^2+A_2^2)\cos^2}$

$= A_1^2\sin^2\varphi_1 + A_2^2\sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$
$+ A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2$

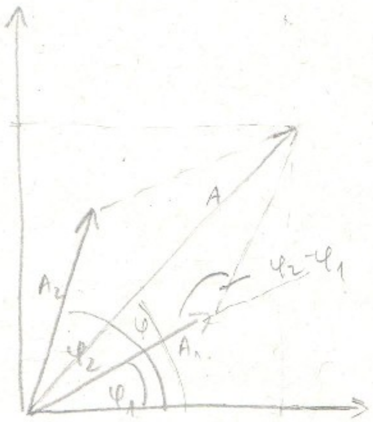
$\Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\underbrace{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)})$

$\Rightarrow \boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + \underbrace{2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}_{\text{interferencia-tag}}}$

ha $\varphi_1 = \varphi_2$ akkor $A = A_1 + A_2$ az amplitúdók összeadódnak

ha $\varphi_1 = \varphi_2 + 90°$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2$



- $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$

- $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

lássuk be az ábráról is

$\operatorname{tg}\varphi$: A_1 és A_2 ∥ és ⊥ komponensei (x- és y vetület)

A : cos − tétel

Tekintsük a koordrsz-t komplex számsíknak!

$z_1 = A_1 e^{i\varphi_1} = A_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $\qquad z_2 = A_2 e^{i\varphi_2} = A_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$A e^{i\varphi} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ ← azonos frekvenciájú, kül. amplitúdójú és fázisú rezgések összeadása

Feleltessük meg az egész rezgést komplex számnak

$x = A e^{i(\omega t + \varphi)}$

rezgések összeadása egyszerűbb ilyen formában
főleg, ha több rezgést adunk össze

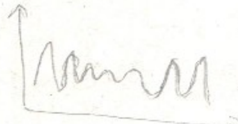
(2) hosszú ingán két test

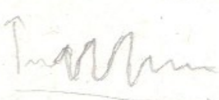
1) az egyiket kihúzzuk, a másik nyugszik
⇒ idővel a másik kitér, az első megáll

2) egyszerre arra húzzuk ki ugyanarra
⇒ változatlan

3) egyszerre ellentétesen húzzuk ki
⇒ változatlan

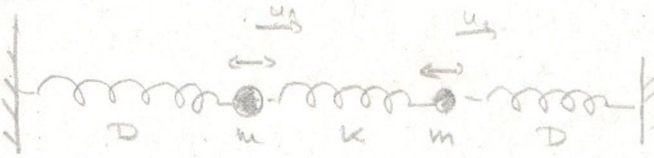
(3) két rugón csatolt test
egyik amplitúdója min. ⇒ másiké max.
amplitúdó szinuszosan változik





csatolt rezgések

2019.10.08.
ke 9.ea.



matematikailag ekvivalens a páros ingával

a két golyót u_1-gyel és u_2-vel kitérítjük ki

$$m\ddot{u}_1 = -Du_1 + K(u_2 - u_1) \qquad \leftarrow u_2 > u_1$$
$$m\ddot{u}_2 = -Du_2 - K(u_2 - u_1)$$

(I) $\ddot{u}_1 = -\omega_0^2 u_1 + \Omega^2 (u_2 - u_1)$
(II) $\ddot{u}_2 = -\omega_0^2 u_2 - \Omega^2 (u_2 - u_1)$

össze vannak csatolva a K csatoló rugóval $\qquad \omega_0^2 = \frac{D}{m} \qquad \Omega^2 = \frac{K}{m}$

a) ω-k és φ-k megegyeznek, A-k különböznek

$u_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$ $\qquad$ ismeretlenek: A_1, ω
$u_2(t) = A_2 \sin(\omega t)$ $\}$ behelyett. (I) és (II)

$$-\omega^2 A_1 \cancel{\sin(\omega t)} = [-\omega_0^2 A_1 + \Omega^2 (A_2 - A_1)] \cancel{\sin(\omega t)}$$
$$-\omega^2 A_2 \cancel{\sin(\omega t)} = [-\omega_0^2 A_2 - \Omega^2 (A_2 - A_1)] \cancel{\sin(\omega t)}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2) A_1 - \Omega^2 A_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2) A_2 - \Omega^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

mo.: • $A_1 = 0$ és $A_2 = 0$ triviális
• nemtriviális

homogén lineáris diffegy

$$A_1 = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2} A_2$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2) A_2 - \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2} A_2 = 0$$

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)^2 - \Omega^4}{\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2} A_2 = 0$$

→ $A_2 = 0$
→ számláló 0
nemtriviális mo. ω-ra minden A_2-vel 0-t ad

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)^2 = \Omega^4$$
$$\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 = \pm \Omega^2$$

→ $\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 = \Omega^2$
$\omega_1^2 = \omega_0^2$ ← ilyen ω-k esetén harm. rezgőmozg. lesz

$\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 = -\Omega^2$
$\omega_0^2 - \omega^2 + 2\Omega^2 = 0$
$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

$\omega_1^2 - \omega_0^2$	$\omega_2^2 - \omega_0^2 - 2\Omega^2$
$A_1 = A_2$	$A_1 = -A_2$

ha $2\Omega^2$ kicsi (csak ekkor) gyenge csatolás
a frekvenciák majdnem megegyeznek

ill:

analógia:

← K közepe nem mozdul

=> $A_1 = A_2$ és $A_1 = -A_2$ esetén harm. rezgőmozg.

leírható két független ω-val
két független rezgés, holott van csatolás

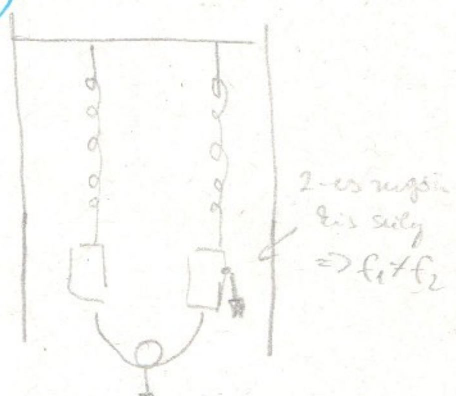
lineáris egyenletek ⇒ a mo. összege is mo.

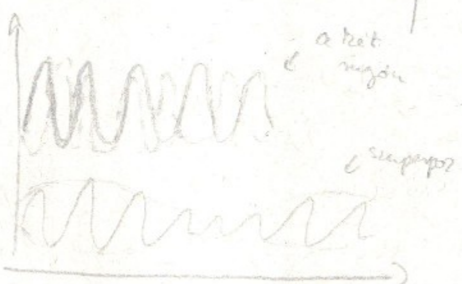
(1) $u_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ ⇐ 4 szabad paraméter: $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ ⇒ általános mo.

(2) $u_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ ⇐ ∅ új szabad paraméter

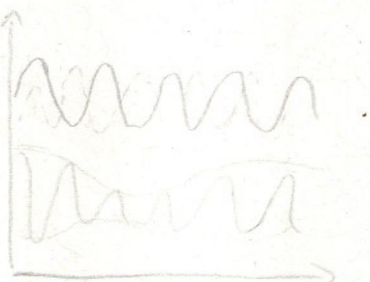
(1): két kül. rezgés összege, kül. frekvenciával

K





ellentétes fázisban indul



azonos fázisban indul

(1): két kül.

$u_1 = A \sin(\omega_1 t) + A \sin(\omega_2 t) =$ $\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2A \sin\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cos\frac{\omega_2 t - \omega_1 t}{2} =$

$= 2A \sin\Big(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\omega_0} t\Big) \cos\Big(\underbrace{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}_{\Delta\omega} t\Big)$

$\omega_2 - \omega_1$: kicsi ha $\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$ és Ω^2 kicsi - gyenge csatolás a frekvencia kb. azonos

⇒ lassan változó amplitúdójú rezgés

jelenség: __lebegés__ ha a két frekvencia közel azonos

stroboszkóp-hatás: kereket forgatunk, adott időnként megvilágítjuk

merőleges rezgések öadása

$$x = A_1 \sin(\omega t)$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

} t kifejezése, y(x) fv keresése

$$y = A_2\left(\sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\right)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{A_1} \qquad \cos(\omega t) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\omega t)} = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}$$

$$\frac{y}{A_2} = \left(\frac{x}{A_1}\cos\varphi \pm \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}\cdot\sin\varphi\right)$$

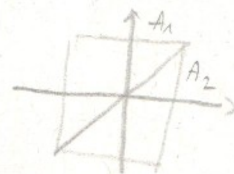
$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right)\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{yx}{A_2A_1}\cos\varphi + \underbrace{\left(\frac{x}{A_1}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2\sin^2\varphi}_{(x/A_1)^2} = \sin^2\varphi$$

$$\boxed{\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{yx}{A_2A_1}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2\varphi}$$ ← kvadratikus alak

az A_1 és A_2 oldalú téglát nem hagyja elhagyni ↓

a) ha $\varphi = 0$ egy egyenesre esik az összeg



$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{y}{A_2}\frac{x}{A_1} + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}$$ ← egyenes egyenlete

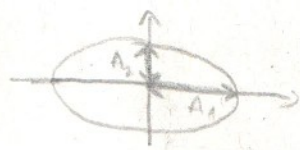
$m = \frac{A_1}{A_2}$ meredekség

(elfajult ellipszis)

b) ha $\varphi = 90°$

$$\left(\frac{y}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_1}\right)^2 = 1$$ ellipszis

↖ $A_1 = A_2 \Rightarrow$ kör



elforgatott koord rsz-ben is ellipszis sajátérték egyenlet megoldásával

ha csak kicsit különböznek ω v. f (lebegés): a fáziseltérés lassan változik → az ellipszis lassan forog

c) $f_2 = 2f_1 \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \quad \varphi_1 = \varphi_2$

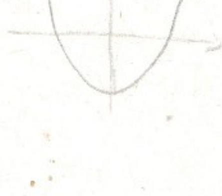
$$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{x}{A}$$

$$y = A\cos(2\omega t) = A\left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right) = A\left(\cos^2(\omega t) - 1 + \cos^2(\omega t)\right) =$$
$$= A\left(2\cos^2(\omega t) - 1\right)$$

$$y = A\left(2\cos^2(\omega t) - 1\right) \Rightarrow \frac{y}{A} = 2\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 1$$ ← eltolt parabola egyenlete

ha $\omega_2 \neq 2\omega_1$ Lissajous-görbék

ha $\omega_2 = k\omega_1$ zárt görbe



kvadratikus alak felírható:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & -\frac{1}{A_1A_2}\cos\varphi \\ -\frac{1}{A_1A_2}\cos\varphi & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sin^2\varphi$$ ← képletek alakja!

sajátrendszerben a mxnak csak diagonális elemei vannak

Impulzusmomentum

2019. 10. 15. Kedd 10.00

$- m\underline{a} = \underline{F}$ ← szorozzuk meg balról vekt. $\underline{r}$-rel

$\underline{r} \times m\underline{a} = \underbrace{\underline{r} \times \underline{F}}_{\underline{M}}$ forgatónyomaték

$\underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times m\dot{\underline{v}} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times m\underline{v}) =$
$= \underline{v} \times m\underline{v} + \underline{r} \times m\dot{\underline{v}}$

$\Downarrow \quad \frac{d}{dt}\underbrace{(\underline{r} \times m\underline{v})}_{\underline{N}} = \underline{M}$

$\boxed{\underline{N} = \underline{r} \times \underline{p} = \underline{r} \times m\underline{v}}$

← impulzusmomentum

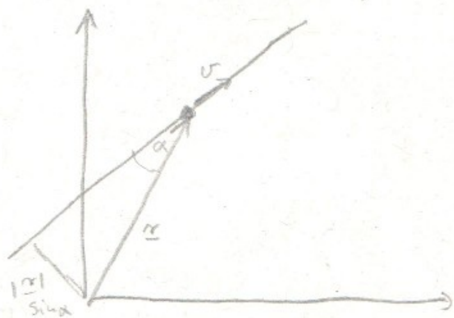
← szorzat deriváltja lereszthorzattal

$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underbrace{\underline{v} \times m\underline{v}}_{0} + \underline{r} \times m\underline{a} = \boxed{\underline{r} \times m\underline{a} = \underline{M}}$

$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}}$ ← (vektoregyenlet)

- ha $\underline{M} = 0$ $\quad \frac{d\underline{N}}{dt} = 0 \Rightarrow$ ~~á~~ $\underline{N}$ konstans (megmarad)

  ^ ha $\underline{F} = 0$



- pl. egyenes vonalú egyenletes mozg. $\underline{N} = \text{áll.}$

  $|\underline{v} \times \underline{r}| = |\underline{v}||\underline{r}| \sin\alpha$

  $|\underline{r}| \sin\alpha$ ← az egyenes távolsága az origótól, áll.

- $\underline{F} \parallel \underline{r}$ $\quad$ pl. Coulomb-tér

  ^ centrális erőtér – az erő minden pontban az origóba mutat $\underline{N} = \text{áll.}$

  $\underline{F} \parallel \underline{r}$ $\quad \Rightarrow \underline{r} \times \underline{F} = 0$ esetén is $\underline{M} = 0$

  = centrális erőtérben az impulzusmomentum megmarad

  $\underline{M} = 0$ $\quad \rightarrow \underline{F} = 0$ esetén
  $\quad \hookrightarrow$ centrális erőtér esetén

$\underline{r}\,(\overbrace{\underline{r} \times m\underline{v}}^{\underline{N}}) = 0$ $\quad \rightarrow \underline{r}\underline{N} = 0$ $\quad \underline{N} \perp \underline{r}$ $\Rightarrow$ csak $\underline{N}$-re merőleges síkban tud mozogni

mert $\underline{r}\,\underline{r}$?

egy origón átmenő sík egyenlete (origóban legyen a centrum)

$\Rightarrow$ síkmozgás lehetséges centrális erőtérben

centrális erőtérben mindig!!

ld. bolygómozgás

- síkbeli polár koordinátákkal – centrális erőtér

$\underline{r} = r\,\underline{e}_r$ $\quad \underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi$

$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$

$\underline{N} = \underline{r} \times m\underline{v} = m\,(r\underline{e}_r) \times (\dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi) =$ $\quad$ ($\underline{e}_r \times \underline{e}_r = 0$)

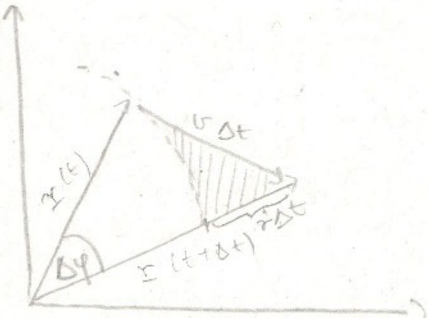
$= m\,(r^2\dot{\varphi})(\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{(\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi)}$

a síkra merőleges vektor, nagyegységvektor

$\boxed{|\underline{N}| = mr^2\dot{\varphi} = \text{áll.}}$ $\quad \dot{\varphi} = \omega$

a mozgás síkjára merőlegesen

$\boxed{r^2\dot{\varphi} = \text{áll}}$ ← Kepler!!



Δt idő alatt átmegyünk $\underline{r}(t)$-ből $\underline{r}(t+\Delta t)$-be

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi = \text{körcikk területe}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}\, \Delta t + \underbrace{\sim \Delta t^2}_{\text{kis, elhanyagolható terület}}$$

$$\boxed{\dot{T} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{áll}}$$

Kepler II

a vezérsugár által súrolt terület

minden centrális erőtérben érvényes!!

imp.mom. megm.
=> síkmozg.
=> Kepler II.

területi sebesség megmaradásának tétele

a szimmetriák és megmaradások nem függetlenek egymástól

az impulzus megmaradás az izotrópiából következik, φ kitüntett irány

Munka

8. ea. 56. min

- $m\underline{a} = \underline{F} \quad | \cdot \underline{v}$

$$\underline{v}\, m \underline{a} = \boxed{\underbrace{\underline{v}\,\underline{F}}_{} = P}$$

P teljesítmény — mértékegység régen: lóerő de nem úgy, mint az erő!

