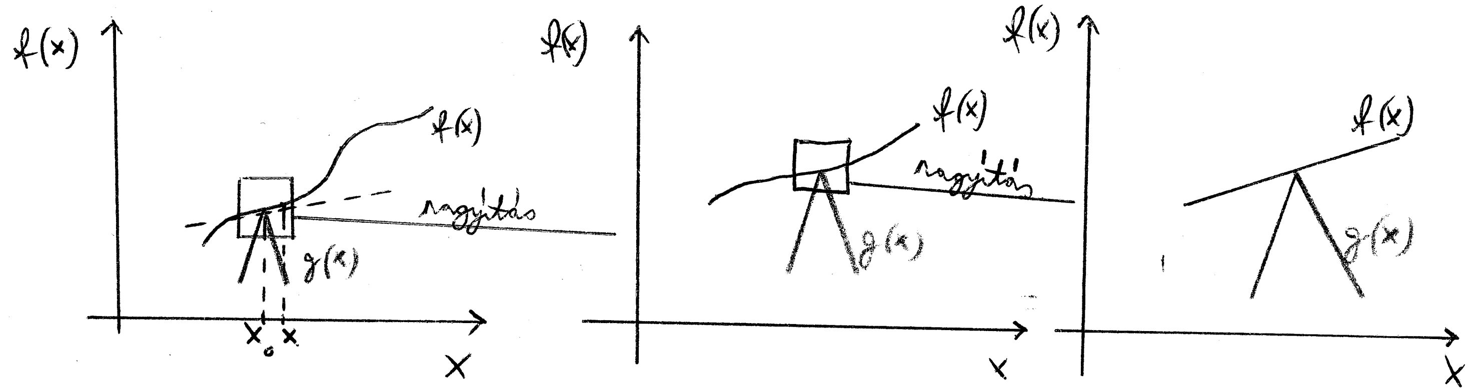
Mechanika

- újra fel kell venni a mechanikát
- Elm. Mechanika A → fizikus szakirányon kötelező
- Könyvek, jegyzetek:
  - Általános fizika I. (Tasnádi Péter)
- szóbeli vizsga lesz félév végén

Matematikai bevezetés



Egy fgv. deriválható egy adott pontban, ha egy egyenessel jól közelíthető. (Az egyenestől való eltérése 0-hoz tart).
Derivált: a közelítő egyenes meredeksége

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ differenciahányados

ha $x \to x_0$, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ differenciálhányados

Fizikai felhasználás:
- alapvető fizikai egyenletekben bizonyos mennyiségek deriváltjai pl. v(t), Newton II.
- $f'(x_0) \sim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lehet közelíteni $f'(x_0)$-t, ha $x \sim x_0$

$\Downarrow$

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Meg lehet becsülni egy adott fgv. ponthoz (x_0) közeli helyeken a fgv. értékeket, ha az adott pontban a fgv. értéket $(f(x_0))$ és a deriváltat $f'(x_0)$ ismerjük. = Közelítő értékek adása.

Azonosságok:

$(f+g)' = f' + g'$

$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$f(x) = c \qquad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{c - c}{x - x_0} = 0$

$f(x) = ax \qquad f'(x_0) = a$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ha } x - x_0 = h$$

$$\frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 \cdot \cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x_0^2}}{\cancel{h}} = 2x_0 + h \approx 2x_0, \text{ ha } h \to 0$$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = (x \cdot x^2)'$

$f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ ismert

$$[f(x) \cdot g(x)]' = ? = \frac{f(x)g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) +}{x - x_0}$$

$$\frac{+ f(x_0)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} = g(x) \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

pl. $(x^3)' = (x \cdot x^2)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

$(x^n)' = ? \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Biz.: teljes indukcióval

1. $(x^1)' \overset{!?}{=} 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$

$\hookrightarrow 1 = 1$

(lsd. feljebb)

2. Tfh. $n = k$-ra igaz, hogy

$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$

3. $n = k+1$-re is belátjuk:

$$(x^{k+1})' = \lim_{x \to x_0} \frac{x^{k+1} - x_0^{k+1}}{x - x_0} = \frac{x^k \cdot x - x_0^k \cdot x_0}{x - x_0}$$

$\cancel{(x^k)' = k \cdot x^{k-1}}$

$(h \to x \to x_0)$ $\cancel{\dfrac{x^k \cdot x_0 - x_0^k \cdot x_0}{x - x_0} = x_0 \cdot \dfrac{x^k - x_0^k}{x - x_0}}$

$$\frac{x^k \cdot x - x^k \cdot x_0 + x^k \cdot x_0 - x_0^k \cdot x_0}{x - x_0} = \frac{x^k \cancel{(x - x_0)}}{\cancel{x - x_0}} + x_0 \frac{(x^k - x_0^k)}{x - x_0}$$

$(x^k)'$

$$= x^k + x_0 \cdot (x^k)' \Rightarrow x_0^k + \underbrace{x_0 \cdot k \cdot x_0^{k-1}}_{k \cdot x_0^k} = (k+1) x_0^k$$

$$(a^x)' = \frac{a^{(x+h)} - a^x}{h} = \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \frac{a^h - 1}{h} \cdot a^x$$

$c(a)$

(ehhez tart)

$$\boxed{(a^x)' = c(a) \cdot (a^x)}$$

$c(a)$ $\pm\infty$ között bármilyen értéket felvehet a fgvényében

⇓

lehet $=1$ is $\Rightarrow c(e) = 1$ $e \approx 2{,}71$

$\boxed{(e^x)' = e^x}$ → ezért kitüntetjük

$\log_e(x) = \ln(x)$ → természetes alapú log $x > 0$

→ e^x inverze

$e^{\ln(x)} = x$ → közvetett fgv.

$f(g(x))$ és $f'(x)$, $g'(x)$ ismert

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{f'(g(x_0))} \cdot \overbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}^{g'(x_0)} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$ közvetett fgv. deriválási szabálya

$(e^{2x})' = e^{(2x)} \cdot 2$

$$(a^x)' = \Big(\underbrace{e^{\ln(a)\cdot x}}_{(e^{\ln a})^x}\Big)' = \ln(a)\cdot e^{\ln(a)\cdot x} = \underbrace{\ln(a)}_{c(a)}\, a^x$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad /'$$

$$e^{\ln x}\cdot(\ln x)' = 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{\underbrace{e^{\ln x}}_{x}}$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$$ ~~kivéve, ha a = 0~~

<u>Jelölés:</u>

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

impulzusoperátor

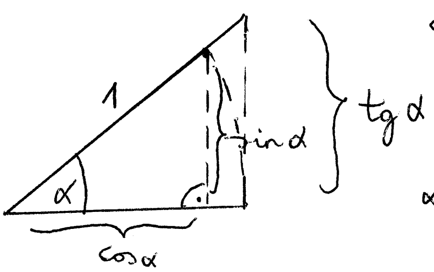
$$\sin'(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{2}{h}\left[\Big(\underbrace{\cos\overbrace{\frac{2x+h}{2}}^{x+\frac{h}{2}}}_{\to\cos x}\Big)\cdot\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)\right] =$$

mz. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$= \underset{\substack{\downarrow\\1}}{\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)}\cdot\cos\Big(x + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{h}{2}}\Big) \Rightarrow \sin'(x) \sim \cos x$$

$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1, \text{ ha } \alpha \to 0\right)$ ↓ Biz.:

$$T_{kis\,\triangle} \le T_{körcikk} \le T_{nagy\,\triangle} \qquad \alpha > 0$$



$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cancel{2}} \le \frac{\alpha}{\cancel{2}} \le \frac{tg\,\alpha}{\cancel{2}} = \frac{\sin\alpha}{\cancel{2}\cos\alpha} \quad /:\sin\alpha \ne 0$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\cos\alpha} \le \frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \underset{\substack{\alpha\to 0\\ \downarrow\\1}}{\frac{1}{\cos\alpha}} \qquad \alpha \to 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \sin'(x) = \underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}_{\downarrow \, \cos x} = \cos x$$

$$\sin'(\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos'(\alpha) = -\sin \alpha$$

A derivált is egy fgv. (x_0-tól függ), amit lehet deriválni.

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

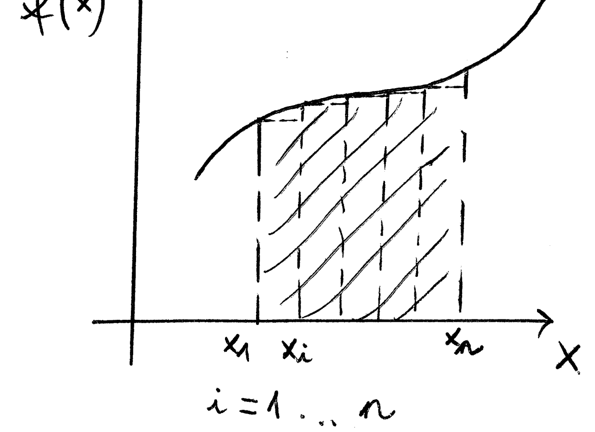
$$\frac{d\, f(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Integrálás

1) $f(x) \to F'(x) = f(x)$

$F(x)$: primitív fgv.
végtelen sok ilyen $F(x)$ van, mert $F_1(x) + c = F_2(x)$ is primitív fgv.

2) Terület a grafikon alatt:



$i = 1 \ldots n$

Ez először Arkhimédesznek jutott eszébe.

Felosztjuk téglalapokra:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i)$$

→ Ma számítógéppel ki lehet számolni így az integrált.

$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ → ehhez közelít a terület

Newton-Leibniz tétel:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

3. óra

Kinematika

Bevezetés

Szeretnénk egy pont/test mozgását leírni (de az okával nem foglalkozik)

Ha ezt szeretnénk megtenni, akkor $\underset{3+1}{4}$ adat kell ← 4D-s a világ

- 3D → tér 3 koordinátája
- idő → klasszikus mechanikában az idő független a tértől

1) Idő (t)

- valahogy mérni kell, és meg kell határozni (def.):
  Cs (cézium-atom) rezgése → pontos
- kell egy időegység
  $[t] = s$ ← def.: 1s
  (emberi lépték: 1s / 1 szívverés)

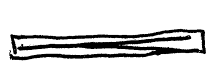
2) Helykoordináták

a) (x, y, z) → összetartozók

bevezetünk 3 irányt
↓
független

kell egy hosszúságegység:

- pl. lépés hossza → emberi lépték
  de ez nem jól reprodukálható
- kijelölték a franciák és az angolok egy „ősmétert"



franciák ↓ méter, angolok ↓ yard

- de megint nagyobb pontosságra volt szükség párizsi délkör $\frac{1}{10\,000}$ része

- ma: a fénysebességből és az időegységből vezetik le
↓
áll.

b) Már tudjuk egy test helyzetét (helykoordinátáit), de 2 test távolságát még nem ismerjük

(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

$r = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ ha x, y, z irányok merőlegesek egymásra

↳ fizikában ez egy tapasztalati tény, nem tétel

(de az általános relativitás szerint ez nem is igaz, de a mindennapi életben ez jó közelítés
= csak méréssel lehet eldönteni valamit, biztos elmélet nem létezik)

⇓

c) Bevezetünk jelöléseket:

egységvektorok:
$(\underline{i} =)\, \underline{e}_x = (1,0,0)$
$(\underline{j} =)\, \underline{e}_y = (0,1,0)$
$(\underline{k} =)\, \underline{e}_z = (0,0,1)$

szabályok:
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \overset{\text{„legyen egyenlő"}}{\equiv} (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$
$\lambda(x, y, z) \equiv (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$(x, y, z) \overset{?}{=} x \cdot \underline{e}_x + y \cdot \underline{e}_y + z \cdot \underline{e}_z$ → mindent vektort fel tudunk így írni

$= (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = (x+0+0,\ 0+y+0,\ 0+0+z) = (x, y, z)$ ✓

Tehát $(x; y; z)$ koordináták jelentése: $\underline{r} = x \cdot \underline{e}_x + y \cdot \underline{e}_y + z \cdot \underline{e}_z$ összeadás

↑ vel. elm.

d) Értelmezzük az origótól mért távolságot:

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ → mérések igazolták, hogy (közelítőleg) pontos

⇒ x, y, z helyvektorok ← a Pit. tétel miatt ← $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ⊥-ek páronként
bev. a kosz.-tételt (8. old.)

e) 2 vektor különbsége:

mérés: $r^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = \underbrace{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}_{r_1^2} + \underbrace{(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}_{r_2^2}$
$-2\underbrace{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1 \cdot z_2)}_{(\text{legyen}) \equiv \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2}$

$\underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$\underline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

bevezettük 2 vektor skaláris szorzatát és ebből a cos-tételt: ezek alapján igaz lesz a mérési tap., mert:

$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\alpha = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \ldots =$

$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots$

$|\underline{r}|^2 = \underline{r} \cdot \underline{r}$ $\qquad |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^2 = |\underline{r}_1|^2 + |\underline{r}_2|^2 - 2\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2$

$\cos\varphi = \dfrac{\underline{r}_1 \underline{r}_2}{|\underline{r}_1| \cdot |\underline{r}_2|}$ → így értelmezzük 2 vektor által bezárt szög koszinuszát

⇒ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ merőlegesek (koordináták miatt)

- A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy fel tudunk így venni 3 egységvektort (tengelyt), hogy az említett ~~az~~ képletekkel kiszámolt távolságok a méréseket igazolják

(Ha nem merőleges egységvektorokat vezetünk be, nem a Pit.-tétel adja majd meg a ~~távolságot~~, mint ~~azt~~ az a valóságban van)

= Mozgás leírásának lényege:

$\boxed{\underline{r}(t)}$

(Kísérlet: vektorszkóp ← ma detektorokkal mérünk)

3) Sebesség

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} \equiv \underline{v} \qquad \text{definíció}$$

koordinátákkal fel tudjuk írni

$$\frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \Bigg(\underbrace{\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}_{x'(t) = \dot{x}}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \ldots \Bigg)$$

$\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ → csak az idő szerinti derivált jele

$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ → Így definiáljuk matematikailag

$[\underline{v}] = \frac{m}{s}$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{\underline{r}}}$$

Gyorsulás:

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} \underset{\text{def. szerint}}{\equiv} \ddot{\underline{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

↓
Miért nem deriválunk tovább?

↳ tapasztalat szerint a dinamikában magasabb deriváltak nincsenek

Érdekes probléma

$\underline{a}$ adott $\quad \underline{a} = (0, 0, -g)$

$\underline{v}(t) = ?$

Végtelen sok olyan fgv. van, amelynek ~~sebessége~~ gyorsulása adott

$v(t) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} - gt)$ → megjelent 3db konstans

$\underline{v}(t=0) = v_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

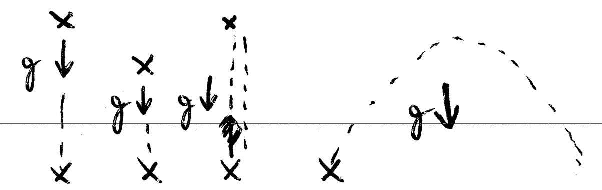
↳ a kezdeti feltételeket a gyorsulás nem határozza meg

$$\underline{r}(t) = \left(x_0 + v_{0x} t,\ y_0 + v_{0y} t,\ z_0 + v_{0z} t - \frac{g t^2}{2}\right)$$

$r(t=0) = \underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

= 6db másik mennyiség határozza meg a mozgást $(\underline{r}(t))$

pl.



→ mindegyik mozgásban adott $\vec{g}$, de a mozgások más tul.-i mégis eltérnek

Pályaegyenlet:

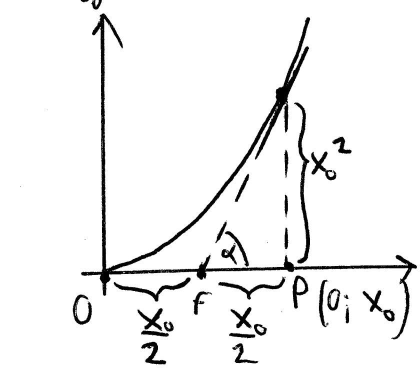
$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \quad \text{ha } v_{0x} \neq 0$$

$$z = z_0 + v_{0z} t - \frac{g}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = z_0 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot (x - x_0) - \frac{g}{2} \cdot \frac{1}{v_{0x}^2} \cdot (x - x_0)^2}$$

fejére állított parabola

ferde hajítás

Megj.:



→ Onnan lehet eldönteni, hogy parabola, hogy az x_0 pontba húzott érintő felezi az $\overline{OP}$ szakaszt.

$P(0; x_0)$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_0^{\cancel{2}}}{\overline{FP}} = 2\cancel{x_0} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\underline{\underline{\frac{x_0}{2} = \overline{FP}}}$$

~~kezdő~~ beállítástól függ

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

↓

körfrekvencia

nyilvánvaló, hogy: $A \sin(\omega(t+T) + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$ T periódusidő

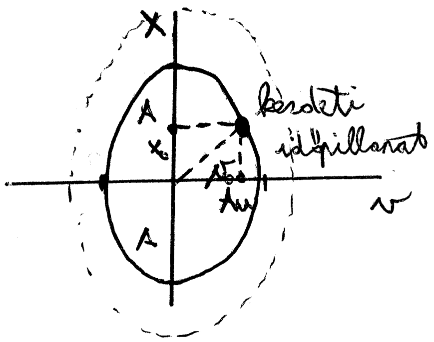
$$\cancel{\omega T = 0 \Rightarrow} \quad \omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\dot{x} = v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = a = \dot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \cdot \underbrace{A \cdot \sin(\omega t + \varphi)}_{x} = -\omega^2 x$$

$v(x) = ?$



$$\frac{v}{A\omega} = \cos(\omega t+\varphi) \,/^2 \qquad \frac{x}{A} = \sin(\omega t+\varphi) \,/^2$$

$$\left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = \cos^2(\omega t+\varphi) \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \sin^2(\omega t+\varphi)$$

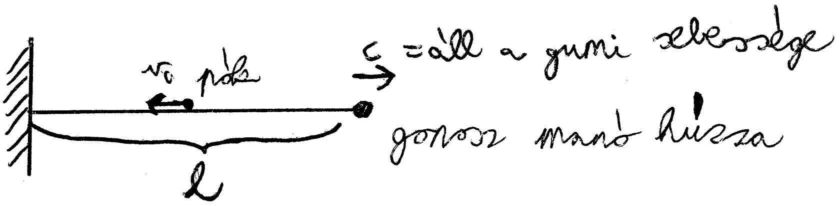
$$\underbrace{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1}_{\text{ellipszis}}$$

$$\frac{x(0)}{v_0(0)} = \frac{\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \cdot \cancel{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$$

fontos mozgásjellemzőket ad meg

fázistér: a részecske x, v koordinátáit megadva a fázistérben, annak mozgásáról fontos információkat kapunk.