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m \overbrace{(\underline{a}\underline{v} + \underline{v}\underline{a})}^{(\underline{v}\cdot\underline{v})'} = m \underline{v}\,\underline{a} = P \qquad \boxed{\frac{dE_{kin}}{dt} = P}$$

$\frac{1}{2} m v^2 = E_{kin}$

=> ha $P = 0$ $\quad \frac{dE_{kin}}{dt} = 0 \Rightarrow E_{kin} = \text{áll.}$

pl. Lorentz-erő
$\underline{v} \perp \underline{F}$

- mágneses térben mozgó töltés E_{kin}-ja áll.
a sebesség nagysága áll. (iránya változik, kör)

=> a gyorsítókban a mágneses tér csak a pályán tartáshoz kell, gyorsítani az nem tud

$$\frac{d}{dt} E_{kin}(t) = P(t)$$

$\downarrow$ int.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} E_{kin}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} P(t)\, dt := W$$

$[W] = 1\,Nm = 1\,J$

$\int_{t_0}^{t}$ int. határ, dt: int. változó, nem ua!

$$E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = W \qquad \text{munkatétel}$$

$$\boxed{W = \Delta E_{kin}}$$

- erőtér: $\underline{F}(\underline{r})$ az erő csak a hely fv-e

közelítő összeg a valódi mozgás mentén

$$W = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\underline{F}(\underline{r}(t))\, \underline{v}(t)}_{P(t) \text{ ha erőtér}}\, dt \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i))\, \underline{v}(t_i)(t_i - t_{i-1}) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i)) \frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{\cancel{t_i - t_{i-1}}} \cancel{(t_i - t_{i-1})} \quad \leftarrow \text{független az időtől!}$$

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i)) \cdot (\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1}))$$

$r(t_i) := r_i \quad \dots$

$W \approx \sum_{i=1}^{N} F(r_i)\,(r_i - r_{i-1})$ ← független a valódi mozgástól, nem számít a görbe alakja, csak a két vizsgált pont helyzete

↓ finomítjuk a felosztást

időtől is független

$$\boxed{\int_G F(r)\,dr = W}$$ ← az F fv-é a görbére vett vonalmenti int-ja

az F fv G görbére vett munkája

G görbe megadása: G paraméteres egyenletével

$$W = \int_G F(r)\,dr = \int_{s_0}^{s_1} \underline{F}(r, s)\,\frac{dr}{ds}\,ds$$ ← ha s az idő → teljesítmény integrálja

W létezik, ha F folytonos (a görbeintegrál létezik)

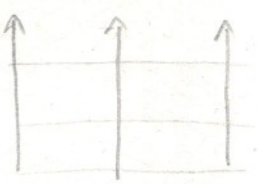
Zárt görbére vett integrál:

$$\oint \underline{F}(r)\,dr = 0$$ ha $F(r)$ konzervatív erőtér, bármilyen görbére ekkor a munka értéke független a görbétől

$\text{rot}\,\underline{F}(r) = 0$

konzervatív erőterek:

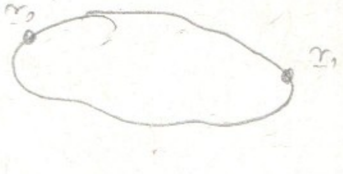
- F = áll. homogén erőtér



erőre merőlegesen F = 0

erővel párhuzamosan oda-vissza F és r ellentétes előjelű

két pont között akármilyen úton ugyanannyi munkát kell végezni



$$W_{(r_0 \to r_1)} = -W_{(r_1 \to r_0)}$$

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \underline{F}(r)\,dr$$

Potenciális energia

minden ponthoz hozzárendelhetünk egy skalármennyiséget ← konz erőtér

ha bevezetünk egy tetszőleges origót

$$\phi(r) = -\int_0^r F(r)\,dr = E_{pot}$$ ← negatív előjel def szerint

helyzeti energia

$W \not= \int_{r_0}$ ha máshol van az origó, egy konstanssal bővül el (az origóhoz kötött integrál) pálya: $r_0 \to r_1$, az origón keresztül

$$\phi(x_2) = -\int_0^{x_2} E(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{x_1} F(x)\,dx}_{\phi(x_1)} - \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx}_{W} \Rightarrow \phi(x_2) = \phi(x_1) - W$$

$$W = -\phi(x_1) + \phi(x_0)$$

$$W_{12} = \phi(x_1) - \phi(x_2)$$

1-ből 2-esbe

$$E_{kin}(t_1) - E_{kin}(t_0) = W = \phi(r(t_0)) - \phi(r(t_1))$$ konz. erőtér!

$$\boxed{\underbrace{E_{kin}(t_1) + \phi(r(t_1))}_{E} = E_{kin}(t_0) + \phi(r(t_0))}$$

$\Rightarrow$ konzervatív erőtérben a kinematikus és pot. energia összege állandó

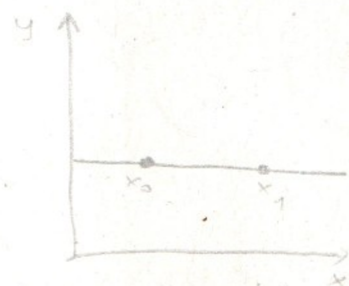
energiamegm. $E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(r)$

– F fv kiszámítása ϕ-ből $\leftarrow$ grad!
ha F helyett ϕ van megadva

2019. 10. 16.
sze 11. ea

• először: y, z rögzített

$r_0 = (x_0, y, z)$
$r_1 = (x_1, y, z)$
$\}$ $^{\times}$ hogy helyzet pot. egyszerűen legyenek



$$W = \int_{r_0}^{r_1} F(r)\,dr = -\left(\phi(r_1) - \phi(r_0)\right) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_x(x, y, z)\,dx =$$ ← x: változik, y és z áll.

$$= -\left(\phi(x_1, y, z) - \phi(x_0, y, z)\right)$$

Newton–Leibniz tétel értelmében $F_x = \phi'$

$$F_x(x,y,z) = -\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{y,z=áll.} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$ parc. derivált

• az összes komponensre:

$$\Rightarrow F(r) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla}\phi$$

az így előállított $F(r)$ konz. erőtér

∇ ϕ-n ható operátor
Nabla-operátor (ϕ gradiense)

$$\Rightarrow \boxed{F(r) = -\nabla\phi = -\text{grad}\,\phi}$$ ← ha ez teljesül, az erőtér konz.

$$\phi(r+h) - \phi(r) = -\int_r^{r+h} F\,dr = \int_r^{r+h} (\text{grad}\,\phi)\,dr \approx$$ ha h kicsi

$$\approx (\text{grad}\,\phi)\cdot h \approx \phi(r+h) - \phi(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r+h) \approx \phi(r) + (\text{grad}\,\phi)\,h}$$

$$f(x+h) \approx f(x) + \frac{df}{dx}h$$

derivált egyváltozós fvre

analógia: a grad a derivált szerepét játssza mezők esetén

↑ a változás legnagyobb, ha (grad ϕ) és h párhuzamos
a gradiens irányú változás a leggyorsabb
mert változás: (grad ϕ) vektor és h skalárszorzata

$$\text{grad}\,|\underline{r}| = \text{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(\frac{x}{|\underline{r}|}, \frac{y}{|\underline{r}|}, \frac{z}{|\underline{r}|}\right) = \underline{n} \Rightarrow \boxed{\text{grad}\,|\underline{r}| = \underline{n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{|\underline{r}|}$$

hossza 1

r irányú egységvektor!

legyen $f(|\underline{r}|)$ – gradiens?

$$\frac{\partial}{\partial x} f(|\underline{r}|) = \frac{df}{dr}\frac{x}{|\underline{r}|}$$

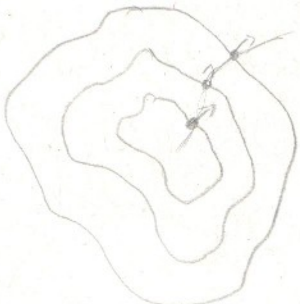
$$\Rightarrow \boxed{\text{grad}\, f(|\underline{r}|) = f'\,\underline{n}}$$

ekvipot. felületek gömbök

Centrális erőtér esetén $f(|\underline{r}|)$ – a pot. energia $|\underline{r}|$-től függ

energia és impulzusmomentum megmarad

- ekvipotenciális felületek: felület, melyen ϕ = áll.



az erő az ekvipotenciális felületre merőleges

→ erővonal – az erő az érintő irányába mutat

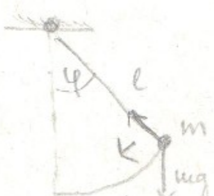
erővonal = az ekvipotenciális felület ortogonális trajektóriája

~~[illegible]~~

a grad merőleges az ekvipot. felületre

a grad irányában változik leggyorsabban a fv

- inga:



a kényszererő minden esetben merőleges az elmozdulás irányára

→ kötélerő kötélirányú – nagysága akkora, hogy a körmozgást fenntartsa

munkatétel:

$$\Delta E_{kin} = \Delta(mgz) + \underbrace{\underline{K}\,\Delta\underline{s}}_{0}$$

a kényszererő ellenére is

$\Delta E_{kin} = \Delta E_{pot}$ ~~zárt~~

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(\underline{r}) = \text{áll.}$$

virtuális munka elve:

a kényszererő mindig olyan, hogy a (lehetséges) elmozdulás felületen munkája 0

$\Rightarrow \underline{K} \perp f$ felület $\qquad \int \underline{K}\, d\underline{s} = 0$

$$\Delta W_{\text{kényszer}} = \underline{K}\,\Delta\underline{s} \equiv 0$$

ingamozgás leírása síkbeli polárkoord.-kal:

l = áll

$$E = \frac{1}{2}m(\underbrace{l\dot\varphi}_{v})^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \text{áll}$$

(E_{mozg}, E_{pot})

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(l\dot\varphi)^2 + gl(1-\cos\varphi) = \text{áll} \leftarrow \dot E(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}:\ \cancel{l}\cancel{\dot\varphi}\, l\ddot\varphi + g\cancel{l}\cancel{\dot\varphi}\sin\varphi = 0 \qquad \leftarrow \text{triviális mo.: } \dot\varphi = 0 \to \text{áll az alján}$$

$$\boxed{l\ddot\varphi = -g\sin\varphi} \sim -g\varphi \quad \text{ha } \varphi \text{ kicsi (nem lökjük meg nagyon)}$$

$$\boxed{l\ddot\varphi = -g\varphi} \quad \text{harmonikus rezgőmozgás}$$

$$\varphi = A\sin(\omega t + \alpha) \leftarrow \text{csak ha } \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

független A-tól és m-től

ha φ kicsi

harmonikus közelítés

rájött: Galilei a templomi csillárral

periódusidő áll.

1D-s mozgás

az 1D-s mozgás mindig konzervatív! => mindig érvényes az energiamegmaradás

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{d\phi}{dx}$$

mert létezik mindig ilyen $F(x)$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \phi(x) = E = \text{áll}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \phi(x)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E-\phi(x))$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}$$

$$\pm\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}} = 1$$

elsőrendű diffegy.
de minden E-hez meg kell mondani
E paraméter

$$\int_{t_0}^{t}$$

$$\pm\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}\frac{dx}{dt}\,dt = t - t_0$$

$$\boxed{t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x(t)}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}\,dx}$$

=> $t(x)$ fv!

ha a test rugóra van kötve:

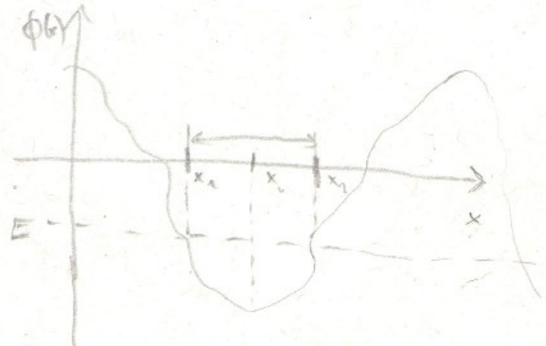
$$\phi(x) = \frac{D}{2}x^2$$

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{D}{2}x^2\right)}}\,dx$$

$\phi(x)$ parabola
-> arcsin x
=> harm. rezgőmozg.

(2019.10.21.
hét 12ea.)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(x)$$



ha a test energiája E
=> nem hagyhatja el az adott intervallumot (potenciálgödör) (hegyesebben alagúteffektus miatt mehet át kiz. esetben)

$$T = \int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}$$

ha x_0 közelében „beengedjük", a fv parabola => harmonikus rezgőmozg
akkor $\phi(x) \sim \frac{D^*}{2}(x-x_0)^2$ D^*-rugóáll. (effektív)

$$F(x) = -\frac{d\phi}{dx} = -D^*(x-x_0)$$

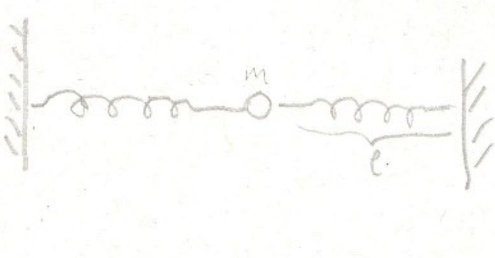
$$\boxed{D^* = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x=x_0}}$$

harmonikus közelítés

D^* a rugóáll.
bármilyen potenciálfv
a minimum közelében
harmonikus rezgőmozg.
= harmonikus közelítés

minimum: egyensúlyi helyzet

az energiaminimum környékén harm. rezgés

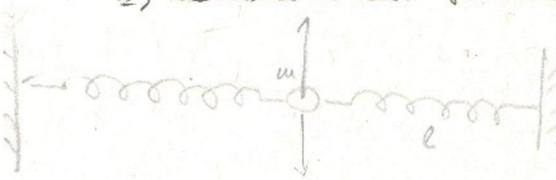


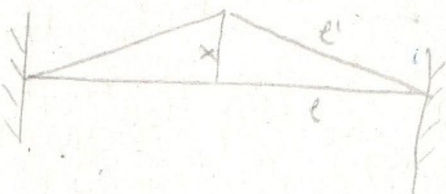
m tömegű test
l_0 nyugalmi hosszú rugók közt

$$F = D(l - l_0)$$

pl. m tömegű test l_0 nyugalmi hosszú rugó közt F megfeszítve két fal közé $l > l_0$
=> mekkora a kis frekvenciája?

$F = D(l - l_0)$





A testet kitérítjük a rugóra merőleges irányban

$$l' = \sqrt{x^2 + l^2}$$

$$\phi(x) = 2 \cdot \frac{D}{2}\left(\sqrt{x^2+l^2} - l_0\right)^2 \leftarrow \text{2-es szorzó mert 2 rugó van}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2D\left(\sqrt{x^2+l^2} - l_0\right) \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+l^2}} = 2D\left(x - \frac{l_0 x}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)$$

$$D^* = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 2D\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+l^2}} \cdot 1 + l_0 x \cdot \underbrace{\ldots}\right)$$

szorzat szerint deriváltunk $\left(\frac{l_0}{\sqrt{x^2+l^2}} \cdot x\right)$ kiszámolhatjuk, de csak az x = 0-ban kell a fv => ez a tag 0

x = 0 helyen

$$\Rightarrow D^* = 2D\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) = 2D\left(\frac{l - l_0}{l}\right)$$

$$\omega_T^2 := \frac{D^*}{2m} = \underbrace{\frac{2D}{m}}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) = \omega_L^2\left(1 - \frac{l}{l_0}\right)$$

longitudinális rezgési frekvencia : ω_L (megrezgetés a rugók irányában) $\boxed{\omega_L = 2 \cdot \frac{D}{m}}$ mert a két rugó eredő rugóállandója kétszerese az egyedülinek

=> a transzverzális rezgés frekvenciája mindig kisebb a longitudinálisnál

$F = D(l - l_0) \Rightarrow l = l_0 + \frac{F}{D}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_T^2 = \omega_L^2\left(1 - \frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}\right)}$$

$\frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}}$ ha $\frac{F}{D}$ kicsi

lineáris közelítés

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{l_0}{l_0 + x}\right) = -\frac{l_0}{(l_0 + x)^2} \xrightarrow[\text{helyen}]{x=0} \quad \frac{l_0}{l_0 + \frac{F}{D}} = 1 - \frac{F}{D l_0}$$

$$\Rightarrow \omega_T^2 = \omega_L^2 \frac{F}{D l_0} \Rightarrow \boxed{\omega_T \sim \sqrt{F}}$$

Bolygómozgás

- fogalmak

$F \sim \frac{1}{r^2}$ $\quad \underline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$ ← centrális erőtér ← pontszerű testek!

$\underline{F} = -\gamma \frac{m_s M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = m_t \underline{a}$

m_s: súlyos tömeg m_t: tehetetlen tömeg

$\underline{g} = \frac{\underline{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

gravitációs térerősség

gravitációs potenciális E

$\phi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

$-\mathrm{grad}\, \phi = -\mathrm{grad}\left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

=> a grav erőtér konzervatív, előáll egy ϕ negatív gradienseként

Potenciális energia helyett potenciál:

$u = -\gamma \frac{M}{r}$ $\qquad \underline{g} = -\mathrm{grad}\, u$

fv, melynek negatív gradienseként $\underline{g}$ előállítható

- konzervatív erőtér, síkmozgás

=> az adott síkban vett polárkoord-k

konz. erőtér => síkmozg. => energiamegm. => imp.mom. megm. területi sebesség áll.

$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r} = \text{áll}$ $\quad$ (elsőként: Nap áll → inerciarendsz)

+ a területi sebesség állandó az impulzusmegmaradás miatt!

$r^2 \dot\varphi = C$

$\underline{v} = \dot r \underline{e}_r + r\dot\varphi \underline{e}_\varphi$

⇓

$v^2 = \underline{v} \cdot \underline{v} = (\dot r)^2 + (r\dot\varphi)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + (r\dot\varphi)^2\right) - \gamma \frac{mM}{r}$

$\frac{2E}{m} = \dot r^2 + (r\dot\varphi)^2 - \frac{2\gamma M}{r}$

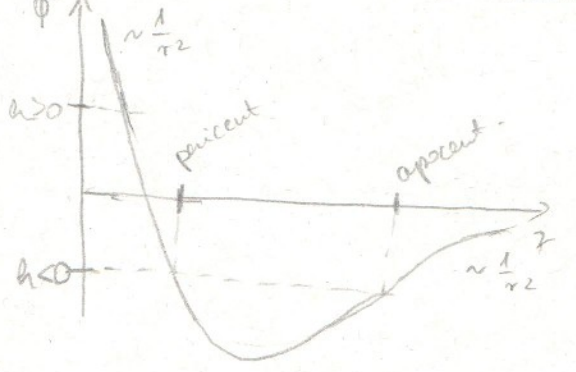
$$\boxed{\begin{aligned} \mu &:= \gamma M \\ h &:= \frac{2E}{m} \\ r^2\dot\varphi &= C \end{aligned}}$$

$h = \dot r^2 + (r\dot\varphi)^2 - \frac{2\mu}{r}$

$h = \dot r^2 + \underbrace{\left(\frac{C}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}}$ ← $\dot r$-ra nézve elsőrendű diffegy., ami független ϕ-től

effektív potenciál $\phi^*(r)$ (analitikusan nem megoldható!)

1D-s mozgás esetén energiatartalo



$\phi^*(r) = \left(\frac{C}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}$

a mozgás során r bele van szorítva a h által meghatározott intervallumba

az ellipszis peri- és apocentruma közé

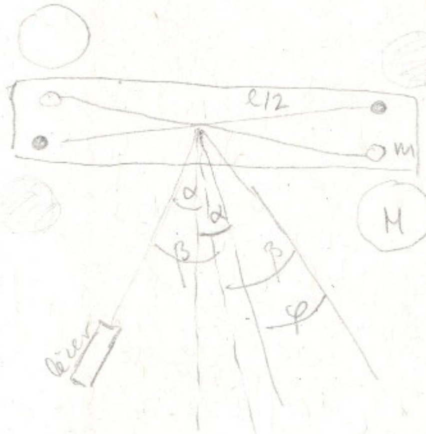
ha $h > 0$

van egy legkisebb távolság, amire meg tudja közelíteni a centrumot de ennél a minimumnál nem tud közelebb menni

=> nyílt pálya

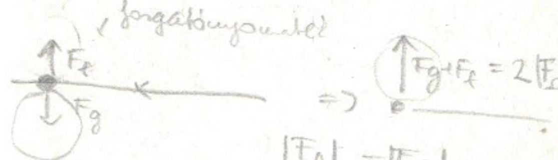
Cavendish-kísérlet

nagy tömegek áthelyezése
→ a szál elmozdul



$$2\alpha + \varphi = 2\beta \Rightarrow \varphi = 2(\beta - \alpha)$$

α, β - beesési merőlegessel bezárt szögek



$|F_t| = |F_g|$

12 cm 80s alatt

$\cos\varphi \approx 1 \quad \frac{s}{L} = 1$

parabolikus lába
alulról becsül
⇓
$6{,}38 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}$

$c = \mu a(1-e^2)$

metal.elte.hu/~tures/oktatas

$$(\dot r)^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}}_{\text{effektív potenciál}} = h \qquad h = \frac{2E}{m} \qquad \mu = \gamma M \qquad C = r^2\dot\varphi$$

területi sebesség: $\dot T = \frac{C}{2}$

$$\dot r = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$ ← $r(t)$ fv: az integrál analitikusan nem elvégezhető => vizsgáljunk meg egy redukált problémát

pályaegyenlet:

$r(\varphi)$ ← $r(t)$ helyett, de φ függ a t-től

$r(t) = r(\varphi(t))$ ~ közvetett fv deriválási szabály

$$\dot r = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$ ← ezt az integrált már ki lehet számítani!

$$h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2 =$$ ← A, B paraméterekkel átírható

$$= B - A^2 + 2A\frac{C}{r} - \frac{C^2}{r^2}$$

ekkor $h = B - A^2$ $\qquad \mu = AC$ $\qquad$ hogy az egyenlet eleje és vége egyenlő legyen

$\Rightarrow$ $B = h + \left(\frac{\mu}{C}\right)^2$ $\qquad A = \frac{\mu}{C}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2}$$

← belső fv deriváltja: $\frac{dr}{d\varphi}$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{C}{r}\right) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(A - \frac{C}{r}\right) = \pm\sqrt{B - \left(A - \frac{C}{r}\right)^2}$$

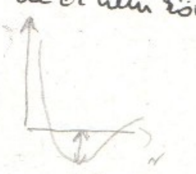
$$\frac{dK}{d\varphi} = \pm\sqrt{B - K^2}$$ ← mo.

$K(\varphi) := A - \frac{C}{r} = \frac{\mu}{C} - \frac{C}{r} = \sqrt{B}\cos\varphi$

$\boxed{K(\varphi) = \sqrt{B}\cos\varphi}$ ← B negatív, ha a $p(r)$ fv alatt van a pont, de ez nem következik be

$\Downarrow$

$\frac{C}{r} = \frac{\mu}{C} - \sqrt{B}\cos\varphi$



$$\Rightarrow r = \frac{C}{\frac{\mu}{C} - \sqrt{B}\cos\varphi} = \frac{C^2/\mu}{1 - \frac{\sqrt{B}C}{\mu}\cos\varphi} = \boxed{\frac{C^2/\mu}{1 - \varepsilon\cos\varphi} = r}$$

excentricitás:

$$\varepsilon := \frac{\sqrt{B}C}{\mu} = \frac{C}{\mu}\sqrt{\left(\frac{\mu}{C}\right)^2 + h} = \boxed{\sqrt{1 + \frac{C^2}{\mu^2}h} = \varepsilon}$$ ←

$\varepsilon > 1$ ha $h > 0$

$\varepsilon = 1$ ha $h = 0$

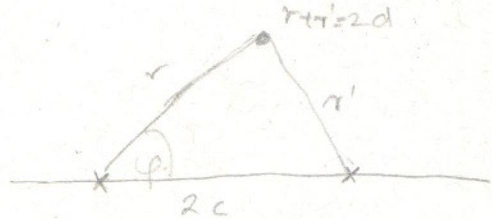
$\varepsilon < 1$ ha $h < 0$

= összevetve a köv. oldali levezetéssel

-> az égitestek kúpszelet pályákon mozognak

ellipszis polárkoord. egyenlete

ellipszis: azon pontok helye a síkon, melyek két ponttól vett távolságának összege áll.



cos-tétel:

$$r' = \sqrt{4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi}$$

$$2d = r + r' = r + \sqrt{4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi}$$

$$(2d - r)^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi$$

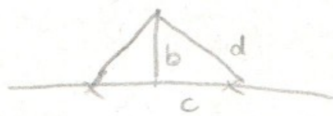
$$4d^2 - 4dr + \cancel{r^2} = 4c^2 + \cancel{r^2} - 4cr\cos\varphi \quad \leftarrow \text{r-re lineáris egyenlet}$$

$$\cancel{4}(d^2 - c^2) = \cancel{4}dr - \cancel{4}cr\cos\varphi$$

$$r = \frac{d^2 - c^2}{d - c\cos\varphi} = \frac{\frac{d^2-c^2}{d}}{d - \frac{c}{d}\cos\varphi}$$

$$\boxed{r = \frac{\frac{d^2-c^2}{d}}{d - \frac{c}{d}\cos\varphi}}$$

mikor a pont a fókuszpontokkal egyenlő szárú Δ-et zár be:



$$\Rightarrow \boxed{b^2 = d^2 - c^2} \quad \text{félkistengely (b)}$$

$$\varepsilon := \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{b^2}{d}}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \quad \xleftrightarrow{\text{hasonlítva}} \quad r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

ellipszis: $\varepsilon < 1$
hiperbolára hasonló alak, csak $\varepsilon > 1$
parabola: $\varepsilon = 1$

mikor a pont rajta van a nagytengelyen:

$2a = 2d$ félnagytengely (a)

$$\frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{\gamma M} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \gamma M} \Rightarrow \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}}$$

Kepler III.

$$\dot{T} = \frac{C}{2} = \frac{\pi a b}{T} \Rightarrow C = \frac{2\pi a b}{T}$$

Kepler II: impulzusmegm. → területi sebesség ← levezetés: 21-22.o.
↳ síkmozgás

Kepler I: ellipszispálya

Kepler III: a^3/T^2 az előzőek alapján

Kiterjedt testek gravitációs tere

2019. 11. 04.
hét 1ka.

$\phi(r) = -\gamma \frac{m}{r}$ ← grav. potenciál (NEM. pot. energia!!)

több test esetén szuperponálódnak
pontszerű testek esetén

$\Rightarrow \phi(r) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|r-r_i|}$ ← kicsit „elmossuk” a képet, hogy nagyobb egységekkel foglalkozhassunk

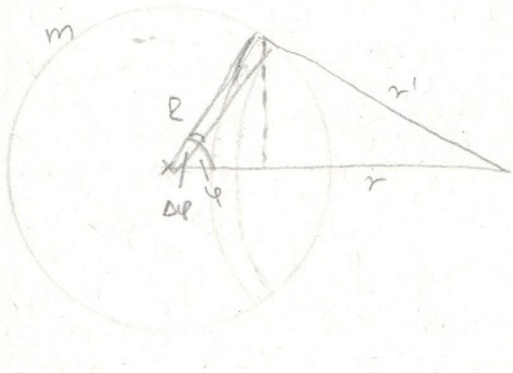
⇒ sűrűség bevezetése $\rho(r) = \frac{\Delta m}{\Delta V}$

átlagos mennyiség

$\Rightarrow \phi(r) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(r_i)\Delta V_i}{|r-r_i|} =$ ← V-t felosztjuk kicsi részekre, $N \to \infty$ integrál

$$\boxed{\phi(r) = -\int \gamma \frac{\rho(r')}{|r-r'|}\, dV'}$$ ← térfogati integrál

gömbhéjak grav. tere



gömbövek tömege → elosztjuk az adott térolsággal

← jó közelítéssel egy szalag

a gömböv térfogata:

$$\Delta A = \underbrace{2\pi R \sin\varphi}_{\text{alap}} \ \underbrace{R\,\Delta\varphi}_{\text{magasság}}$$

Δφ szög alatt látszik a középből a gömböv

$$\Delta m = m \frac{\Delta A}{4\pi R^2} = m \frac{\sin\varphi}{2} \Delta\varphi$$

cos-tétel:

$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\varphi}$ és $\varphi \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\gamma \int_0^{\pi} \frac{m}{2} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\varphi}}\, d\varphi \overset{*}{=}$$

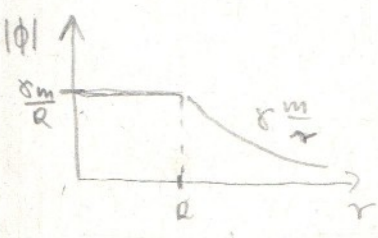
$$\frac{d}{d\varphi}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi} = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}Rr\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}$$ ← Rr-rel osztás után megkapjuk

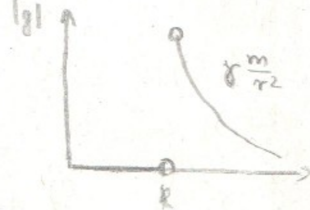
$$\overset{*}{=} -\frac{m}{2}\gamma \frac{1}{rR}\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{m}{2}\gamma\frac{1}{Rr}\left[|R+r|-|R-r|\right] = -\gamma\frac{m}{2Rr}\left[R+r-|R-r|\right]$$

$$\phi(r) = \begin{cases} -\gamma \frac{m}{r} & \text{ha } r > R \text{ gömbön kívül} \\ -\gamma \frac{m}{R} & \text{ha } R > r \text{ gömbön belül} \end{cases}$$

← mintha az egész tömeg a középben lenne

← konstans a potenciál!





|g|

r=R esetén nem deriválható
$g(R) = ?$ ← NEM $\frac{\gamma M}{2R^2}$!!
nem tudjuk megmondani
mert ∅ ∞ vékony gömbhéj
a finom részletek határozzák meg a fv átmenetét

|g| a gömbön belül mindenhol 0!
|g| gömbön kívül: egy pontba sűrűsödik

levezetés csak homogén tömegeloszlás esetén igaz!!

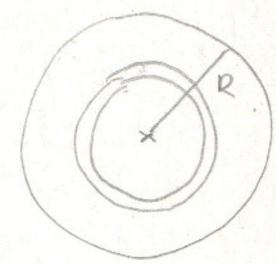
$$g(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

tömör gömb grav. tere

ϱ = áll., tömör, egyenletes sűrűségű gömb

grav. potenciál helyett számoljunk a grav. térerősséggel

felosztjuk gömbhéjakra



- ha $r > R$ gömbön kívül

  olyan, mintha az egész tömeg a középpontban lenne

  gömbövek összege miatt

  $$g(r) = \gamma \frac{4R^3\pi}{3}\varrho \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma 4\pi R^3 \varrho}{3 r^2} = \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho \frac{1}{r^2}$$

- ha $r < R$ gömbön belül

  kül. a belül és kívül lévő gömbövek hatása

  a külső gömbövek kiegyenlítik egymást (nem adnak járulékot)

  → csak a belsőket vizsgáljuk

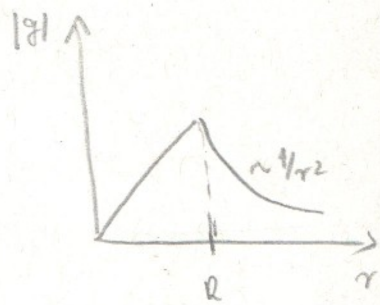
  $$g(r) = \gamma \frac{4\pi}{3} r^3 \varrho \frac{1}{r^2} = \gamma \frac{4\pi}{3} \varrho r$$

- tehát, az egész térre:

  $$g(r) = \begin{cases} \gamma \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho \frac{1}{r^2} & \text{ha } r > R \\ \gamma \frac{4\pi}{3} \varrho r & \text{ha } r < R \end{cases}$$

  ← kívül olyan, mintha a középpontban lenne a tömeg, $\sim 1/r^2$

  ← belül lineárisan nő a térerősség



- alagút a Föld közepén keresztül

  → harm. rezgőmozg.

  ferde alagút esetén is

-

- térerősség a világegyetemben:

  előre kritikusan függ a környező világ geometriájától

  pl. hol a gömb közepe (világ közepe)/kocka alak

  hol és hogyan zárjuk le a környező világot

  ⇒ a g meghatározhatatlan? paradoxon

- Olbers-paradoxon

- az entrópiának folyamatosan nőnie kéne

  de mégis vannak csill. halmazok, naprszer, ...

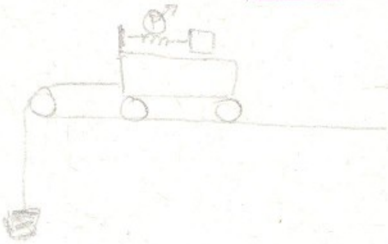
  a világ összentrópiája és térfogata is nő ⇒ lokális entrópia csökk.