Érdekes probléma



A gumihoz képest v_0 sebességgel halad a pók.

$x(t)$

$v(x) = \frac{x}{l} \cdot c - v_0$ → arányos a faltól mért távolsággal a sebesség

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{c}{l} \cdot x - v_0}$$

→ olyan fgv.-t keresünk ($x(t)$-t), melynek deriváltja arányos saját magával

- differenciálegyenlet → van benne derivált
- elsőrendű
- állandó együtthatós: x előtt áll. van
- lineáris

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \longrightarrow \frac{c}{\ell}x - v_0$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot \lambda = \underline{\underline{\lambda}} A \cdot e^{\lambda t} = \underline{\underline{\frac{c}{\ell}}} \cdot A \cdot e^{\lambda t} + \underbrace{\frac{c}{\ell} B - v_0}_{0}$$

$\downarrow$

csak így lesz a 2 oldal minden időpillanatban egyenlő!!

$$\lambda = \frac{c}{\ell} \qquad B = \frac{v_0}{c} \cdot \ell$$

$\Downarrow$

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{c}{\ell} t} + \frac{v_0}{c} \cdot \ell$$

A akármekkora legyen is, ez a megoldás kielégíti az egyenletet.

Ha máshova tesszük le a pókot, más lesz a mozgása, viszont az egyenlet nem változik.

<u>Kezdeti feltétel</u>

a bekeretezett egyenlet nem adja meg a kezdeti feltételt.

(~~$x(0) = x_0$~~

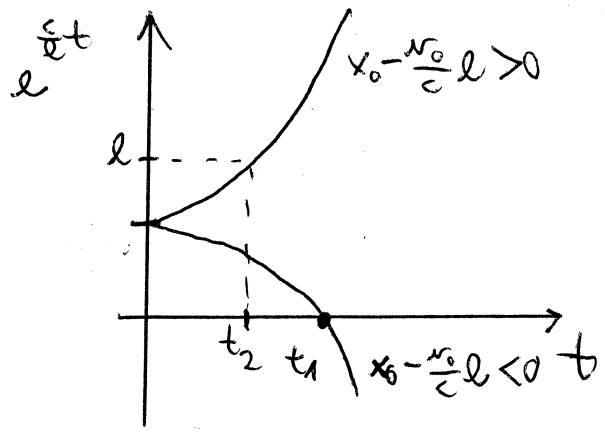
Plusz fizikai feltétel kell ahhoz, hogy egyértelműen meghatározzuk a mozgást

Pl. ha $x(0) = x_0$ (ismert)

$$x(0) = A \cdot \underbrace{e^{\lambda \cdot 0}}_{1} + \frac{v_0}{c}\ell = x_0$$

$$A = x_0 - \frac{v_0}{c}\ell$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{v_0}{c}\ell\right) e^{\frac{c}{\ell}t} + \frac{v_0}{c}\ell$$



$$x(t)=\underbrace{\left(x_0-\frac{v_0}{c}l\right)}\,e^{\frac{c}{l}t}+\frac{v_0}{c}l$$

I. Ha: <0

elég sokáig várva

$x_0-\frac{v_0}{c}l<0 \Rightarrow x(t_1)=0$

→ megmenekül

II. Ha

$x_0-\frac{v_0}{c}l>0 \Rightarrow x(t_2)=l$

→ nem menekül el

$x_0-\frac{v_0}{c}l<0$

$x_0<\frac{v_0}{c}l$

$c\cdot\frac{x_0}{l}<v_0$

↓

⇒ Magyarázat:

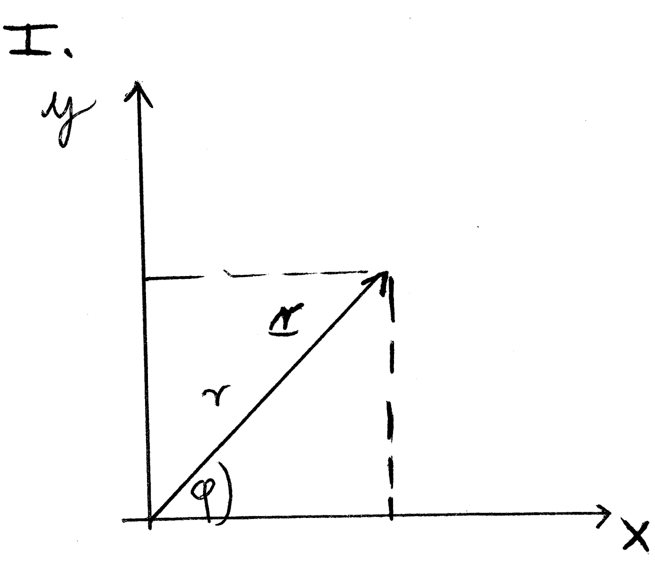
- ha az adott helyen $v_0>c$, akkor biztos, hogy megmenekül mert elindul a fal felé, és később a sebessége már biztos nagyobb lesz a guminál
- ha $v_0<c$, akkor biztos, hogy nem menekül meg, mert ...

⇒ Vagyis a kezdeti feltétel egyértelműen meghatározza a kimenetelt.

↳ érzékeny a kezdeti feltételre a ~~...~~ mozgás.

Koordinátarendszer választása

I.



$\underline{r}(x,y)$

távolság 0-tól ↑ szög ↑

(r,φ)

↓

így is megadható lenne az $\underline{r}$, de hogyan adjuk meg a sebességet és a gyorsulást?

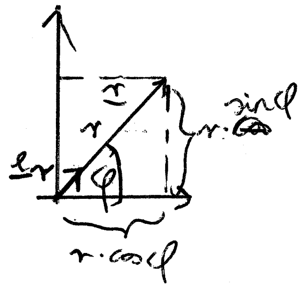
↓

visszavezetjük a derékszögű koordinátarendszerre.

$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

II. Vezessünk be egy $\underline{r}$ irányú egységvektor.
(ami így változni fog)



$\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$

$\underline{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

mert a koordinátákra külön külön igaz

$$\dot{\underline{r}} = (r\cdot\underline{e}_r)^{\cdot} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\cdot\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\cdot\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

$$\dot{\underline{e}}_r = \left(\frac{d}{dt}\cos(\varphi(t))\,;\ \frac{d}{dt}\sin(\varphi(t))\right) = (-\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi\,;\ \dot{\varphi}\cdot\cos\varphi) =$$

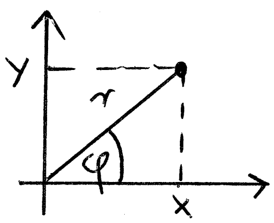
$$= \dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,;\cos\varphi) = \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \rightarrow \text{új egységvektor}$$

$\underline{e}_\varphi \perp \underline{e}_r$ (mert skaláris szorzatuk 0)

5. óra

Poláskoordinátarendszer

Nem kell x, y koordinátákkal megadni a mozgást:
adjuk meg (r, φ) adatpárral, ahol



Vezessünk be r irányú egységvektort: $\underline{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ → az egységvektor változik φ-vel

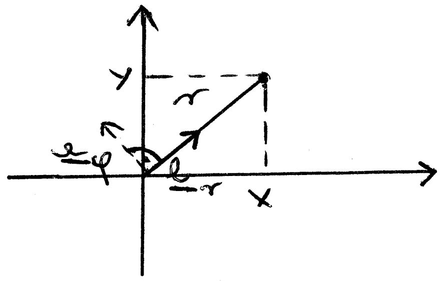
$\Rightarrow \underline{r} = r\cdot\underline{e}_r$

$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\varphi}\cdot\underbrace{(-\sin\varphi, \cos\varphi)}_{\underline{e}_\varphi \text{ új jelölés}}$

$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{r}\cdot\underline{e}_r + r\cdot\dot{\underline{e}}_r$

$\underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi$

$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\cdot\underline{e}_r + r\cdot\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi}$$



$$\boxed{\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{r}\cdot\underline{e}_r + \underbrace{\dot{r}\cdot\dot{\underline{e}}_r}_{\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi} + \dot{r}\,\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi + r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi + \underbrace{r\,\dot{\varphi}\cdot\dot{\underline{e}}_\varphi}_{-r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\underline{e}_r}$$