- paradoxonok feloldása: táguló világegyetem, Hubble-tv

  nem lehet statikus a világ, mert ezzel az $1/r^2$-es tv ellentmond

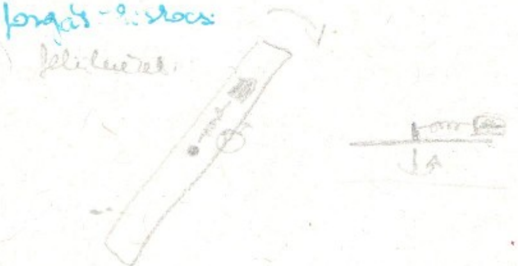
Inerciarsz, gyorsuló koordrszek

K



← a kicsi kiskocsira hat erő, de nem mozdul

K forgás - kiskocsi:
felülnézet:



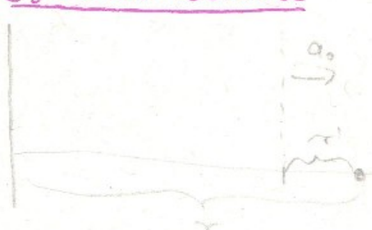
K

kamera forog a koronggal
=> a golyó görbült úton megy
(forgás nélkül egyenes)

K

golyót ráejtjük a lejtőre
-> ha forog az alap korong, ~~[illegible]~~ ellé [illegible]
hátrébb megy be a golyó

gyorsuló koordrsz



r: inerciarszbeli koord.
r': rezgő rszbeli koord.

$r = r' + \frac{a_0}{2} t^2$

ké egyenesvonalet kell bevezetni

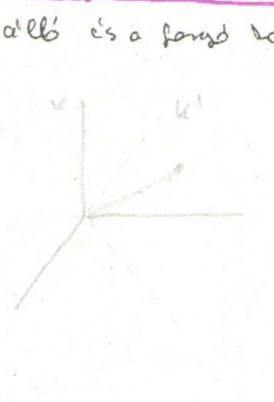
$a = a' + a_0$ ← $a = \frac{F}{m}$ mert inerciarszben

$\frac{F}{m} = a' + a_0$

$\Rightarrow ma' = F - ma_0$ ← már csak a gyorsuló koordrszbeli, mérhető mennyiségek szerepelnek benne

elforgatott koordrsz

az álló és a forgó koordrsz kezdőpontja közös K: álló K': elforgatott



a távolság K és K'-ben:

$\underline{r}$
$\underline{r}'$

$\underline{r} = \hat{O}\, \underline{r}'$ $\hat{O}$ - forgatásoperátor ← r-től függő adatokat visz át koordinátákra

$\hat{O} \cdot \tilde{\hat{O}} = \hat{I}$ hossztartó

ha folyamatosan forog K' => $\hat{O}$ függ az időtől

$\underline{r} = \hat{O}\, \underline{r}' \Rightarrow \underline{r}(t) = \hat{O}(t)\, \underline{r}'(t)$

inerciarszbeli sebesség ↗ $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\hat{O}}{dt} \cdot \underline{r}'(t) + \hat{O}(t) \frac{d\underline{r}'}{dt}$ $/ \cdot \tilde{\hat{O}}$ ← inverz = transzpon.

$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{\hat{O}}(t) \cdot \underline{r}'(t) + \hat{O}(t)\, \dot{\underline{r}}'(t)$

$\tilde{\hat{O}}\,\underline{v} = \tilde{\hat{O}}\,\dot{\hat{O}}\,\underline{r}'(t) + \underline{v}'$ (*) $\leftarrow \underline{v}' = \frac{dr'}{dt}$ és $\hat{O}\cdot\tilde{\hat{O}} = \hat{1}$

az inerciarendszerbeli sebesség a forgó koordrendszerbeli adatokkal kifejezve számításokkal

$\boxed{\hat{\Omega} := \tilde{\hat{O}}\cdot\dot{\hat{O}}}$

$\tilde{\hat{O}}\,\hat{O} = \hat{1}$ ← deriváljuk, mert függnek az időtől

$\frac{d}{dt}\tilde{\hat{O}}\,\hat{O} = 0 \Rightarrow \underbrace{\dot{\tilde{\hat{O}}}\,\hat{O}}_{\sim} + \underbrace{\tilde{\hat{O}}\,\dot{\hat{O}}}_{\hat{\Omega}} = 0 \rightarrow \tilde{\hat{\Omega}} + \hat{\Omega} = 0$

$\left[(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{\sim} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{\underline{A}}}\right] \xrightarrow{\text{transzp.}} \widetilde{(\dot{\tilde{\hat{O}}}\,\hat{O})} = \tilde{\hat{O}}\cdot\dot{\hat{O}} = \hat{\Omega} \Rightarrow$ eredeti: $\tilde{\hat{\Omega}}$

hátra és transzponált — előre és transzponált

$\Downarrow$

$\hat{\Omega}$: 3x3-as, antiszimmetrikus mx

3 db független komponens

(példában 0-k)

$$\boxed{\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: $\underline{\omega}$ komponensei

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \underline{\omega}\times\underline{r} \checkmark$$

$\hat{\Omega}\,\underline{r}' = \underline{\omega}\times\underline{r}'$ és $\boxed{\hat{\Omega}\,\underline{r} = \underline{\omega}\times\underline{r}}$

(*) $\tilde{\hat{O}}\,\underline{v} = \tilde{\hat{O}}\,\dot{\hat{O}}\,\underline{r}'(t) + \underline{v}' = \hat{\Omega}\,\underline{r}'(t) + \underline{v}' = \underline{\omega}\times\underline{r}' + \dot{\underline{r}}' = \boxed{\underline{\omega}\times\underline{r}' + \underline{v}' = \tilde{\hat{O}}\,\underline{v}}$

egy antiszimm. 3x3 mx-szal való szorzás megfeleltethető egy megfelelő vektorral való vektorszorzatnak

inerciarendszerbeli seb. forgókoordrendszerben leírva

$\omega_i = \varepsilon_{ijk} A_{kj}$ $\qquad \varepsilon_{ijk}$ – permutációs mx (Levi-Civita)

gyorsulás

újabb deriválással megkapható a gyorsulás, de hosszadalmas

operáció bevezetése:

$\frac{d'}{dt} = \underline{\omega}\times + \frac{d}{dt}$ ← inerciarendszerbeli derivált

$\underline{a} = \left(\underline{\omega}\times + \frac{d}{dt}\right)\left(\underline{\omega}\times\underline{r}' + \frac{dr'}{dt}\right) =$ ← inerciarendszerbeli gyorsulás: a forgó koordrendszerbeli adatokkal megadva

$= \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + \underline{\omega}\times\underline{v}' + \underline{a}' + \underbrace{\frac{d}{dt}(\underline{\omega}\times\underline{r}')}_{\beta\times\underline{r}' + \underline{\omega}\times\underline{v}'} \Rightarrow$ ← ω is függhet az időtől

$\beta := \frac{d}{dt}\underline{\omega}$

$\underline{\omega}$: mindkét koordrendszerben ugyanaz a deriváltja (β)

$\underline{a} = \underline{a}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2(\underline{\omega}\times\underline{v}') + \underline{\beta}\times\underline{r}'$

$\underline{F} = m\underline{a}' + m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2m\,\underline{\omega}\times\underline{v}' + m\underline{\beta}\times\underline{r}' + m\underline{a}_0$ ← mert a mozgó koordrsz gyorsulhat az inerciarendszerhez képest

↑ az F erőt a forgó koordrszbeli adatokkal kell megadni

$\Rightarrow m\underline{a} = \underline{F} - m\underline{a}_0 - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) + 2m\,\underline{v}\times\underline{\omega} + m\,\underline{r}\times\underline{\beta}$ ← hagyjuk el a vesszőket, mert minden adat a forgó koordrszben van megadva

$\Rightarrow$ 4 db tehetetlenségi erő

azok az erők, amiket csak a gyorsuló koordrszben érzékelünk

$\underline{F}$: valódi erő a koordrszben

~~$m\underline{a}' = \underline{F}' - m\underline{a}_0 - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) + 2m\underline{v}\times\underline{\omega} + m\,\underline{r}\times\beta$~~

$$m\underline{a} = \underline{F} - m\underline{a}_0 - \underbrace{m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{-m\omega^2\underline{s}\ \text{centrif.}} + \underbrace{2m\,\underline{v}\times\underline{\omega}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m\,\underline{r}\times\underline{\beta}}_{\text{Euler}}$$

koordsz. gyors.-ából származó

Coriolis-erő: ha v sebességgel halad a koordsz.

Euler-erő: ha gyorsul a koordsz. forgása $\omega \neq$ áll.

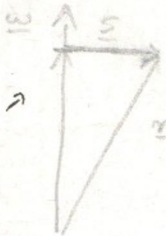
$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = -(\underline{a}\underline{c})\underline{b} + (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = -(\underline{\omega}\,\underline{r})\underline{\omega} + (\underline{\omega}^2)\underline{r}$$ ← ω és r irányú komponens

$$\Rightarrow \underline{F}_c = -m(\omega^2)\underline{r} + m\underbrace{(\underline{\omega}\,\underline{r})\underline{\omega}}_{\omega\text{ irányú komponense}} = -m\omega^2\underline{s}$$

ωs^2: $\underline{r}$-nek ω irányú komponense

centrifugális erő



$\underline{s}$: a pont távolsága a forgástengelytől, kifelé mutat különbségvektor

tehetetlenségi erőben tehetetlen tömeg
grav. F helyén → súlyos tömeg

$$\boxed{m\underline{a} = \underline{F} - m\underline{a}_0 + m\omega^2\underline{s} + 2m\underline{v}\times\underline{\omega} + m\underline{r}\times\underline{\beta}}$$

$\Rightarrow$ a centrifugális és a Coriolis-erő
centrif.: kifelé Coriolis: befelé mutat $\Rightarrow$ forgó koordrendben ülő megfigyelő
külső pontot figyelve
$F = m\omega^2 s$ befelé
$\Rightarrow$ Coriolis-erő

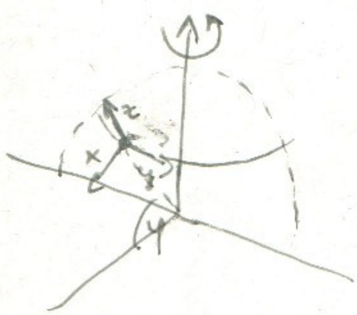
Foucault-inga: első kísérleti bizonyíték, hogy forog a Föld
a Coriolis-erő megmérése

egyéb következményei:

- szél def. nyugatról fúj $\Rightarrow$ ha fellé repülünk rövidebb idő, mint hátrafelé

Jelenségek a forgó Földön – szabadesés

2019.11.11.
hét 16. ea



z: függőleges irány
x: hosszúsági körön
y: szélességi körön

Szabadon ejtsünk le egy testet

$$\cancel{m}\underline{a} = m\underline{g} + \cancel{m\omega^2\underline{s}} + 2\cancel{m}\,\underline{v}\times\underline{\omega}$$

↑ benne F_{cf}

$$\underline{a} = \underline{g} + 2\,\underline{v}\times\underline{\omega}$$

a szereplő vektorok komponensei:

$\underline{g} = (0, 0, -g)$
$\underline{\omega} = (\omega\cos\varphi, 0, \omega\sin\varphi)$
$\underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$
$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$\underline{v}\times\underline{\omega}$ komponensei:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{vmatrix}$$

$$\underline{v}\times\underline{\omega} = (\dot{y}\,\omega\sin\varphi,\ -\dot{x}\,\omega\sin\varphi - \dot{z}\,\omega\cos\varphi,\ \dot{y}\,\omega\cos\varphi)$$

– mozgásegyenletek:

$\ddot x = 2\dot y\,\omega\sin\varphi$

$\ddot y = -2\dot x\,\omega\sin\varphi - 2\dot z\,\omega\cos\varphi$

$\ddot z = 2\dot y\,\omega\cos\varphi - g$

ezt kell megoldani
az ilyen formájú egyenletek
mindig egzaktul megoldhatóak

– deriváljuk még egyszer $\ddot y$-t

$\dddot y = -2\ddot x\,\omega\sin\varphi - 2\ddot z\,\omega\cos\varphi =$

$= -2\cdot 2\omega\sin\varphi\,\omega\sin\varphi\,\dot y - 2\cdot 2\omega\cos\varphi\,\omega\cos\varphi\,\dot y + 2g\omega\cos\varphi =$

$\dddot y = -4\omega^2\dot y + 2g\omega\cos\varphi$ ← csak y-tól függő egyenlet! $\dddot y$ és $\dot y$ szerepel benne

$$\underbrace{\underbrace{\ddot v_y = -4\omega^2 v_y}_{\text{harm. rezgőmozg.}} + 2g\omega\cos\varphi}_{\text{eltolt egyensúlyi helyzetű harm. rezgőmozg.}}$$

visszahelyett.:
$-4\omega^2 A\cos(2\omega t+\psi) =$
$= -4\omega^2 A\cos(2\omega t+\psi) - 4\omega^2 B + 2g\omega\cos\varphi$

=> mo.:

$v_y = A\cos(2\omega t+\psi) + B$ ← $2\omega = \sqrt{4\omega^2}$, ψ: fázis

$a_y = -2\omega A\sin(2\omega t+\psi)$

– ψ=? => nem csak $v_y(0)$-t, de $a_y(0)$-t is ismernünk kell
harmadfokú diff.egyenlet => 3 szabad paraméter

ha kezdetben minden irányú sebesség 0, $a_y(0)$ is 0 kell legyen ← $\ddot y = \ldots$ egyenlet miatt

$a_y(0) = 0 = -2\omega A\sin(2\omega\cdot 0+\psi)$ ← sin=0

=> $\psi = 0$

=> $v_y = A\cos(2\omega t) + B$ $\quad\Rightarrow \ddot v_y = -4\omega^2 A\cos(2\omega t)$

$a_y = -2\omega A\sin(2\omega t)$

– B=?

$\ddot v_y = -4\omega^2 v_y + 2g\omega\cos\varphi \Rightarrow -4\omega^2 A\cos(2\omega t) = -4\omega^2 A\cos(2\omega t) - 4\omega^2 B + 2g\omega\cos\varphi$

$\Rightarrow -4\omega^2 B + 2g\omega\cos\varphi = 0$

$B = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$

$\Rightarrow v_y = A\cos(2\omega t) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$

– A=?

A=1, mert $v_y(0)=0$

$\Rightarrow v_y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\underbrace{(1-\cos(2\omega t))}_{t=0 \Rightarrow 0}$ ← de az eredeti feltételben elhanyagoltuk az ω^2-tel arányos centrifugális erőt => fizikailag inkorrekt

valódi részlet: ωt kicsi:
$\omega = \frac{2\pi}{P}$ P – földperiódus
t – esés ideje

$v_y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$ $\qquad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ ha $|x| \ll 1$

$v_y = \frac{g\cos\varphi}{\cancel{2}\cancel{\omega}}\,\frac{\cancel{4}\omega^{\cancel{2}} t^2}{\cancel{2}} = g\cos\varphi\,\omega t^2$

$\Rightarrow \boxed{v_y = g\cos\varphi\,\omega t^2}$

$y = \int v_y \frac{d}{dt} = \boxed{\frac{g\cos\varphi\,\omega}{3} t^3 = y}$

z irányban szabadon esik

$\boxed{z = h - \frac{g}{2}t^2}$ $\quad \Leftarrow$ eredeti $\ddot z$-s egyenletben ω rendig $\ddot z = -g$

x irányban 0 $\Leftarrow$ $\ddot x$-s egyenlet miatt

$\boxed{x = 0}$

$h = 100$ m magasról leejtve $\Rightarrow y = 1{,}5$ cm

$\Rightarrow$ ez a kísérlet a Föld forgásának bizonyítására alkalmatlan

Foucault-inga

- eredetileg: 1850's. Pantheonban 65 m hosszú inga
- eldönthető kérdés: inerciarendszerben vagyunk-e vagy nem
- ingán $\Rightarrow$ a kötélben fellépő erőt is figyelembe kell venni
- $\ddot x = 2\dot y\,\omega\sin\varphi + \lambda x$ $\qquad$ kötélerő: nagyságát nem ismerjük, de kötélirányú

  $\ddot y = -2\dot x\,\omega\sin\varphi - 2\dot z\,\omega\cos\varphi + \lambda y$

  (*) $\ddot z = 2\dot y\,\omega\cos\varphi - g + \lambda z$
- és $x^2 + y^2 + z^2 = l$

  $z = \pm\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = \pm l\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}}$ $\qquad \frac{x^2+y^2}{l^2} \ll 1$

  $\Rightarrow z \approx -l$ ha elég hosszú a kötél

  ha $z =$ konst $\Rightarrow \dot z = 0 \Rightarrow \ddot z = 0$ és $\dot y \simeq 0$
- $\Rightarrow$ (*). $0 = -g - \lambda l \Rightarrow \lambda = -\frac{g}{l}$ kötélerő nagysága

$\ddot x = 2\dot y\,\omega\sin\varphi - \frac{g}{l}x$

$\ddot y = -2\dot x\,\omega\sin\varphi - \frac{g}{l}y$ $\qquad \Leftarrow \omega_1 := \omega\sin\varphi$

$$\ddot x = 2\dot y\,\omega_1 - \frac{g}{l}x$$
$$\ddot y = -2\dot x\,\omega_1 - \frac{g}{l}y$$

ha $\omega = 0$ $\quad \ddot x = -\frac{g}{l}x$ $\Rightarrow$ harmonikus rezgőmozgás $\sqrt{\frac{g}{l}}$ frekvenciával

$\ddot y = -\frac{g}{l}y$ $\Rightarrow$ —"—

két azonos frekvenciájú, merőleges rezgés

$\Rightarrow$ ellipszispálya (kúpinga)

$\ddot{x} - 2\omega_1 \dot{y} + \frac{g}{l} x = 0 \quad / -1 = i i$

$\ddot{y} + 2\omega_1 \dot{x} + \frac{g}{l} y = 0 \quad / \cdot i$ cmpx

forog a koordrsz
=> a két szabad rezgés öcsatolódik
az egyikben megjelenik a másik deriváltja

$\ddot{x} + i 2\omega_1 i \dot{y} + \frac{g}{l} x = 0$

$+ \; i\ddot{y} + i 2\omega_1 \dot{x} + \frac{g}{l} i y = 0$ $\qquad z := x + iy$

$$\ddot{z} + 2\omega_1 i \dot{z} + \frac{g}{l} z = 0$$

– $z = A e^{i\lambda t}$ alakban keressük $\quad \frac{d}{dt^2}$

$-\lambda^2 z - 2\omega_1 \lambda z + \frac{g}{l} z = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\omega_1 \lambda - \frac{g}{l} = 0$ –t ha λ kielégíti, akkor van valós mo.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 + \frac{4g}{l}}}{2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}}$$ ← $\frac{g}{l}$ – rezgés frekvenciája, $\frac{g}{l} \gg \omega_1$

$\lambda_{1,2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}}$ => lineárt is mo.

$z = A_1 e^{i\left(-\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t} + A_2 e^{i\left(-\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)t}$ =>

$$\boxed{z = e^{-i\omega_1 t}\left(A_1 e^{i\sqrt{g/l}\,t} + A_2 e^{-i\sqrt{g/l}\,t}\right)}$$ ← A_1, A_2 – ismeretlen cmpx számok

– kezdőfelt.

$z(0) = a \quad$ ha $x(0) = a$ és $y(0) = 0$

$\dot{z}(0) = 0 \quad$ ha kezdetben állt

=> $t = 0$-ban

$z(0) = a = A_1 + A_2 \quad$ ← mert exp kitevők is 0-k

deriváljuk z-t és $\dot{z}(0) = 0$ → exp eltűnik

$\left(-\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{l}}\right) A_1 + \left(-\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{l}}\right) A_2 = 0$

$-\omega_1 \underbrace{(A_1 + A_2)}_{a} + \sqrt{\frac{g}{l}}(A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = a \\ A_1 - A_2 = \frac{-\omega_1 a}{\sqrt{g/l}} \end{cases}$ $\oplus$ $\ominus$

$2A_1 = a\left(1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right) \Rightarrow A_1$

$2A_2 = a\left(1 - \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right) \Rightarrow A_2$

$$z = \frac{a}{2} e^{-i\omega_1 t}\left[\left(1 + \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right) e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \left(1 - \frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}\right) e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right] \Rightarrow$$

$$z = \underbrace{a e^{-i\omega_1 t}}\left[\underbrace{\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)} + i \underbrace{\frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}} \sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)}\right]$$ ← valós rész: x irányú mozg. képzetes rész: y – " –

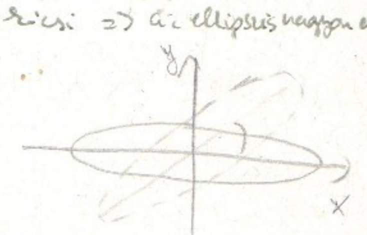
⇓

harm. rezgőmozg. $\sqrt{\frac{g}{l}}$ frekvenciával

ellentétes fázisban rezeg $\frac{\omega_1}{\sqrt{g/l}}$ – szeres amplitúdóval
nagyon kicsi => az ellipszis nagyon elnyúlt

az egész rsz
ω_1 frekvenciával fordul

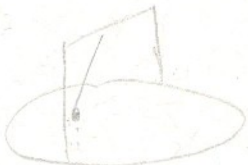
=> nagyon elnyúlt ellipszis forog



sohasem sík mozgás, hanem elnyúlt ellipszis
y irányú sebességet is kap, mert a forgó rsz-ben
állva indítottuk el => y irányú kitérés adódik ...

④ mi forgatjuk

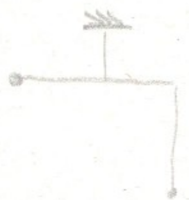
2019. 11. 12.
kd 17h



Eötvös 1848 – 1919

- tehetetlen és súlyos tömeg ekvivalenciája
- geofizikus

- apja oktatásügyi miniszter
- egyetem: Heidelberg, jog után ott fizika
  utána itthon pár éven belül prof → Jedlik Ányostól átvette a kísérleti fizika tanszéket
- első kutatás: felületi feszültség hőmérsékletfüggése
  ⇒ felületi fesz.: $\alpha \sim (T_c - T)$ T_c – krit. hőm.
  Eötvös-együttható
  megnézzük az egyensúly a folyadék és gőz közt
  ⇒ ezen a hőm-en megszűnik a felületi fesz.
- a Föld grav. terének precíziós vizsgálata



torziós szál: nagyon vékony
forgatónyomaték hat
gravitációs térerősség változásának mérése

jelentőség: kőolaj + Alföld alatti hegyek
ált. üregben helyezkedik el
→ nagy felfedezések
ma már drágább eltrachang

nehézségi erőtérben mozgás

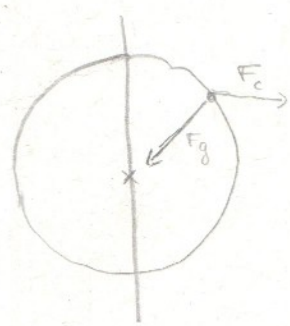
$m_t g = m_g g$

m_t – tehetetlen tömeg old. szerint
m_g – gravitációs (súlyos) tömeg
⇒ nem feltétlenül ua. ez a két tömeg
jó közelítéssel biztosan egyező kísérleti tapasztalat alapján
pl. Galilei-inga, Kepler III.
= lehet, hogy a grav. áll. függ az anyagminőségtől?

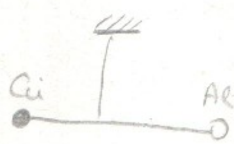
⇒ 19. sz. végén felhívás, hogy mérjék meg ⇒ pályázat: Eötvös

a forgó Földön:

A Földön a testre ható erők eredőjében mindkét féle tömeg megjelenik



ha függ az anyagi minőségtől, a torziós szál elfordul →



de nem tudhatják, hogy nem fordul
⇒ fordítsuk meg a két tömeget

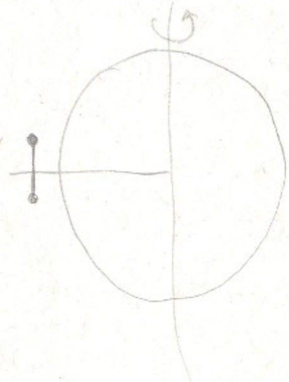
= 8 jegy pontossággal, 8 minden anyagra azonos
szisztematikus hiba a 9. jegyben ⇒ 5. erő? → megcáfolták

tengeren, hajón mérve: 5. jegyben szisztematikus hiba
a hajó is mozog ⇒ Coriolis-erő ← Eötvös-effektus

Legyen Egyenlítőn a mérleg

egyik test forgási sebessége hozzáadódik a Földéhez

=> a távolódó test nehezebb lesz a közeledő könnyebb



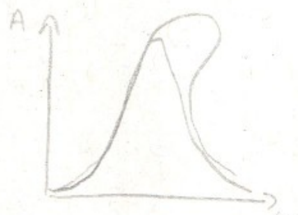
a lézerfény kört ír le

majd a forgás leállítása után billeg a mérleg

kényszerrezgés => rezonanciagörbe

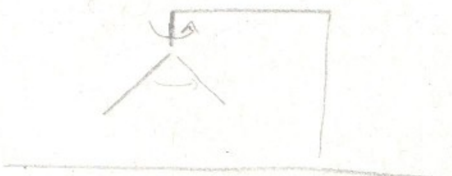
rezonancia módszer a Föld forgásának kimutatására

rezonanciagörbe:



← torzulhat:
egy adott frekvenciához két érték tartozik
nemlineáris rezonancia jelenség
=> egyszer annyi, egyszer annyi az amplitúdó

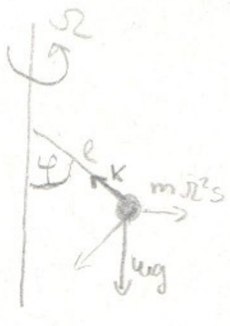
Inga tengelyét forgatjuk – egyensúly



rögzített síkú inga tengelyét forgatjuk

kis frekvencia alatt a függőlegeshez tér vissza

utána kúpmozgás, nem a függőleges körül



$s = l \sin\varphi$

a 3 erő eredőjével mozog

a kényszererőt nem ismerjük, de abban az irányban nem is mozog, kompenzálja

a kényszererő merőleges az elmozdulásra

kényszererő összmunkája 0

(Euler-erő ∅ mert $\beta = 0$ és Coriolis-erő kicsi)

érintő irányú komponens:

$$F_\varphi = \underset{\text{befelé}}{-mg \sin\varphi} + \underset{\text{kifelé mutat}}{m\,\Omega^2 (l \sin\varphi)\cos\varphi} = m\,a_\varphi = m\,l\,\ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi\cos\varphi$$ ← kis szögek esetén $\sin\varphi \approx \varphi$

van-e egyensúlyi helyzet $\neq 0$, amikor tartós gyorsulás 0

$$-\frac{g}{l}\sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\sin\varphi\left(\Omega^2\cos\varphi - \frac{g}{l}\right) = 0$$ => $\varphi = 0$ egyensúly

$$\Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{g}{l\Omega^2}$$

kezdetben Ω kicsi => $\cos\varphi_0 > 1$ lenne, tehát nem létezik

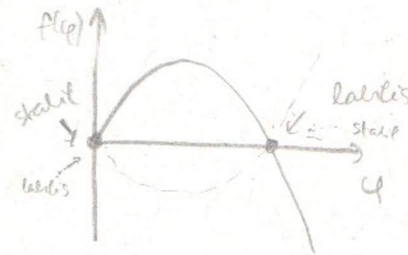
feltétel: $\Omega^2 > \frac{g}{l} =: \omega_0^2$ ← a lengés körfrekvenciája

=> ha kellő sebességgel forgatjuk, nem csak a függőleges az egyensúlyi helyzet!

labilis vagy stabil egyensúlyi helyzet?

az erő vissza akarja-e állítani vagy nem?

erőváltozás kitérítés esetén poz. vagy neg.?



=> hogy változik a fv az egyensúlyi helyzet környékén?

deriválás ← derivált poz. vagy neg.

$$f(\varphi) = -\omega_0^2 \sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{df}{d\varphi} = -\omega_0^2 \cos\varphi + \Omega^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$ ← majdnem $\cos 2\varphi$ (2-es szorzó hiányzik)

$\varphi = 0$-ban:

$$\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = -\omega_0^2 + \Omega^2$$ => ha $\Omega < \omega_0$ => negatív => stabil egy.

ha $\Omega > \omega_0$ => poz. => labilis

φ = másikban:

$$\left.\frac{df}{d\varphi}\right| = -\omega_0^2 \cos\varphi_0 + \Omega^2 (2\cos^2\varphi_0 - 1) = \quad \leftarrow \cos\varphi_0 = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

$$= -\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} + \Omega^2\, 2\left(\frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - 1\right) = -\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} + 2\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} - \frac{\Omega^4}{\Omega^2} = \frac{\omega_0^4}{\Omega^2} - \frac{\Omega^4}{\Omega^2} = \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2}$$

=> $\Omega > \omega_0$ => neg => stabil

= kellően nagy Ω esetén ez lesz a stabil egyensúlyi helyzet

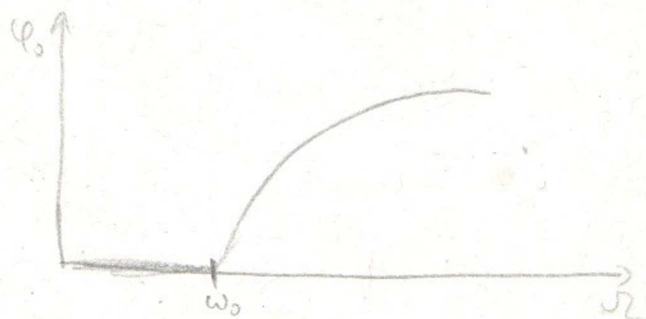
a mozgásegyenlet az egyensúlyi helyzet körül:

$$\ddot{\varphi} = \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)$$

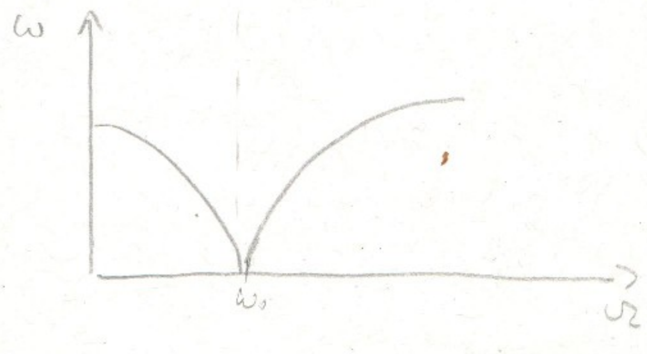
$$\omega^2 = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}$$

I	II
$\varphi_0 = 0$	$\cos\varphi_0 = \frac{g}{l\Omega^2}$
$\frac{df}{d\varphi} = -\omega_0^2 + \Omega^2$	$\Omega^2 > \frac{g}{l} = \omega_0^2$
$\omega^2 = \Omega^2 - \omega_0^2$	$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2} < 0$
	$\omega^2 = \frac{\Omega^4 - \omega_0^4}{\Omega^2}$

az egyensúlyi helyzet Ω fvében:



ha $\omega = 0$ => lengésidő ∞



← kritikus lelassulás

Kéttest-probléma

Kéttest-probléma: a testek közti kölcsönhatás csak a relatív távolságtól függ

$$(1)\ m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$
$$(2)\ m_2 \underline{a}_2 = \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = -\underline{F}_{21}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$
6 db diff.egyenlet

$$+$$

$$\Rightarrow m_1 \underline{a}_1 + m_2 \underline{a}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2)}_{} = 0$$

$\frac{d}{dt} = 0 \Rightarrow$ áll. $\Rightarrow$ a rendszer összimpulzusa áll. $\underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \text{áll.}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{(m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2)}_{} = 0$$

ez az idő lineáris fv.-e kell legyen

$$\Rightarrow m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = \underline{A}t + \underline{b}$$

tkp. def.: $\boxed{\underline{r}_0 = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}} = \ldots = \frac{\sum m_i \underline{r}_i}{M}$! $\Rightarrow \underline{v}_0 = \frac{\sum m_i \underline{v}_i}{M}$

$\ddot{\underline{r}}_0 = 0 \Rightarrow$ a tkp gyorsulása 0 $\leftarrow \boxed{M \ddot{\underline{r}}_0 = 0} \Rightarrow \underline{r}_0$ egyenes von. egy. mozg.