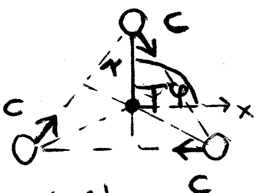
$\underline{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos$

$\dot{\underline{e}}_\varphi = (-\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi, -\dot{\varphi}\cdot\sin$
$= -\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_r$

$$\boxed{\underline{a} = \underline{e}_r\,(\ddot{r} - r\cdot\dot{\varphi}^2) + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\cdot\ddot{\varphi})\cdot\underline{e}_\varphi}$$

A gyorsulás is előállítható $\underline{e}_r$ és $\underline{e}_\varphi$ ~~segítségével~~

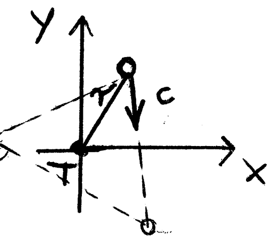
2) Példa:

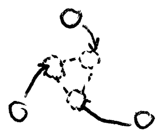


csigák vannak az egyenlő oldalú △ csúcsain
- kergetik egymást
- mindig a másik felé mennek

Meggondolás: mivel szimmetrikusan mozognak, mindig egy szabályos △ csúcsain lesznek egymáshoz képest

T: találkozási pont

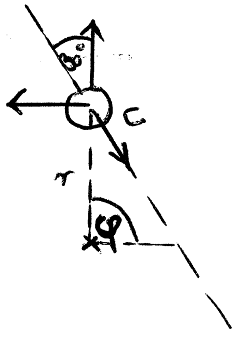




Használjunk polárkoordinátákat
legyen T az origó a derékszögű k. rendszerben
φ legyen az x iránnyal bezárt szög

$v_r = \dot{r}$
$v_\varphi = r\cdot\dot{\varphi}$ } lsd előbb

c mindig 30°-ot zár be r-rel



a derékszögű koordinátarendszerben ~~(mely a csigákkal~~
$v_r = c\cdot\cos 30^\circ\cdot(-1)$ ~~együtt mozog, forog)~~
$v_\varphi = c\cdot\sin 30^\circ\cdot(-1)$

nem változik

$$\dot{r} = \cos 30^\circ\cdot(-c) = \text{áll}$$

$$\dot r = -c\cdot\cos 30^\circ \Rightarrow \underline{\underline{r(t) = r_0 - (c\cdot\cos 30^\circ)t}}$$

$\Downarrow$

r_0 a feladatból kiszámolható!

Mi a tanulság?

A polárkoordinátákkal olyan egyenletek jönnek ki, melyek közül legalább az egyik egyenletet meg tudom mondani a másik ismerete nélkül.

most pl. $\varphi(t)$ ismerete nélkül kiszámolható $r(t)$

$$\frac{v_\varphi}{r} = \dot\varphi = \frac{-c\cdot\sin 30^\circ}{r_0-(c\cdot\cos 30^\circ)t}$$

$\downarrow$

melyik fgv. lehet ez?

$$\varphi-\varphi_0 = \int_0^t \dot\varphi(t')\,dt' = -c\cdot\sin 30^\circ \int_0^t \frac{1}{r_0-(c\cos 30^\circ)t}\,dt = \overbrace{\frac{\cancel{-c}\cdot\sin 30^\circ}{\cancel{-c}\cos 30^\circ}}^{tg\,30^\circ}\cdot \ln(r_0-c\cos 30^\circ t)\Big|_0^t$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{msz.:}\quad \dfrac{d\ln x}{dx} = \dfrac{1}{x} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\ln\left(r_0-(c\cos 30^\circ)t\right) = \dfrac{1}{r_0-(c\cos 30^\circ)t}\cdot\left[-(c\cos 30^\circ)\right] \end{array}\right)$$

$$\varphi = \varphi_0 + tg\,30^\circ\left[\ln(r_0-\cos 30^\circ\cdot t) - \ln r_0\right] = \varphi_0 + tg\,30^\circ\cdot\ln\frac{\overbrace{r_0-\cos 30^\circ\cdot t}^{r(t)}}{r_0} =$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + tg\,30^\circ\cdot\ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)}$$

$\downarrow$

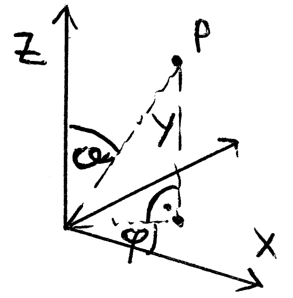
logaritmikus spirál pálya

Mennyi szöget fordultak el?

- elvileg ∞ szöget $\leftarrow \ln 0$
- valójában van fizikai kiterjedésük

⇒ Ha valamit nem fogalmazunk meg (fizikai kiterjedés) akkor az eredmény ezen része kritikus lesz.
Most pl. a szög a kiterjedéstől is függ

Térbeli polárkoordináták



$\underline{r}(x, y, z)$

$|\underline{r}| = r$

Adjuk meg egy távolság és 2 szög segítségével a helyzetét

- távolság : r
- ϑ (theta): z tengellyel bezárt szög
- φ: a P pont x–y síkra vonatkozó merőleges vetületének x tengellyel bezárt szöge

$z = r \cdot \cos\vartheta$

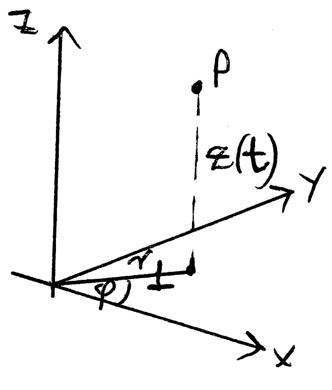
$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta$

$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta$

$r(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$

~~(ts derékszögű)~~

Hengerkoordináták



Adjuk meg: $r_\perp(t), \varphi(t), z(t)$

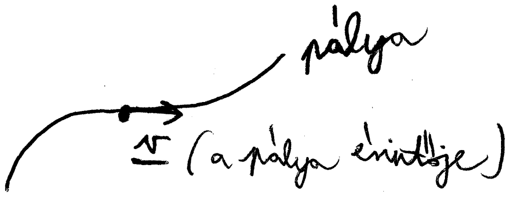
= Milyen koordinátarendszert használjunk?

- ha van szimmetria, akkor a szimmetriához illeszkedően kell megválasztani a koordinátarendszert

↓

általában a fizikában ~~van~~ van szimmetria

Természetes koordinátarendszer

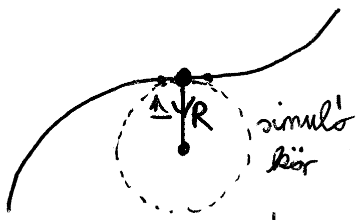


vegyünk fel egy érintő irányú egységvektort $\underline{t}$

$\underline{v} = v \cdot \underline{t}$

$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \dot{v}\,\underline{t} + v\,\dot{\underline{t}} = \dot{v}\,\underline{t} + \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}$

Pálya adott → R kiszámítható



$\underline{t} = \underline{e}_\varphi$ $\quad \dot{\underline{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \cdot \underline{e}_r$

$\dot{\underline{t}} = \frac{v}{R}\underline{n}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{v}{R}$

↓

legyen a középpontja egy polárkoordinátarendsz. középpontja

$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$

legyen $\underline{n} = -\underline{e}_r$ (a középpontba mutató vektor)

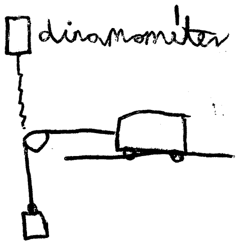
= $\underline{a}$-t meg lehet határozni könnyen a pálya ismeretében

↳ ~~a~~ meghatározható, hogy ~~mi kell~~ milyen dinamikai feltétel kell a pályántartáshoz.

6. óra

A dinamika alaptörvényei

1) **Kísérlet:**



- erő ≡ mennyivel nyúlik meg a dinamométer
- ellenőrizhető, hogy a kiskocsi egyenletesen gyorsul ⇒ $s=\frac{at^2}{2}$ $\frac{2s}{t^2}=a$

méréseket végzünk
- növeljük a kocsi tömegét, ~~a~~ -t megnézzük
  ↳ ugyanakkora húzóerő mellett

- következtetés:

~~⇒~~ $\frac{m}{a}=$ áll, ha $F=$ áll

2) Bevezetés:

~~a~~) kell egy koordinátarendszer, melyben a mozgást le akarjuk írni

áll: van olyan – ll –, melyben a magára hagyott test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez: inerciarendszer

(ez nem minden k. rendszerben igaz, van amiben nehezebb leírni bizonyos mozgásokat) pl. gyorsuló ko. rendszer

Hogyan tudjuk eldönteni, hogy az ~~által~~ általunk választott rendszer inerciarendszer-e?