$M = m_1 + m_2$ jelölés

$$(1)\ \ddot{\underline{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$
$$\ddot{\underline{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{m^*}} \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \qquad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

redukált tömeg

Vezessünk be relatív koordinátát:

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{m_* \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}(\underline{r})}$$ ← egytest-problémára visszavezettük
$\Rightarrow$ kéttest-prob. ekvivalens az egytest-prob.-val

- bolygómozgás: engedjük a Napot is mozogni
  - $\Rightarrow$ közös tkp körüli mozgás

  $m_* \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{mM}{r} \frac{\underline{r}}{r} \Rightarrow \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m+M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

  egyedül Kepler III. tv.-e módosul ← M helyett $(m+M)$, bolygó tömege is számít

  gravitációs potenciál megváltozik

  M helyett $(m+M)$ ← mintha erősebb erőtér körül mozogna a bolygó (energiaszintek is megváltoznak)

  hasonló: H-atom és deutérium esetén elektron mozgásában másként vannak az energiaszintek
  $\Rightarrow$ spektrumban megkülönböztethető a kettő

K palack-rakéta - alkoholgőz
K szódapatronos rakéta

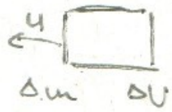
palack rakéta - alkoholgőz

szódapatron

$m_1 + m_2$ effektív tömeg / redukált tömeg
a tömegközéppont körül is külön-külön ellipszis pályán keringenek egymással átellenben → tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozg.

Ha megengedjük, hogy a Nap is mozogjon
Egyedül Kepler III. tv.-e módosul
$\Rightarrow m_1 + m_2$

Rakétamozgás



u sebességgel áramlik ki Δm és ΔV üzemanyag

$m\Delta v + \Delta m u = 0$ impulzusmegm.

← Δm negatív a rakéta szempontjából

$m\Delta v = -u\Delta m$

$\Delta v = -u\frac{\Delta m}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$

$$v(m) = \int_{m_0}^{m} -\frac{u}{m}\,dm = \boxed{u \ln\frac{m_0}{m} = v(m)}$$ Tsiolkovsky-rakétaegyenlet

⇒ nem számít a tömegveszteség jellege, csak a kezdeti és pillanatnyi tömeg

Sörtest-probléma

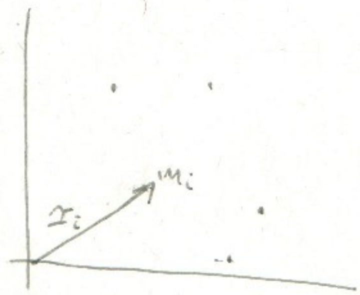
ált. esetben nagyon bonyolult = spec. esetek: ⇒ merev test ⇒ termodinamika ⇒ folytonos közegek } új mennyiségek bevezetése szükséges

kölcsönható pontok

Pontrendszerek

- szuperpozíció elve

tömegpont fogalma, hogy ne legyen belső struktúra, így alkalmazható a szuperpoz. elve



N db tömegpont

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \underline{K}_{ij}$$ ← az i-edik test mozgásegyenlete

külső erő; az az erő, amivel a j-edik az i-re hat

numerikus mo. – pl. molekuladinamika

i-kre összeadva a mozgásegyenleteket:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{i,j} \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij} = \sum_{j,i}^{N} \underline{K}_{ji} = \left(-\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij}\right)$$

felcserélhető indexek; Newton III.

megegyezik -1-szeresével $\Rightarrow \sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij} = 0$!

a mozgásegyenlet független a belső erőktől, csak a külső erők összegétől függ

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i\right)}_{\text{a rendszer összimpulzusa}} = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} = \frac{d}{dt}\underline{p}}$$

⇒ a rendszer összimpulzusának idő szerinti deriváltja megegyezik a külső erők összegével

a belső erők nem befolyásolják (Newton III.)

ha ∅ külső erő, az összimpulzus megmarad

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$$

tömegközéppont definíciója: $$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M} = \underline{r}_0}$$

$$\boxed{M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}}$$ ⇒ a tömegkp. mozgását a belső erők nem befolyásolják

$$\boxed{\underline{v}_0 = \frac{\sum m_i \underline{v}_i}{M}}$$

imp.mom.: szorozzuk meg előről vektoriálisan r_i-vel a mozgásegyenletet!

$$\underbrace{r_i \times m_i \ddot{r}_i}_{} = r_i \times F_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} r_i \times K_{ij}$$

forgatónyomaték (impulzusmomentum idő szerinti deriváltja)

$$\frac{dN_i}{dt} = M_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{N} r_i \times K_{ij}$$

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{(k)} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ i=1}}^{N} r_i \times K_{ij}}_{\text{0 ha centrális}}$$

ha a belső erők centrálisak $K_{ij} \parallel r_i - r_j$

$\Rightarrow$ a belső erők összforgatónyomatéka 0

$$\sum_{i,j} r_i \times K_{ij} \overset{\text{indexcsere}}{=} \sum_{i,j} r_j \times K_{ji} \overset{\text{Newton III}}{=} -\sum_{i,j} r_j \times K_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(r_i - r_j) \times K_{ij}$$

$$2\sum_{i,j} r_i \times K_{ij} = \sum_{i,j}(r_i - r_j) \times K_{ij}$$

$r_i - r_j$: relatív koord.

$\Downarrow$

a rendszer összimpulzusmomentumát csak a külső forgatónyomatékok határozzák meg (centrális erőtér)

imp.mom.-t nem tudja megváltoztatni de θ-t igen $\Rightarrow$ ω-t is!

| 2019.11.20.
| Sze 19. ea.

(1) $$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{(k)}$$ $\leftarrow$ centrális erőtér

(k): külső erő forgatónyomatéka

– másik koordrendszerbe téve impulzusmom. és forgatónyom. is megváltozik

$$N = \sum_{i=1}^{N} r_i \times m_i v_i$$

tkp: r_0, v_0 — írjuk fel helyét és sebességét is a tkp-hoz viszonyítva

$$\left.\begin{aligned} r_i &= r_0 + \varrho_i \\ v_i &= v_0 + \dot{\varrho}_i \end{aligned}\right\}$$

$$N = \sum_{i=1}^{N} (r_0 + \varrho_i) \times m_i (v_0 + \dot{\varrho}_i) = \underbrace{\overset{\text{1. tag}}{r_0 \times M v_0}}_{\substack{\Sigma \text{ miatt} \\ \text{pályaimpulzusmom.} \\ \text{csak a tkp adatai}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times m_i \dot{\varrho}_i}_{\text{sajátimp.mom.}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times m_i v_0}_{\substack{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \varrho_i\right) \times v_0 \\ \text{leosztva } M\text{-mel: a} \\ \text{tkp. koordrendszerben a tkp} \\ \text{helyzete } 0 \Rightarrow \text{a tag } 0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} r_0 \times m_i \dot{\varrho}_i}_{\substack{r_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\varrho}_i\right) \\ \text{hasonlóan} \\ \text{sebesség } 0}} \Rightarrow$$

• pályaimp.mom.: a pontrsz. összimpmom-a, ha az összes tömeget a tkp-ba sűrítenénk

• sajátimp.mom.: koordrsz megválasztásától független, mert csak a tkp-hoz képesti relatív koordtól és seb-től függ

$$\boxed{N = r_0 \times M v_0 + N_s}$$

$r_0 \times M v_0$: a tkp imp.mom-a, pályaimp.mom.; N_s: saját imp.mom.

$$\boxed{N_s = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times m_i \dot{\varrho}_i}$$

– (1) $$\frac{d}{dt}(r_0 \times M v_0) + \frac{dN_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times F_i^{(k)} = r_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} F_i^{(k)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times F_i^{(k)}$$

$$M r_0 \times \ddot{r}_0 + 0 + \frac{dN_s}{dt} = r_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} F_i^{(k)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times F_i^{(k)}$$

a tkp-i rendszerből nézve a külső erők forgatónyomatéka

egyenlők!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times F_i^{(k)}}$$ $\leftarrow$ a tkp-i rendszerben felírva

de a tkp-i rsz nem biztos, hogy inerciarsz

a tehetetlenségi erők összforgatónyomatéka 0

mert ez az ő függés mindig igaz

Kinetikus energia

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} \underline{K}_{ij} \quad / \cdot v_i$$

$$m_i \underline{v}_i \ddot{\underline{r}}_i = v_i \underline{F}_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} \underline{v}_i \underline{K}_{ij}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i}{2} \underline{v}_i^2\right)}_{\text{összkin. energia}} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\uparrow\ \text{teljesítmény}}{P_i} + \sum_{j \neq i} v_i \underline{K}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \sum_{i=1}^{N} P_i + \underbrace{\sum_{i,j} \underline{v}_i \underline{K}_{ij}}$$

majd nem lesz 0
a belső erők végeznek munkát
„reggeliztünk-e már"

=> kiintegrálva:

$$\boxed{\Delta E_{kin} = W^{(k)} + W^{(b)}}$$

$W^{(k)}$: külső erők munkájának összege
$W^{(b)}$: belső — " —

ha az összes külső és belső erő is konzervatív
=> külső és belső erők összpotenciálja áll.

$$\boxed{E = E_{kin} + \sum_i \phi_i^{(k)}(r_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \phi_{ij}^{(b)}(r_i, r_j)}$$

← $\frac{1}{2}$-es szorzó, mert minden párt 2-szer beszámol

E - időben áll. pontrendszerre vonatkozó energiamegm.

Kényszerfeltétel ∀ pontpárra:
merev test esetén két tetszőleges pont távolsága áll. belső erők miatt
=> az összes belső erő kényszererő, hogy ezt teljesítse
a kényszererők összmunkája 0!
=> ha a pontok távolsága áll., az utolsó tag ∅

$$\boxed{E = E_{kin} + \sum_i \phi_i^{(k)}(r_i)}$$

← összenergia:
kin. energia
külső erők helyzeti energiája } összege

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{v}_0 + \dot{\underline{\rho}}_i)^2 = M\frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\rho}}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (m_i \dot{\underline{\rho}}_i \underline{v}_0)}_{\to\ \underline{v}_0\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\rho}}_i\right)} =$$

tkp sebessége
tkp-i koordinátákban → 0

$$= \underbrace{M\frac{v_0^2}{2}}_{\text{pálya}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\rho}}_i^2}_{\text{forgási energia}}$$

pálya
tkp E_{kin}-ja

forgási energia
(saját kin. energia)
csak a tkp-i sebességtől függ

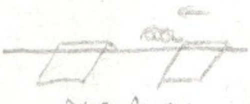
$$\Rightarrow \boxed{E_{kin} = M\frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\rho}}_i^2}$$

spec. problémák: → merev testek
↳ ütközések

Ütközések

(K) „Newton bölcsője"

(K) légpárnás ütközések
teljesen rugalmas / rugalmatlan



rugalmas

rugalmatlan

- Szórási kísérlet:
  - elektronmikroszkóp ← belövünk valamit, és mi jön
  - CERN is — cél: kölcsönhatás felderítése
  - Rutherford-kísérlet

ismert:
- két test tömege
- v ütk. előtt
- v ütk. után

} mi történt?

centrális ütközés: a testek tkp-ja és az ütközési pont egy egyenesen

konzervatív erőtér ⇒ rugalmas

- tömeg ne változzon most

$$m_1 \quad \underline{v}_1^{(i)} \qquad\qquad \underline{v}_1^{(f)}$$
$$m_2 \quad \underline{v}_2^{(i)} \longrightarrow \underline{v}_2^{(f)}$$

← 6 adat (2·3 komp.)

(i): initial

(f): final

- imp. megm.:

$$\text{(I)}\quad m_1\underline{v}_1^{(i)} + m_2\underline{v}_2^{(i)} = m_1\underline{v}_1^{(f)} + m_2\underline{v}_2^{(f)}$$

← 3 egyenlet (3 komp.)

rugalmas ütk.: a két test közti kölcsönhatás konzervatív

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^2 + \phi_{1,2} = \text{konst}$$

ha nagyon messze vannak egymástól, ϕ_{12} = konst
∞-ben potenciál 0
⇒ kezdeti és végső kin. energia megegyezik

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{2}m_1v_1^{(i)2} + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^{(i)2} = \frac{1}{2}m_1\underline{v}_1^{(f)2} + \frac{1}{2}m_2\underline{v}_2^{(f)2}$$

← 1 egyenlet

⇒ összesen 2db szabad paraméter marad a 6-ból
4db rögzített

- tkp-ban: tkp rendszerbeli sebesség: $\underline{v}_1'$

$$\underline{v}_1' = \underline{v}_1 - \underbrace{\frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2}}_{\text{tkp sebessége}} = \frac{(m_1+m_2)\underline{v}_1 - m_1\underline{v}_1 - m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} = \boxed{\frac{m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1'}$$

- impulzus tkp-i rben:

$$\underline{p}_1' = m_1\underline{v}_1' = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \boxed{m_*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{p}_1'}$$

← 2-es indexre hasonló felírható

tkp-i rben az összimpulzus 0 ⇒ $\boxed{\underline{p}_2' = -\underline{p}_1'}$ a 2-es testre tkp-i rben

$$\underline{p}_2' = -m_*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

- energiamegm.:

$$\frac{1}{2}\frac{p_1'^{(i)2}}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_2'^{(i)2}}{m_2} = \frac{1}{2}\frac{p_1'^{(f)2}}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_2'^{(f)2}}{m_2}$$

← $p_1'^2 = p_2'^2$

$$\frac{1}{2}\frac{p_1'^{(i)2}}{m^*} = \frac{1}{2}\frac{p_1'^{(f)2}}{m^*} \Rightarrow \boxed{p_1'^{(i)2} = p_1'^{(f)2}}$$

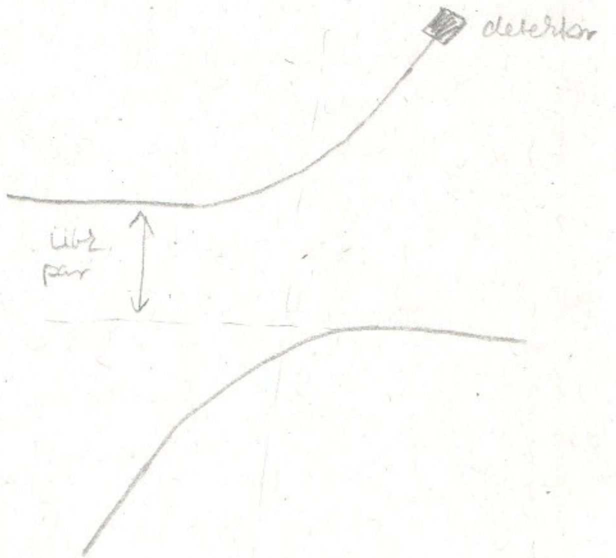
tkp-i rendszerben

⇒ a kezdeti és végső vektor hossza ugyanaz

$$|\underline{p}_1'^{(i)}| = |\underline{p}_1'^{(f)}| = m_*|\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}| = |\underline{p}_2'^{(i)}| = |\underline{p}_2'^{(f)}|$$

$$|\underline{p}_2'^{(i)}| = |\underline{p}_2'^{(f)}|$$

$\Rightarrow$ rugalmas ütk. tkpi rendszerben:



a kimenő impulzus:

$$\boxed{\underline{p}_1'^{(f)} = |\underline{p}_1'^{(i)}|\,\underline{n}}$$

$\underline{n}$ – egységvektor
mert csak az irány változik
minden információ ebben az egységvektorban rejlik

2019.11.25.
hét 20.ea.