Ha az adott mérési körülmények, mérési hibák között nincs jelentősége, hogy inerciarendszer-e ~~vagy~~ (mert ugyanolyan mérési eredményeket ad), akkor nem foglalkozunk azzal, hogy ténylegesen inerciarendszer-e, annak tekintjük.

= **Newton I. axiómája**

Lehet találni olyan koordinátarendszert, melyben a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (inerciar.).

pl. egy test vízszintes mozgását nem befolyásolja az, hogy forog-e a Föld és a test vele együtt, vagy mindkettő áll!!

3) Newton II. axiómája: $\underline{F}=m\,\underline{a}$ $(\underline{a}=\ddot{\underline{r}})$

• pl. $-Dx=m\ddot{x}$ $\qquad \omega_0^2 \equiv \frac{D}{m}$

$-\omega_0^2 x=\ddot{x}$

A rugóra akasztott test mozgásához nem kell tömeg és erő.
Kifejezhető egy ω_0^2 bevezetésével is.

• Mire jó mégis ez a törvény (axióma)?
Áll.: (lsd. előbb) 6 paramétert a mozgás során én állítok be tetszőlegesen

$\underline{f}\equiv\frac{\underline{F}}{m}$

$\underline{f}=\underline{a}$

$\underbrace{\underline{f}-\underline{a}}=0$

$g(\underline{r},\underline{v},\underline{a},t)=0$

$\downarrow$

a-t megadjuk

ez is következik Newton II. axiómájából

$\downarrow$

I. A ~~mozgást~~ mozgást leíró egyenlet pontosan egy másodrendű differenciál ~~második derivált~~ egyenlet.
= Amíg csak a mozgást vizsgáljuk, nem kell más mennyiség

$\Downarrow$

II. $\underline{f}(\underline{r},\underline{v},t)$
Ha $\underline{a}$-t kifejezzük f-fel, akkor az csak $\underline{r}$-től, $\underline{v}$-től és t-től függhet, mert $\underline{a}$ is csak ezektől a mennyiségektől függ, magától nem!

4) test$_1$ test$_2$

most válik fontossá a tömeg és erő fogalma

$\downarrow$

III. ha 2 test hat egymásra, megmérve a gyorsulásaikat

$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\text{állandó}}$ és ezt nem tudjuk megváltoztatni! ← Ha pl. ismerjük az állandó értékét és az egyik gyorsulását, akkor a másik „a” kiszámítható

$\frac{a_1}{a_2}=\text{áll.}\overset{\text{legyen}}{\equiv}\frac{m_2}{m_1}$ - ha cserélgetjük a testeket változik az arány
- úgy kell ügyesen meghatározni m-et a testekre, hogy igaz legyen az arány mindig

Legyen mondjuk m egysége 1 l víz m-je

⇒ $m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2$ adódik

$\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$

Nevezzük $m \cdot \underline{a}$-t F-nek

$$\boxed{m \underline{a} = \underline{F}}$$

állandó a testre nézve

II. állítás ↗ $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t) = m \cdot \underline{f}(\underline{r}, \underline{v}, t)$

más változót nem írhatunk be f argumentumába

f nem függhet a-tól

⇓

<u>Newton-törvények:</u>

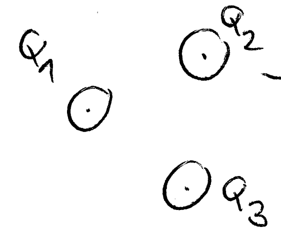
I. Létezik inerciarendszer

II. $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t) = m \cdot \underline{a}$

III. $\underline{F}_1 = -\underline{F}_2$

IV. $\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_e$

5) <u>Newton IV. axiómája:</u>



→ kiterjedt töltött gömbök

- a megosztás miatt $f \neq k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$

$\left.\begin{array}{l} F_{Q_1 Q_2} \text{ ha nincs } Q_3 \\ \text{és } F_{Q_1 Q_3} \text{ ha nincs } Q_2 \end{array}\right\} \oplus \neq F_{Q_1, Q_2 Q_3}$ → mindhárom jelen van

Ok: a 3. töltés jelenléte megváltoztatja az előző gömbök belső tulajdonságait. → az erők külön-külön nem összegezhetők.

<u>Pontszerű</u> testnél nem történnek változások a belső tulajdonságokban, ezért a rá ható ~~az~~ erők zavartalanul összegezhetők.

Newton-N:

$$\boxed{\underline{F}_e = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i}$$

<u>csak pontszerű testeknél</u>!

Pontrendszereknél már máshogyan kell eljárni

(A din. alaptörvényeit Kepler, Galilei és Newton nevéhez fűzik.)

<u>A dinamikai törvények alkalmazása</u>

1. <u>Rugón rezgő test:</u>

a) $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \cdot x$ (lsd. előbb) $\quad / \cdot m!$

$m \cdot \ddot{x}(t) = -m\omega_0^2 \cdot x$

$ma = -\underbrace{(m\omega_0^2)}_{D\text{-nek nevezzük}} x$

Fontos jellemző:
- ω_0, φ -t a kezdeti ~~állapot~~ feltételek határozzák meg

$F = -Dx$ $\qquad \cancel{\Longleftrightarrow}$

= a mozgásból visszafele kitaláltam a ~~az~~ rugóra igaz erőtörvényt

(• a változók egy részét a kezdeti feltételek (mi) határozzuk meg
• másik része a rendszertől függ (erőhatásoktól))

b) Mégsem lesz igaz, hogy $F = -Dx$, van „csillapodás":

legyen $m\ddot{x} = F = -Dx + G$ $\qquad$ G legyen konstans

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + g$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g$

ha $g = 0$:

másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet

ha $g \neq 0$

másodrendű, lineáris, inhomogén —"—

~~Most~~ 1 Megoldás

$$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$$ (ha nem mozog a test $\ddot{x} = 0$

Áll: Ha találunk 1 partikuláris (egyedi) megoldást az inhomogén egyenletre, és meg tudjuk oldani azt homogén esetre, akkor van megoldásunk: hozzáadjuk a partikuláris megoldást a homogén egyenlethez: } Módszer

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A \sin(\omega_0 t + \varphi)}_{1.\text{ tag}} + \underbrace{\frac{g}{\omega_0^2}}_{2.\text{ tag}}}$$

2) Golyó mozgása folyadékban:

$F_s = -\lambda \cdot \underline{v}$ homogén egyenlet

$ma = -\lambda \underline{v} + G$ inhomogén egyenlet vízbeejtett golyó

$a = -\beta \underline{v} + g$ $\quad \beta \equiv \frac{\lambda}{m} = \text{áll}$

• Partikuláris mo.:

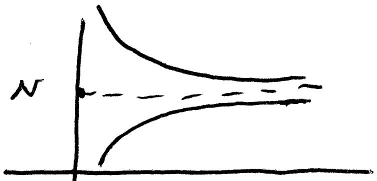
$$v_\infty = \frac{g}{\beta}$$

• A homogén egyenlet megoldása:

$$\underbrace{a = \dot{v} = \cancel{A} - \beta v}_{\Downarrow}$$

$v = v_0 \cdot e^{-\beta t}$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\beta t} + \frac{g}{\beta}$$



→ egy idő után beáll állandó sebességre

Arisztotelész ezt a problémát figyelte,
és ezek alapján $\underline{F} = m\underline{v}$ egyenletet írta fel.
Ez erre a speciális problémára egy idő után igaz lesz.
(ha t nagy $|$ $v_0 e^{-\beta t} \to 0$)

7. óra

Rezgések összetétele

1) Azonos irányú és frekvenciájú rezgések:

$$A(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) = A_3 \cdot \cos(\omega t + \varphi_3)$$

$$A_1 \cdot \cos\omega t \cdot \cos\varphi_1 - A_1 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\varphi_1 +$$
$$+ A_2 \cdot \cos\omega t \cdot \cos\varphi_2 - A_2 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\varphi_2 =$$
$$= A_3 \cos\omega t \cdot \cos\varphi_3 - A_3 \cdot \sin\omega t \cdot \sin\varphi_3$$

Mivel minden időpillanatban egyenlőek, ezért a megfelelő tagok együtthatói megegyeznek.

$$\left.\begin{matrix} A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2 = A_3 \cos\varphi_3 \quad /^2 \\ A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2 = A_3 \sin\varphi_3 \quad /^2 \end{matrix}\right\} +$$

$$A_1^2(\underbrace{\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1}_{1}) + A_2^2(\underbrace{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}_{1}) = A_3^2(\underbrace{\cos^2\varphi_3 + \sin^2\varphi_3}_{1})$$
$$+ 2 A_1 A_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}}$$

$$\boxed{A_3 = \sqrt{A_1^2 + \underbrace{2 A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{interferencia tag}} + A_2^2}}$$

interferencia tag

a) ha $\varphi_1 = \varphi_2$ (azonos fázis):

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 + A_2^2}$$

$$\underline{\underline{A_3 = A_1 + A_2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_1}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_1} = \frac{\cancel{(A_1+A_2)}}{\cancel{(A_1+A_2)}}\,\frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\varphi_1$$

Jfk.: $\underline{\underline{\varphi_3 = \varphi_1 = \varphi_2}}$

↓

lehetne kaptuk eltolódás is (a tangens fgv. periodikussága miatt) $\varphi_3 = \varphi_1 + \pi$, de a valóságban nincs

b) ha $\varphi_1 = \pi + \varphi_2$ (ellentétes fázis):

$$A_3 = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\big(\underbrace{\cos(\cancel{\varphi_2} + \pi - \cancel{\varphi_2})}_{-1}\big) + A_2^2}$$

$$A_3 = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$\underline{\underline{A_3 = |A_1 - A_2|}}$$

$\underline{\underline{\varphi_3 = \varphi_1}}$ vagy $\underline{\underline{\varphi_3 = \varphi_2}}$

c) ha $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi_2$ $\qquad A_3 = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\big(\underbrace{\cos(\cancel{\varphi_2} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\varphi_2})}_{0}\big) + A_2^2}$

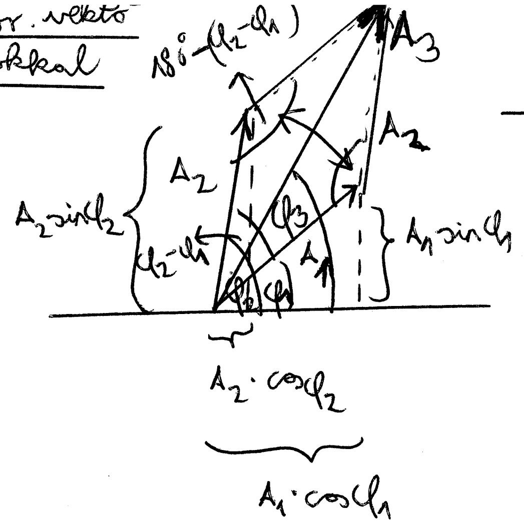
$$\underline{\underline{A_3 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}}$$

$$\sin\varphi_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right) = \cos(-\varphi_2) = \cos\varphi_2$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right) = \sin(-\varphi_2) = -\sin\varphi_2$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tg}\varphi_3}} = \frac{A_1\cos\varphi_2 + A_2\sin\varphi_2}{A_1(-\sin\varphi_2) + A_2\cos\varphi_2} = \underline{\underline{\frac{A_1 + A_2\operatorname{tg}\varphi_2}{A_2 - A_1\operatorname{tg}\varphi_2}}}$$

Ábr. vektorokkal



$\rightarrow$ cos-tétel:

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cdot\overbrace{\cos\left(180°-(\varphi_2-\varphi_1)\right)}^{-\cos(\varphi_2-\varphi_1)} =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$ ✓ (lsd. 24. old)

$$\mathrm{tg}\,\varphi_3 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Vektorokkal lehet ábrázolni a hullámokat: ha a vektort fázisszöggel +ωt-vel elforgatjuk, akkor mindig a megfelelő koordináták adják a kitérést (mint szögfüggvényt) (az első koordináta)

Komplex felírás

$$A(t) = A_1\cdot\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2) = \mathrm{Re}\Big(\overbrace{A_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}}^{\text{ezen komplex számok valós része lesz mindig } A(t)}\Big)$$

$$A = A_1\cdot e^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)} = \left(A_1\cdot e^{\varphi_1} + A_2 e^{\varphi_2}\right)e^{i\omega t} = A_3 e^{i\omega t}$$

$\downarrow$

komplex amplitúdó

$$A_3 = A_1\cdot e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$$

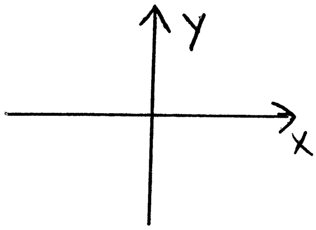
$$|A_3|^2 = \left(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right)\overbrace{\left(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}\right)}^{\text{konjugált}} = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\Big(\underbrace{\underbrace{e^{i\varphi_1}\cdot e^{-i\varphi_2} + e^{i\varphi_2}\cdot e^{-i\varphi_1}}_{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}+e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}}}_{2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\Big)$$

$$= A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + A_2^2$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_3 = \frac{\mathrm{Im}\,A_3}{\mathrm{Re}\,A_3} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

2) Merőleges összetevés, azonos frekvencia:

pl. fénynél



$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Mi az összefüggés x és y között?

addíciós tétel

$$x = A_1 \cos\varphi_1 \cos\omega t - A_1 \sin\varphi_1 \sin\omega t$$

$$y = A_2 \cos\varphi_2 \cos\omega t - A_2 \sin\varphi_2 \sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{x + A_1 \sin\varphi_1 \sin\omega t}{A_1 \cdot \cos\varphi_1}$$

$$y = A_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \frac{x + A_1 \sin\varphi_1 \cdot \sin\omega t}{A_1 \cdot \cos\varphi_1} - A_2 \sin\varphi_2 \sin\omega t$$

$$A_1 \cos\varphi_1 \cdot y = A_2 \cos\varphi_2 \, x + A_1 A_2 \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 \sin\omega t - A_1 A_2 \cdot \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\omega t$$

$$A_1 \cos\varphi_1 \cdot y - A_2 \cos\varphi_2 \, x = A_1 A_2 \, (\underbrace{\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}_{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}) \sin\omega t$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{A_1 A_2 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot (A_1 y \cos\varphi_1 - A_2 x \cos\varphi_2) \quad /^2$$

$\oplus$

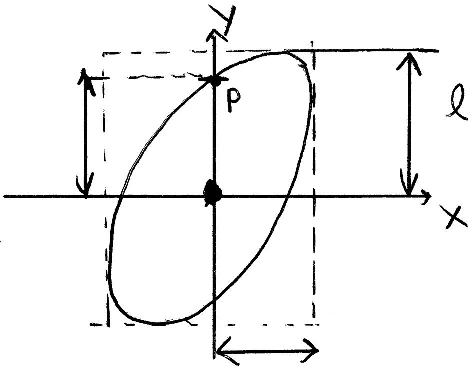
Ugyanígy behelyettesítéssel:

$$\cos\omega t = \frac{1}{A_1 A_2 \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} (A_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot y - A_2 \sin\varphi_2 \cdot x) \quad /^2$$

$$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1 = \frac{1}{[A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]^2} \left(A_2^2 x^2 - 2 A_1 A_2 \, xy \, (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + A_1^2 \cdot y^2 \right)$$

$$\boxed{[A_1 A_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 = A_2^2 x^2 - 2 A_1 A_2 \, xy \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_1^2 y^2}$$

x^2, xy és y^2 is van benne $\Rightarrow$ ellipszis lesz



legnagyobb y kitérés: A_2

legnagyobb x kitérés: A_1

ha $x=0$

$\cancel{\left(\omega t = \frac{\pi}{2}\right)}$

$\cos(\omega t + \varphi_1) = 0 \qquad \omega t + \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 + \varphi_2\right) = A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$P\left(0;\ A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right)$

a) $\varphi_1 = \varphi_2$

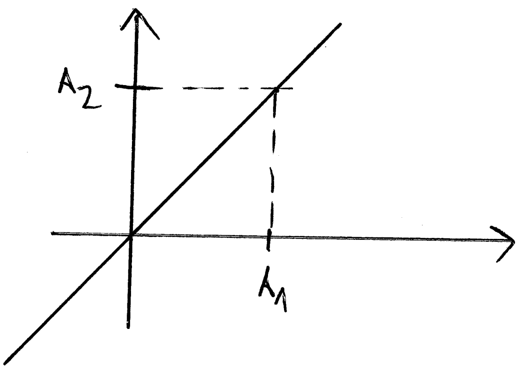
$\Downarrow$

$\sin(\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{0}) = 0 \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$

$$0 = A_2^2 x^2 - 2A_1 A_2 xy + A_1^2 y^2 = (A_2 x - A_1 y)^2$$

$A_2 x = A_1 y$

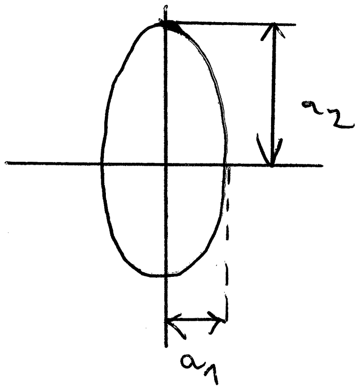
$\frac{A_2}{A_1} x = y$



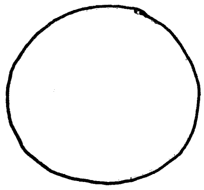
b) $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$

$A_1^2 A_2^2 = A_2^2 x^2 + A_1^2 y^2 \qquad 1 = \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2}$



ha $A_1 = A_2 \Rightarrow$ kör



moziban cirkulárisan poláris szűrőt alkalmaznak

valójában nem 3D-s, csak sztereo

8. óra

3) Lebegés:

A frekvenciák nem egyeznek meg, de az irány azonos

$A_1 \cos(\omega_1 t)$ | $A_2 \cos(\omega_2 t)$ $\quad \omega_1 \neq \omega_2$ de $\omega_1 \approx \omega_2$