$p_1^{(f)} = |p_1^{(i)}| \cdot \underline{n}$ $\quad$ $\underline{n}$ – egységvektor

$p_2'^{(f)} = -p_1'^{(f)}$

$|p_1'^{(i)}| = m^* |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}| \Rightarrow$ $\quad \underline{v}_1'^{(f)} = \frac{m_2}{m_1+m_2} |v_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}| \cdot \underline{n}$

$\underline{v}_2'^{(f)} = \frac{m_1}{m_1+m_2} |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}| \cdot \underline{n}$

a laborrendszerben:

$$\underline{v}_1^{(f)} = \frac{m_2}{m_1+m_2} |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}|\, \underline{n} + \frac{m_1 v_1^{(i)} + m_2 v_2^{(i)}}{m_1+m_2}$$

$$\underline{v}_2^{(f)} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}|\, \underline{n} + \underbrace{\frac{m_1 v_1^{(i)} + m_2 v_2^{(i)}}{m_1+m_2}}_{v_0}$$

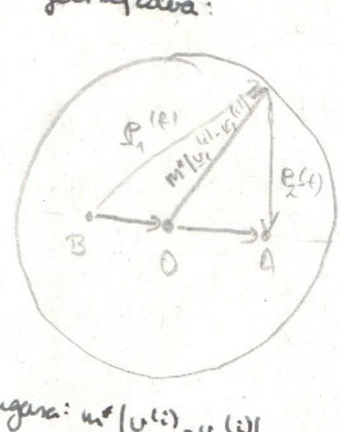
az impulzusok:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{p}_1^{(f)} &= m^* |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}|\, \underline{n} + \frac{m_1}{m_1+m_2} (p_1^{(i)} + p_2^{(i)}) \\ p_2^{(f)} &= -m^* |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}|\, \underline{n} + \frac{m_2}{m_1+m_2} (p_1^{(i)} + p_2^{(i)}) \end{aligned}}$$

$\vec{OA} := \frac{m_2}{m_1+m_2} (p_1^{(i)} + p_2^{(i)})$ $\quad$ ← vegyük fel így A és B pontot

$\vec{BO} := \frac{m_1}{m_1+m_2} (p_1^{(i)} + p_2^{(i)})$

(ütközési diagram)
felrajzolva:



kör sugara: $m^* |\underline{v}_1^{(i)} - \underline{v}_2^{(i)}|$

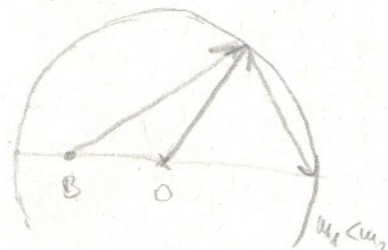
ha úgy választjuk a koordrsz-t, hogy $p_2^{(i)} = 0$ ← álló targetra lövünk

$\Rightarrow \vec{OA}$ vége a körön van

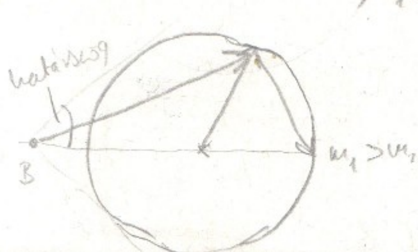
ekkor $\vec{BO} = \frac{m_1}{m_2} \vec{OA}$

ha $m_1 < m_2 \Rightarrow$ B a körön belül van $\quad$ van $\Rightarrow$ visszaszórás

$m_2 < m_1 \Rightarrow$ B a körön kívül

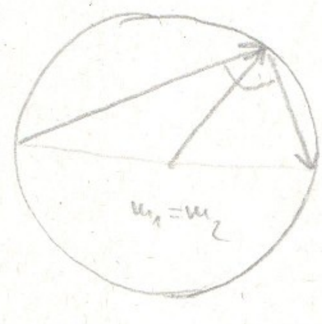


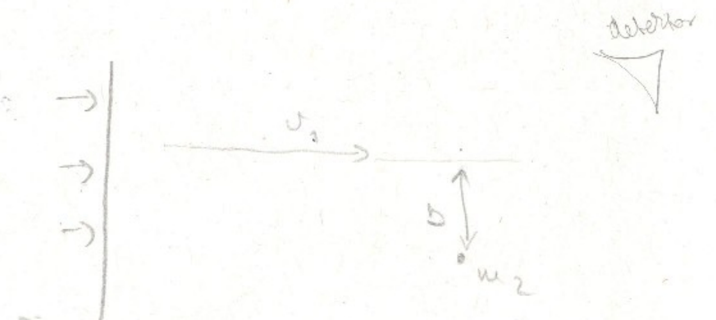
az eredeti iránytól való eltérülésnek van egy határszöge, ha $m_2 < m_1$ annál jobban nem tud szóródni



ha $m_1 = m_2$

$\Rightarrow$ a két test sebessége
$\perp$ egymásra





b - ütközési paraméter

egytest - problémára visszavezethető

MEREV TESTEK

16. ea. 23. min

- a test tetszőleges két pontjának távolsága nem változik meg ← az összes belső erő kényszererő
- a kényszererők összmunkája 0 ← a semmiből nem keletkezik energia
  a belső erők összmunkája 0
- ha 3 pontját megadjuk a testnek, pontosan tudjuk, hogy hol van
  3 × 3 koordinátával adható meg egyértelműen
  de a pontok koordinátái fixek, összefüggés van közük $\Rightarrow$ -3 szükséges adat
  $\Rightarrow$ a merev test helyzetéhez 6 db adat kell $\Rightarrow$ 6 db egyenlet (pontosan, se több, se kevesebb)

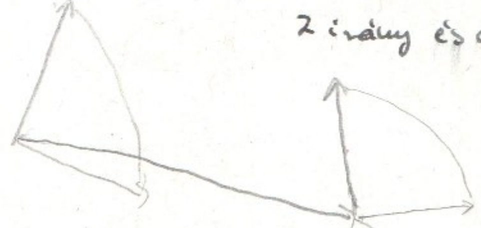
$M\ddot{r}_0 = \sum_{i=1}^{N} F_i^{(k)}$ 3 db ← össztömeg · tkp gyorsulása = külső erők összege

$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i^{(k)}$ 3 db ← impulzusmom. deriváltja = külső forg. nyomatékok összege

ezekben szerepelnek a kényszererők és azok forgatónyomatékai is - ált. nem ismerjük

- hogy adjuk meg egy merev test mozgását?

2 irány és az általuk bezárt szög



kitüntetjük egy pontját
→ vizsgáljuk ennek a pontnak az elmozdulását
és az elfordulást $\Rightarrow$ elegendő!

$$\boxed{\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r}_0 + \Delta \varphi \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

kicsi elfordulás esetén
nagy szögek esetén forgatásoperátorral kell számolni

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \boxed{\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

$\Rightarrow$ merev test tetszőleges pontjának sebessége
6 adattal adható meg
kitüntetett pont sebessége és ω

$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{\varrho}$

$\underline{v} = \underline{v}_0' + \underline{\omega}' \times \underline{\varrho}'$ ← egy másik pontot választva ($\underline{r}_0'$)

legyen $\underline{r}_0 = \underline{r}_0' + \underline{a}$

$$\left.\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{\rho} \\ \underline{v} &= \underline{v}_0' + \underline{\omega}' \times \underline{\rho}' \end{aligned}\right\} \quad \underline{r} = \underline{r}' + \underline{a} \Rightarrow \underline{\rho} - \underline{\rho}' = \underline{a}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{\rho}' + \underline{a}) = \underbrace{\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{a}}_{\underline{v}_0'} + \underline{\omega}' \times \underline{\rho}' \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}' = \underline{\omega} \; !!$$

a szögsebességvektor független attól, hogy melyik pontot tolják el (melyik pontot választjuk)

- sajátimp.mom.: $\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times m_i \dot{\underline{\rho}}_i$

ha a tkp-ot választjuk $\Rightarrow$ tkp-i rsz $\Rightarrow \underline{v}_0 = 0$

$\Rightarrow \dot{\underline{\rho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i$

merev testre:

$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times (m_i (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i)) =$ ← ω-nak lineáris fv-e
két ω összege esetén imp.mom. is összeadódik, számmal szorzásra is igaz

$= \hat{\Theta} \underline{\omega}$ ← $\hat{\Theta}$: tenzor

$N_{s_i} = \Theta_{ij} \omega_j$ ← $\sum_{j=1}^{3}$-ig szummát nem írjuk ki

$\sum_{i=1}^{3} \Theta_{ij} \omega_j$ Einstein-konvenció

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$

$\underline{\rho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) = (\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i)\underline{\omega} - (\underline{\rho}_i \underline{\omega})\underline{\rho}_i = (\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i)\hat{1}\underline{\omega} - (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i)\underline{\omega} =$

$\hat{1}$: egységtenzor

$= ((\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i)\hat{1} - (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i))\underline{\omega}$ ← még meg kell szorozni m_i-vel és összegezni

$$\boxed{\underline{N}_s = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{\rho}_i \underline{\rho}_i)\hat{1} - (\underline{\rho}_i \circ \underline{\rho}_i)\right)\right)}_{\hat{\Theta}} \underline{\omega}}$$

$\hat{\Theta}$: tehetetlenségi nyomaték tenzor

$\rho_i \rho_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$

jelölés: $\underline{\rho}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $\quad \rho_i \circ \rho_i = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

- $\Rightarrow \hat{\Theta}$ komponensei:

$$\boxed{\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2), & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i, & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i, & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2), & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i, & \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i, & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}}$$

diagonális elemek: $y_i^2 + z_i^2$ ← x tengelytől való távolság

← szimmetrikus mx

$\Rightarrow$ sajátértékei valósak

$\Rightarrow$ felírható a mx a sajátvektorok által alkotott koordrszben, ahol csak a diagonális elemek határozzák meg a komponenseket az off-diagonális elemek 0-k

a diagonális elemek pozitívak

$\Rightarrow$ a sajátértékek valósak és nemnegatívak

sajátértékek: $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ $\quad \wedge \quad \Theta_1 \geq 0$, $\Theta_2 \geq 0$, $\Theta_3 \geq 0$ ← 0, ha a komponens vonal-szerű

$\underline{a}\hat{\Theta}\underline{a}$ is nemnegatív

akármilyen $\underline{a}$-ra = pozitív definit (akármilyen vektorral kétoldalt megszorozva az eredmény nemnegatív)

így ezzel $\underline{a}$-t is sajátrszben

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \Theta_1 a_1^2 + \Theta_2 a_2^2 + \Theta_3 a_3^2 \quad \geq 0$$

- kinetikus energia: tkp mozgási energ. + forgási energ

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\underline{s}}_i \dot{\underline{s}}_i}_{E_f} \quad \leftarrow \text{merev teste} \quad \dot{\underline{s}}_i = \underline{\omega} \times \underline{s}_i$$

$$\Rightarrow E_f = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\underline{\omega} \times \underline{s}_i) \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{s}_i)}_{:= \underline{c}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\underline{s}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{s}_i)) \underline{\omega} =$$

← hármasszorzat ciklikusan permutálható

$$\left[(\underline{\omega} \times \underline{s}_i) \underline{c} = (\underline{s}_i \times \underline{c}) \underline{\omega} = (\underline{s}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{s}_i)) \underline{\omega} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{s}_i \times m_i (\underline{\omega} \times \underline{s}_i) \right) \underline{\omega} = \boxed{\frac{1}{2} \underline{N}_s \underline{\omega} = E_f} \quad \text{forgási energia}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_f = \frac{1}{2} \underline{\omega} \hat{\Theta} \underline{\omega}} \quad \geq 0 \quad (\text{poz. definit } \hat{\Theta})$$

- a tehetetlenségi nyomaték függ az időtől

$$\underline{N}_S = \hat{\Theta}(t) \underline{\omega}(t)$$

⇒ külső forgatónyomatékok összege $\hat{\Theta}$ deriváltjától is függ

2019.11.26.
Ke 21.ea

$$M \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \qquad \underline{N}_s = \hat{\Theta} \underline{\omega}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)} \qquad \frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'^{(k)}$$

← a mozgásegyenletet $\underline{F}_i$-k és $\underline{M}_i$-k befolyásolják

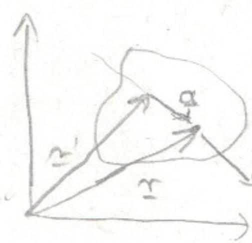
tolj'uk el a tetszőleges erőt a hatásvonal mentén
$\underline{r} = \underline{r}' + \underline{a}$ $\quad$ $\underline{a}$ – eltolás vektor

forgatónyomaték:

$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{r}' \times \underline{F} + \underbrace{\underline{a} \times \underline{F}}_{0}$$

⇓

az erő a hatásvonala mentén eltolható ⇒ keressük az eredő erőt!



$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} = \underline{F}$$

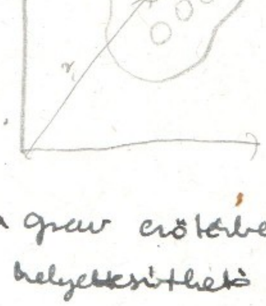
$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i'^{(k)} = \underline{r}_0 \times \underline{F} \qquad \underline{M} = \underline{r}_0 \times \underline{F} \quad \Rightarrow \underline{F}\,\underline{M} = 0$$

$$\underline{F}(\underline{r}_0 \times \underline{F}) \equiv 0$$

⇒ csak akkor helyettesíthetünk eredő erővel, ha az összforg. nyom. és erő ⊥

- helyezzük gravitációs térbe a testet

felosztjuk m_i darabokra



$$\text{erők: } \underline{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{g} = M\underline{g}$$

$$\text{forg. nyom. } \underline{M} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times m_i \underline{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \right) \times \underline{g} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{M}}_{\text{súlypont } r_0} \times M\underline{g} = \underline{r}_0 \times \underline{G}$$

← ahol a helyettesítő erőnek hatnia kell

a grav erőtérben 1 erővel helyettesíthető

→ a súlypontban hat Mg

ha g nem vehető konstansnak a test kiterjedése során, nem áll fenn ez az egyenlőség

⇒ a tkp csak akkor egyezik meg a súlyponttal, ha homogén erőtér

$r_{kp}: \sum_{i=1}^{N} m_i r_i / M$

Súlypont: az, amivel vektoriálisan kell szorozni ~~...~~ G-t, hogy az összforgatónyomaték 0 legyen

≠ nem egyeznek meg, csak homogén erőtérben

merev test egyensúlya

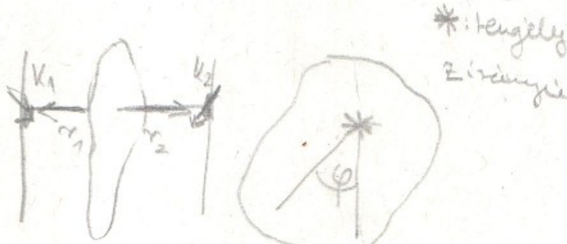
nem változik egyensúly → impulzusmom. 0 ← forgatónyomatékok összege is 0
↳ gyorsulás 0 ← erők

Stabil / indifferens / labilis egyensúlyi helyzet

inga: dartalan merev test forog egy rögzített tengely körül
pörgettyű: 1 pont körül forog

Merev testek tengely körüli forgása

$M \dot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$ $\quad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}$



↑ tengely rögzített ⇒ $\varphi(t)$ megadása elegendő ⇒ 1 egyenlet elég
de van már 6 egyenletünk!
a tengely rögzítési pontjainál kényszererők lépnek fel

vegyük fel a koordrszt a tengely mentén
kényszererők forgatónyomatéka: pl. $K_1 \times r_1$
vektorszorzatnak $\emptyset$ ~~z~~ z-irányú komponense
$(r_2 \times K_2)_z \equiv 0$

⇒ az ismeretlen kényszererők forgatónyomatékának $\emptyset$ z irányú komponense

⇒ válasszuk ki: $\boxed{\frac{dN_z}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}\right)_z}$ ← így már ténylegesen csak a külső erők forgatónyomatéka jelenik meg

$\underline{M} = \hat{\Theta}^* \underline{\omega}$ ← a 3. komponens: $M_3 = \hat{\Theta}^*_{3i} \omega_i$ ← Einstein-konvenció miatt nem írjuk ki Σ-t

$\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$ $\Rightarrow M_3 = \hat{\Theta}^*_{33} \omega$

csak z irányú komponens

merev test tetszőleges pontjának ~~...~~ sebessége:

$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{r}$

ha a koordrsz a tengelytől van mérve ⇒ $\underline{v}_0 = 0$

$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \hat{\Theta}^* \underline{\omega}$ ← $\hat{\Theta}^*$: alakilag ua., mint $\hat{\Theta}$ ⇒ visszamenőleg át kell írni $\hat{\Theta}$-t $\hat{\Theta}^*$-ra

↑ *: tengelyhez rögzített koordrsz jelölése

$$\frac{dN_3}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} M_i^{(k)}\right)_3$$

ha Θ_{33} nem lenne konstans $\frac{d}{dt}\Theta_{33}\omega$ bonyolult szorzatderivált kell; komponense Θ-nak időfüggő, mert forog a test $\Rightarrow \Theta(t)$ és $\omega(t)$

$$\Theta_{33}^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{(x_i^2+y_i^2)}_{l_i^2}$$ l_i-tengelytől vett távolság

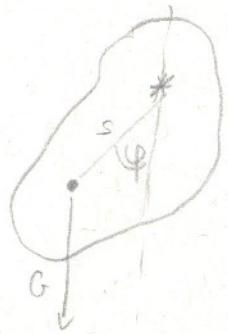
ez a komponens független az időtől

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Theta_{33}^{*}\omega$ elvégezhető

$$\frac{d}{dt}\Theta_{33}^{*}\omega = \Theta_{33}^{*}\dot{\omega} \leftarrow \dot{\omega}=\beta \Rightarrow \Theta_{33}^{*}\beta = M_z$$

$$\boxed{\Theta_{33}^{*}\ddot{\varphi} = M_z(\varphi)}$$

a gravitációs erőtérben forogjon a tengely körül ← fizikai inga



G: súlypontban hat

φ: tengelyben függőleges és súlypont iránya által bezárt szög

$\Rightarrow$ G forgatónyomatéka:

$$M(\varphi) = -G s \sin\varphi$$

kis φ esetén:
$$\ddot{\varphi} = -\frac{Gs}{\Theta_{33}}\varphi$$
$$\omega^2 = \frac{Gs}{\Theta_{33}}$$

$$\Rightarrow \Theta_{33}^{*}\ddot{\varphi} = -G s \sin\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{Gs}{\Theta_{33}}\sin\varphi}$$

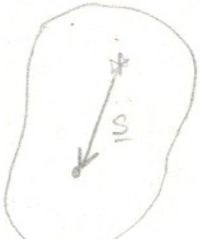
ha pontszerű testet tekintünk ki (inga) ← matematikai inga

$$m l \ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

ugyanolyan formájú a mozgás, mint a fizikai inga esetén

eredetileg 6db egyenlet volt,
ebből 1-et használtunk fel $\Rightarrow$ a maradék 5-ből a kényszererők kiszámolhatók
a konkrét mozgáshoz nem kell az 5 egyenlet

Steiner-tétel



z ~~tengely~~ irány legyen a forgástengellyel párhuzamos

$$\hat{\Theta}_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\rho_{1i}^2+\rho_{2i}^2) \qquad \underline{r} = \underline{\rho} + \underline{s}$$

$$\hat{\Theta}_{33}^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2+y_i^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i\left((\rho_{1i}+s_1)^2+(\rho_{2i}+s_2)^2\right) =$$

Steiner-tétel:

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i(\rho_{1i}^2+\rho_{2i}^2)}_{\Theta_{33}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i(s_{1i}^2+s_{2i}^2)}_{M s^2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}(2\rho_{1i}s_1+\rho_{2i}s_2)m_i}_{0\text{, mert súlyponttól vett koordináta } 0}$$

$$\boxed{\Theta_{33}^{*} = \Theta_{33} + M s^2}$$

ha ferdén forgatunk át egy testet → elforgatjuk a koordinátarendszert ← tengellyel párh.
beszorozzuk egy egységvektorral

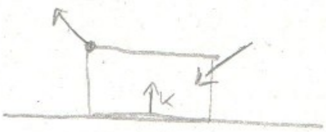
$$\underline{n}\,\hat{\Theta}\,\underline{n}$$

Merev test síkmozgása

2019.12.02. hét 22ae.