} feltételek

$$A(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t = \frac{A_1 + A_2}{2}\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right) + \frac{A_1 - A_2}{2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha\ \cancel{\alpha-\beta}}{2}$$

$$A(t) = \frac{(A_1 + A_2)}{\cancel{2}}\cancel{2}\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) + (A_1 - A_2)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right)\cdot\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2} t\right)$$

Ha $\omega_1 = \omega_2$ → lsd. azonos frekv. rezgések (24. old)

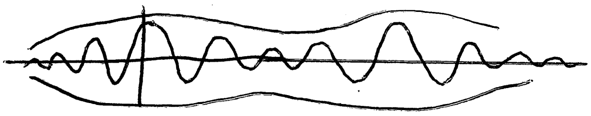
a) $\omega_1 \approx \omega_2 \quad A_1 = A_2$

az amplitúdóhoz „csapjuk"

↳ $\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$ → lassú változás → Amplitúdóban, a

másik tag $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t$ rendesen változik

↳ olyan mintha egy rendes cos-os rezgés lenne változó amplitúdóval



b) $\omega_1 \approx \omega_2$, $A_1 \neq A_2$

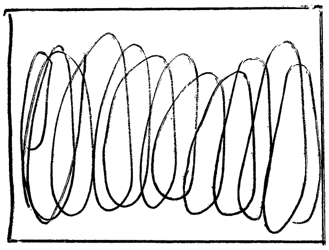
2 változó amplitúdós rezgés (lebegés összetétele

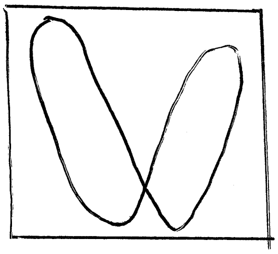
$A_1 - A_2$ -es tag nem 0 → $\cancel{\frac{\cos\left(2\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right)}{2} = \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}$

4) Lissajous-ábrák

$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$

$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$



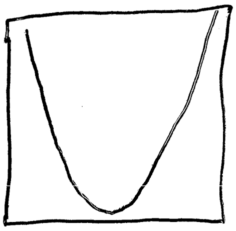


A frekvenciák közelítőleg sem egyeznek meg

a) $\omega_2 = 2\omega_1$ $\quad (f_2 = 2f_1)$ és merőleges összetétel

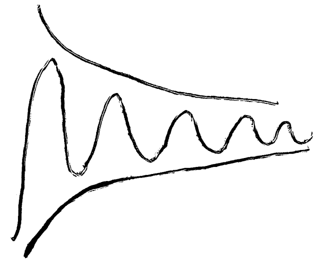
$x = A_1 \cos \omega t \rightarrow \cos \omega t = \frac{x}{A_1}$

$$y = A_2 \cos 2\omega t = A_2 \left(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t\right) = A_2 \left(2\cos^2 \omega t - 1\right) = \underbrace{A_2 \left(2\frac{x^2}{A_1^2} - 1\right)}_{\text{parabola}}$$

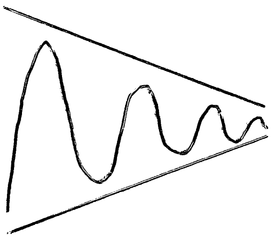


Csillapított rezgések

Kísérlet:

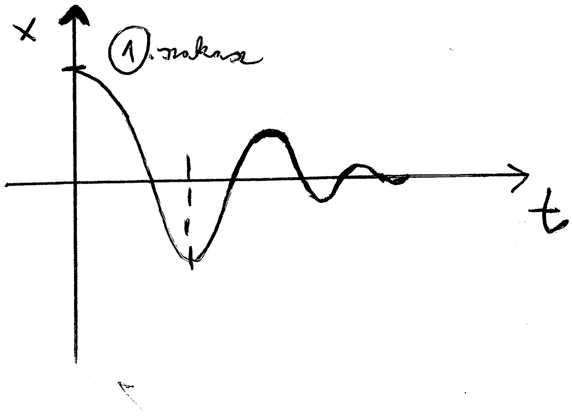


közegellenállás



súrlódás

1) Súrlódással csillapított rezgés:



mindig ellentétes irányú a sebességgel a súrlódás

$$m\ddot{x} = -Dx - F_S \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$$

1. szakasz : $\dot{x}$ negatív

$$m\ddot{x} = -Dx + F_S$$

$$m\ddot{x} = -D\left(\overbrace{x - \frac{F_S}{D}}^{y}\right)$$

$m\ddot{x} = -Dy$ ahol $y = x - \frac{F_s}{D}$ $\quad \ddot{y} = \ddot{x}$ $\left(\frac{F_s}{D} = \text{konstans } 0 \text{ lesz}\right)$

$m\ddot{y} = -Dy$

↳ olyan rezgés, melynek ~~az $y = x - \frac{F_s}{D}$ körül rezeg~~) ← y egy "sima" rezgés $A\cos(\omega t + \varphi)$ alakú

② szakasz: $\quad y + \frac{F_s}{D} = x$ lesz a valódi kitérése

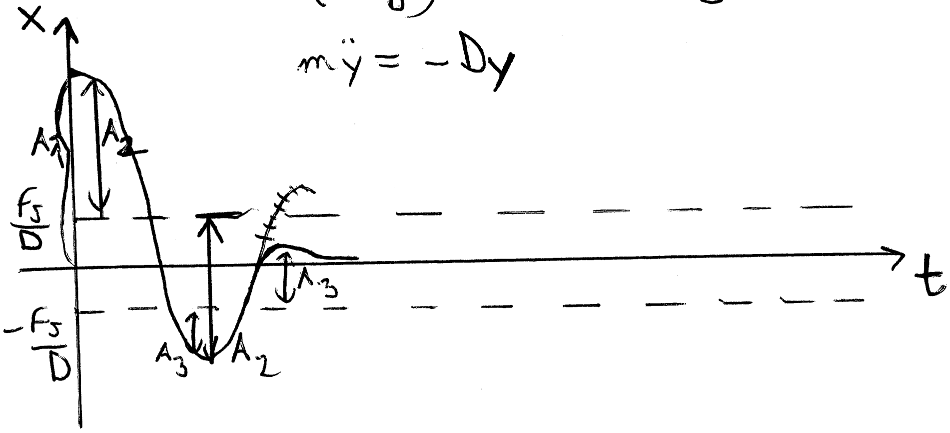
↓

$x = \frac{F_s}{D}$ mint tengely körül rezeg

$m\ddot{x} = -Dx - F_s$

$m\ddot{x} = -D\left(x + \frac{F_s}{D}\right) \qquad y = x + \frac{F_s}{D}$

$m\ddot{y} = -Dy$

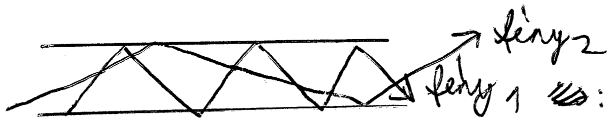


lineáris oszcillátor:

a periódusidő nem függ a kitéréstől

pl. ingaóráknál

optikai szál



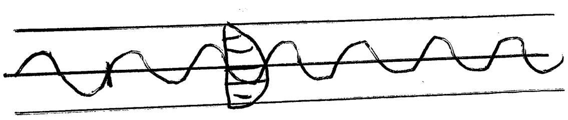
→ fény 2

fény 1: több utat tesz meg

↓

a végén fáziskésés lesz

de



→ középen nagyobb a törésmutató ↑ lassabb a fény

→ kint kisebb

↓

itt gyorsabban megy a fény

Mennyi lesz a fáziskésés?

Semekkora, mert a sin-os fény ugyan több utat tesz meg, de ~~gyo~~ változó ~~gyorsul~~ sebességgel

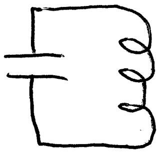
a frekvencia (periódusidő) nem függ az amplitúdótól ↑

- Ha jól állítják be, és egy harmonikus rezgés lesz (a sebesség és a kitérés közötti megfelelő összefüggéssel) mindig

2) Lineárisan csillapított rezgés:

a) kis sebességnél (mechanikai)

b) elektromos oszcillátor



a) $m\ddot{x} = -Dx - \underbrace{\alpha\dot{x}}$

a közegellenállási erő a sebességgel arányos

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Dx = 0$ /: m $\qquad \frac{\alpha}{m} := 2\beta \qquad D = m\omega_0^2$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Próbálkozás: x milyen fgv. legyen?