$M \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(2)}$ és $\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(1)}$ → 6 egyenlet

ha az asztal síkjában is mozgatjuk → kényszererők is fellépnek
a síkon belül két pont rögzítése ⇒ 2×2 koordináta,
de egymástól vett távolságuk áll. ⇒ 3 egyenlet kell 2×2−1



kényszererő: merőleges a felületre
⇒ ∅ sík irányú komponens

$$\boxed{M\ddot{x}_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(2)}\right)_x \qquad M\ddot{y}_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(2)}\right)_y}$$

$$\frac{dN_{s3}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(2)}\right)_z$$

$\underline{r} \times \underline{K}$ -nak ∅ z irányú komponense

most: súrlódásmentes eset

$$\frac{dN_{s3}}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_{(i)}^{\prime(2)}\right)_z$$

a súlyponti rendszerben saját imp. mom.

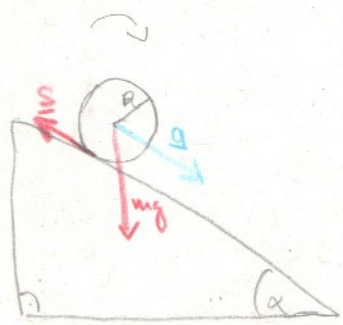
$\underline{N}_s = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}$ ← $\underline{\omega}$-nak síkmozgás esetén csak z irányú komponense van

$\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$

$N_{s3} = \hat{\Theta}_{33}\,\omega$ ← $\hat{\Theta}_{33}$: súlyponttól mért távolság négyzetösszegét tartalmazza
nem függ az időtől $\hat{\Theta}_{33}$ = áll.

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\Theta}_{33}\,\beta = \left(\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{\prime(2)}\right)_z}$$

lejtőn



$m a = mg \sin\alpha - S$ ← súlypont mozgását leíró egyenlet (lejtő síkjában)

$\Theta_{33}\beta = R S$ ← külső erők súlypontra vonatkozó forgatónyomatéka

$\beta R = a$ ← tiszta gördülés feltétele

$\Theta_{33}\frac{a}{R} = R S \Rightarrow S = \frac{\Theta_{33}}{R^2} a$

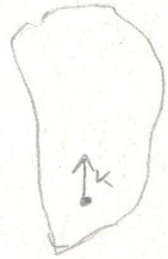
$m a = mg\sin\alpha - \frac{\Theta_{33}}{R^2} a \Rightarrow \left(m + \frac{\Theta_{33}}{R^2}\right) a = mg\sin\alpha \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{\Theta_{33}}{R^2}} \sin\alpha$

⇒ ha Θ nagyobb, gyorsulás kisebb
tömör henger és lukas alsonc közül
a henger ér le előbb a lejtőn

Merev test pont körüli forgása

rögzített tengely körüli forgás – pörgettyű

6 adatból 3 rögzítve van (mert egy pont nem tud elmozdulni)
$6-3=3$ egyenlet



de a súlypontra vonatkozó egyenlet tartalmazza a
forgatónyomatékot

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}$$

forgatónyomaték ⇒ választunk a tengelyből az origót
forgatónyomatékra, ha átmegy a ponton

merev test esetén: $\underline{v} = v_0 + \underline{\omega} \times r$
de tengely sebessége 0 ⇒ $v_0 = 0$ ⇒ $v = \underline{\omega} \times r$

$\underline{N} = \hat{\Theta}^{**} \underline{\omega}$ ⇐ $\hat{\Theta}^{**}$: tengely körüli koordináta-rendszerbeli; illetve továbbiakban $\hat{\Theta}$-val
inerciarendsz. de $\hat{\Theta}$ időfüggő (versztelen)

$\hat{\Theta}$ függ az időtől

⇒ $\underline{N} = \hat{\Theta}(t)\, \underline{\omega}(t)$ → szorzatderivált kell

$\hat{\Theta}$ időfüggése koordrsz elforgatásával megkapható
elforgatási operátor időfüggése
rögzítsük a testhez a koordrsz-t ⇐ gyorsuló koordrsz (versztös)

$$\frac{d'\underline{N}}{dt} = \frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N}$$
← az inerciarendszerbeli N a testhez rögzített N'-vel megadva (forgókoordrszbeli adatokkal)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \underline{M}'}$$
← $\underline{M}'$: testhez rögz. koordrszben

← $\hat{\Theta}$ - független az időtől

$$\frac{d}{dt}(\hat{\Theta}\underline{\omega}) + \underline{\omega} \times (\hat{\Theta}\underline{\omega}) = \underline{M}'$$

$$\boxed{\hat{\Theta}\frac{d\underline{\omega}}{dt} + \underline{\omega} \times (\hat{\Theta}\underline{\omega}) = \underline{M}'}$$
⇐ pörgettyű Euler-féle egyenlete

koordrsz irányai feleljenek meg a sajátirányoknak
⇒ a $\hat{\Theta}$ csak diagonális elemeket tartalmaz a sajátrszben

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$
$\Theta_1\omega_1, \Theta_2\omega_2, \Theta_3\omega_3$ } vektorszorzat: $\underline{\omega} \times \hat{\Theta}\underline{\omega}$

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \Theta_1\omega_1 & \Theta_2\omega_2 & \Theta_3\omega_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

$$(\underline{\omega} \times \hat{\Theta}\underline{\omega}) = \begin{pmatrix} (\omega_2\Theta_3\omega_3 - \omega_3\Theta_2\omega_2) \\ (\omega_3\Theta_1\omega_1 - \omega_1\Theta_3\omega_3) \\ (\omega_1\Theta_2\omega_2 - \omega_2\Theta_1\omega_1) \end{pmatrix}$$

⇒ Euler-féle pörgettyűegyenletek

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) &= M_1' \quad &(\text{I}) \\ \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) &= M_2' \quad &(\text{II}) \\ \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) &= M_3' \quad &(\text{III}) \end{aligned}}$$

nemlineárisak!
mert össze vannak egymással csatolva

⇒ vizsgáljunk speciális eseteket
a súlypontban alátámasztott test esete – erőmentes pörgettyű $M=0$

erőmentes pörgettyű

alátámasztási pont a súlypontban
$\Rightarrow \underline{M} = 0$ $\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M} = 0 \Rightarrow \underline{N} = \text{áll.}$

imp. mom. a laboratóriumi rsz-ben áll.

a kinetikus energia is áll. ← merev test ⇒ belső erők munkája 0
nehézségi erő forgástengelyen hat ⇒ külső erő munkája is 0

$$E_{kin} = \frac{\underline{N}\,\underline{\omega}}{2} = \text{áll.}$$

szimmetrikus pörgettyű ← $\hat{\Theta}$ tenzor két sajátértéke megegyezik
a tengely körül elforgatva nem történik változás. szimmetriatengely
mutasson a tengely a z irányba. ekkor $\Theta_3,\ \Theta_2 = \Theta_1$

$\Theta_3,\ \Theta_2 = \Theta_1$ ⇒ a (III). egyenletben $\Theta_2 - \Theta_1 = 0$

$M_1', M_2', M_3' = 0$

$$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \omega_3 \text{ időben áll.}$$

a szimmetriatengely irányába eső komponens nem fog megváltozni

$(I)\cdot\omega_1 \Rightarrow \Theta_1 \omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_1) = 0$

$(II)\cdot\omega_2 \Rightarrow \Theta_1 \omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$

+

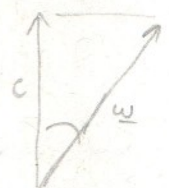
$$\Rightarrow \Theta_1\left(\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \cancel{\Theta_3}\, \omega_2 \frac{d\omega_2}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \Theta_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{áll}$ $\Rightarrow |\underline{\omega}| = \text{áll}$ ⇒ az $\underline{\omega}$ hossza áll!

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \underline{N} = \text{áll.} & \omega_3 = \text{áll.} \\ E_{kin} = \frac{\underline{N}\,\underline{\omega}}{2} = \text{áll} & |\underline{\omega}| = \text{áll.} \end{array}}$$

2019.12.03.
ke 23.ea.

kúpot ír le $\underline{\omega}$
a C körül ← C: forgástengely



← nutációs kúp (C a fix N körül)
erőmentes pörgettyű esetén
~~a precesszió~~

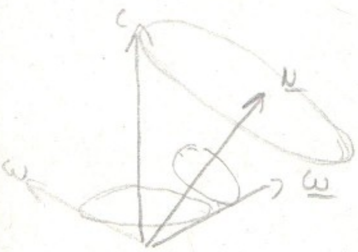
precesszió: súlyos pörgettyű kibillentett
helyzetben megpörgetve
tengelye körbemegy
megáll. ha nem pörögne, eldőlne

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

$\underline{N} = \Theta_2 \underline{\omega}$ ← $\underline{N}$ $\underline{\omega}$ irányába mutat, a többi komponens kicsi

$$\underline{N}\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{N}\,\underline{M} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\underline{N}^2\right) = \underline{N}\,\underline{M} \approx 0$$

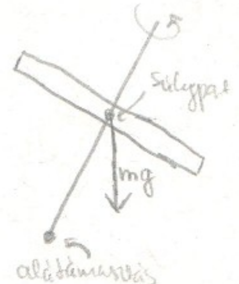
nehézségi erő → forgatónyomaték $\Rightarrow N^2 = \text{áll.}$



függőleges irányú forgatónyom. 0

$$M_z = 0 \Rightarrow N_z = \text{áll.}$$

az imp. mom. csak a forgástengely irányába
mutat jó közelítéssel, ha gyorsan pörgetjük



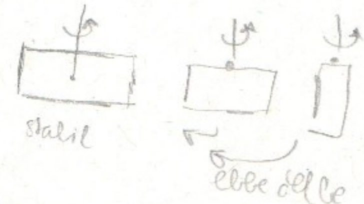
← N_z és $\underline{N}$ is áll. ← precesszió

Föld esetén

kicsit inhomogén erőtérben mozog (Naphoz közelebbi oldalra nagyobb erő hat) → nem erőmentes pörgettyű

↖ ha nem így lenne, a grav. erő támadáspontja a súlypont lenne

súlypont ≠ tkp



Szabad tengely stabilitása

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) = M_1$$
$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\Theta_1 - \Theta_3) = M_2$$
$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\Theta_2 - \Theta_1) = M_3$$

} Euler-féle pörgettyűegyenlet

$M_1 = M_2 = M_3 = 0$

$\Rightarrow \underline{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ triviális mo.

$\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow$ egy sajátirány körül áll. szögsebességgel

de pici kitérítés esetén vissza akar-e térni vagy el akar-e menni

stabil / instabil egyensúlyi helyzet

$\omega = \omega + \Delta\omega$

$$\underline{\omega} = (\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3 + \omega_0)$$ → kicsit más tengely körül forgatjuk meg

$\Rightarrow \Theta_1 \delta\dot{\omega}_1 + \delta\omega_2 \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) = 0$

$\delta\omega_3$ nagyon kicsi $\Rightarrow \delta\omega_3 + \omega_0 \approx \omega_0$

$\Theta_2 \delta\dot{\omega}_2 + \delta\omega_1 \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0$

$\Theta_3 \delta\dot{\omega}_3 + 0 \qquad = 0 \Rightarrow \delta\dot{\omega}_3 = \text{áll.}$

$$\Theta_1 \delta\dot{\omega}_1 + \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \delta\omega_2 = 0$$
$$\Theta_2 \delta\dot{\omega}_2 + \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) \delta\omega_1 = 0$$

} csatolt rezgésekhez hasonló alak mindkét egyenletben megjelenik $\delta\omega_1$ és $\delta\omega_2$

mo.: $$\begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\lambda \Theta_1 A_1 e^{\lambda t} + \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) A_2 e^{\lambda t} = 0$$
$$\lambda \Theta_2 A_2 e^{\lambda t} + \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) A_1 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda \Theta_1 A_1 + \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) A_2 = 0$$
$$\lambda \Theta_2 A_2 + \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) A_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \Theta_1, & \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3), & \lambda \Theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$ ← homogén lin egyrsz

triviális mo: $\lambda = 0$

ha a mx det-a ~~ne~~ 0, van nemtriviális mo. is

$$\lambda^2 \Theta_1 \Theta_2 - \omega_0^2 (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{\omega_0^2 (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3)}{\Theta_1 \Theta_2}$$ ↙ ha a számláló poz.

→ lehet gyököt vonni, $\pm\sqrt{\dots}$ két mo.

→ λ poz. → felerősödés → labilis egyensúly

→ λ neg → lecsengés

$$\lambda^2 = \omega_0^2 \frac{(\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)}{\Theta_1\Theta_2}$$

- ha a számláló negatív $(\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)<0$

  $\Rightarrow \lambda$ tisztán képzetes

  $$\delta\omega_1 = A_{1+} e^{+i\lambda_0 t} + A_{1-} e^{-i\lambda_0 t} \Leftarrow \lambda_0 = \sqrt{\omega_0^2 \frac{|(\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)|}{\Theta_1\Theta_2}}$$

  legyenek A_{1+} és A_{1-} egymás comp konjugáltjai

  $\Rightarrow$ ezeket összeadva valós eredmény! - cos-os — stabil

  z tengely körül harm. rezgőmozg. egyensúlyi helyzet körül

- ha a számláló neg. ~~poz~~ $(\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)<0$ $\Leftarrow$ mikor?

  a két tényező előjele ellentétes

  I. eset: $\Theta_3-\Theta_2>0$ és $\Theta_1-\Theta_3<0$ $\Rightarrow \Theta_3>\Theta_2$ és $\Theta_3>\Theta_1$

  II. eset: $\Theta_3-\Theta_2<0$ és $\Theta_1-\Theta_3>0$ $\Rightarrow \Theta_3<\Theta_2$ és $\Theta_3<\Theta_2$

  I. eset $\Rightarrow \Theta_3$ a legnagyobb

  II. eset $\Rightarrow \Theta_3$ a legkisebb

  (Θ_3 körül forgatjuk) ezek stabil egyensúlyok

  ha a legnagyobb Θ-komponens körül forgatjuk, stabil egy. súly

  ha a legkisebb Θ körül forgatjuk

  lineáris stabilitás

  kicsit nagyobb kitérés esetén már instabil

  szabad tengely - stabilitási probléma