$x(t) = A(t)\cdot\cos(\omega t + \cancel{\varphi})$

↳ mindegy, hogy az időt hol kezdjük számolni

$x(t) = A(t)\cos(\omega t)$

$\dot{x}(t) = \dot{A}(t)\cdot\cos(\omega t)\overbrace{-\sin(\omega t)\cdot\omega}^{(\cos(\omega t))'}\cdot A(t) \qquad (-\sin(\omega t)\cdot\omega\cdot A(t))'$

$\ddot{x}(t) = \overbrace{\ddot{A}(t)\cos(\omega t) - \dot{A}\omega\sin(\omega t)}^{(\dot{A}(t)\cos(\omega t))'}\overbrace{-\dot{A}\omega\sin(\omega t) - A(t)\cdot\omega^2\cos\omega t}$

$\ddot{x}(t) = \ddot{A}(t)\cos(\omega t) - 2\dot{A}\omega\sin(\omega t) - A(t)\omega^2\cos\omega t$

$[\ddot{A}(t) - A(t)\omega^2 + 2\beta\dot{A}(t) + \omega_0^2 A(t)]\cos\omega t + \sin\omega t\,[-2\dot{A}(t)\omega - 2\beta A(t)\omega]$

~~Milyen~~ Minden időpillanatban igaz:

- $-\cancel{2}\dot{A}(t)\cancel{\omega} - \cancel{2}\beta A(t)\cancel{\omega} = 0 \qquad \leftarrow$ pl. ha $\omega t = \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos\omega t = 0$, $\sin\omega t = 1$

  $\dot{A}(t) = -\beta A(t)$

  $A(t) = A_0\cdot e^{-\beta t}$

- ha pl. $\omega t = 0$

  $\ddot{A}(t) + (\omega_0^2 - \omega^2)A(t) + 2\beta\cdot\dot{A}(t) = 0$

  $\beta^2 A_0\cancel{e^{-\beta t}} + (\omega_0^2 - \omega^2)A_0\cancel{e^{-\beta t}} - 2\beta^2 A_0\cancel{e^{-\beta t}} = 0$

$$\beta^2 \cancel{A_0} + (\omega_0^2 - \omega^2)\cancel{A_0} - 2\beta^2 \cancel{A_0} = 0$$

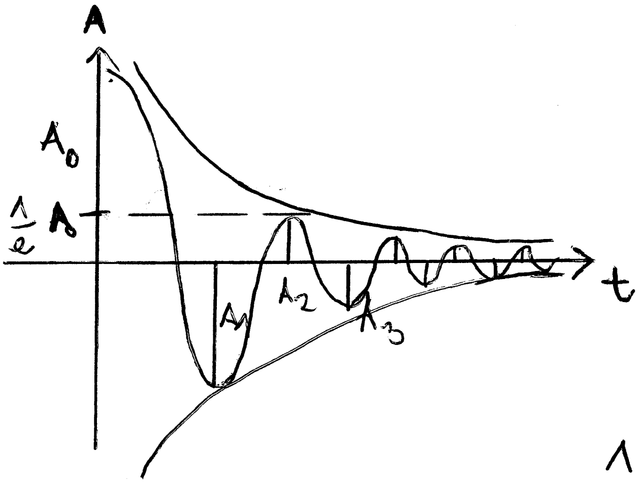
$$\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \qquad \boxed{\text{ha } \omega_0 > \beta}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \underbrace{A_1 \cdot e^{-\beta t}}_{A(t)} \cos(\omega t + \varphi)$$



$$e^{-\beta t}$$

$$\Lambda = -\log_e e^{-\beta t} = \beta t$$

Λ: Logaritmikus dekrementum

$$e^{-\beta n T} = e^{-1} \qquad \beta n T = 1 \qquad \cancel{n = \frac{1}{\beta T}} \qquad \boxed{n = \frac{1}{\beta T}}$$

n: jósági tényező
(hányat ~~leng~~ rezeg, mielőtt egy adott szint alá csökken)

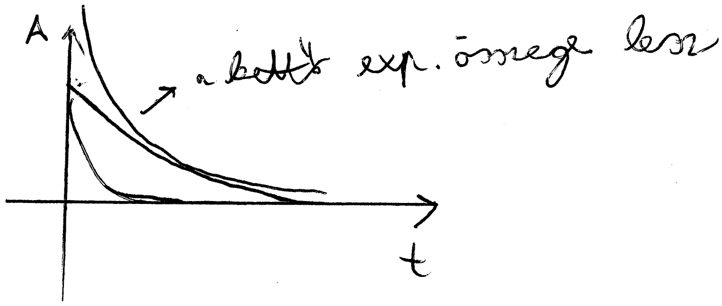
ha $\boxed{\omega_0 < \beta}$ $\qquad e^{-\lambda t} := x(t)$

$$\lambda^2 \cancel{e^{-\lambda t}} - \lambda \cdot 2\beta \cancel{e^{-\lambda t}} + \omega_0 \cancel{e^{-\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\beta + \omega_0 = 0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4\omega_0^2}}{2}=\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$$

$$x(t)=A_1e^{-\lambda_1 t}+A_2e^{-\lambda_2 t}=A_1e^{-\left(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}+A_2e^{-\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$$



Ha $\omega_0=\beta$ $\quad\omega_0\to\beta$

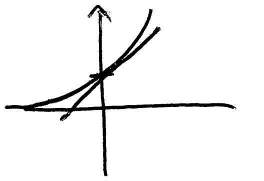
$$x(t)=A_1\cdot e^{-\beta t}\cdot e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}+A_2e^{-\beta t}\cdot e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}=$$

$$=e^{-\beta t}\left(A_1e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}+A_2e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)=$$

$$=e^{-\beta t}\left[\frac{A_1+A_2}{2}\left(\underbrace{e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}}_{1}+\underbrace{e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}}_{1}\right)+\frac{A_1-A_2}{2}\left(e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}-e^{+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)\right]$$

$$=e^{-\beta t}(A_1+A_2)+e^{-\beta t}\frac{A_1-A_2}{2}\left(\cancel{1}\underbrace{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t-\cancel{1}-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}_{-2\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)=$$

($e^x\simeq 1+x$

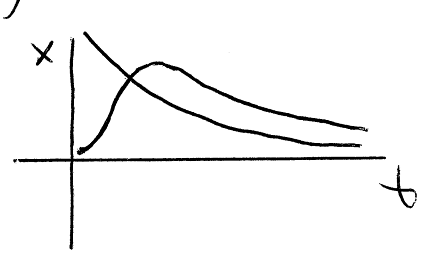


0-ban: $(e^x)'=e^x=e^0=1$

$\to$ az érintő egyenlete $x+1$)

$$x(t)=e^{-\beta t}(A_1+A_2)-e^{-\beta t}\,t\underbrace{(A_1-A_2)\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}_{-c}$$

$$x(t)=A\cdot e^{-\beta t}+c\cdot te^{-\beta t}$$



9. óra

Rezgések

Kényszerrezgések

$$\boxed{ma = -Dx - \lambda v + F(t)}$$

$F(t)$: van még valamilyen időtől függő kényszererő

Mi most csak <u>periodikusan</u> változó F erőkkel foglalkozunk:

Ilyenkor $\boxed{F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega t)}$ -ként felírható

<u>Kísérlet:</u> ezt az erőt mi adjuk meg

rezonancia: a kényszererő A-ját nem változtatjuk

a frekvenciáját növelve először nő a <u>test</u> amplitudója ~~frekvenciája~~,

majd egy maximális érték után csökkenni kezd.

viszonylag kis amplitudójú erővel <u>nagy</u> hatás érhető el

→ ezt a fizikai kísérleteknél sok helyen alkalmazzák

$$ma = -Dx - \lambda v + F(t) \quad /:m$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta \cdot \dot{x} = f_0 \cdot \sin \omega t \qquad \text{ahol: } \omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad 2\beta = \frac{\lambda}{m}$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

↓

elég a probléma 1 megoldását megadni,
utána hozzáadjuk a homogén egyenlet
megoldásait, ahol $f_0 \cdot \sin \omega t = 0$

↙ a talált megoldás hosszú időn keresztül megmarad

↘ a homogén megoldás lecseng (egy idő után beáll az állandó állapot)

Kísérletből látható, hogy $\hookrightarrow x(t)$ ^(a rezgés kitérése) valamilyen:

$\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\boxed{x_0(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$ alakú ~~függvény~~ ~~$\omega = \omega_0$ (kezdeti)~~, ahol

és $\underbrace{A(\omega),\ \varphi(\omega)}$ fennáll

$\downarrow$

ω megegyezik a kényszerítő körfrekv.-val (tapasztalat)

a rezgés amplitudója és fáziskésése függ a gerjesztőerő frekvenciájától

Mellékszám.:

I. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

II. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$$\ddot{x}_0(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \downarrow \mathrm{I.}$$

$$\hookrightarrow \ddot{x}_0(t) = -A\omega^2 \cos\varphi \cdot \sin\omega t - A\omega^2 \sin\varphi \cdot \cos\omega t$$

$$\dot{x}_0(t) = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = (f_0 \sin\omega t) =$$

$$= -A\omega^2\cos\varphi \cdot \sin\omega t - A\omega^2 \sin\varphi \cdot \cos\omega t + A\omega_0^2 \cos\varphi \cdot \sin(\omega t) +$$
$$A\omega_0^2 \sin\varphi \cdot \cos(\omega t) + 2\beta \cdot \omega A\cos\varphi \cdot \cos(\omega t) - 2\beta\omega A \cdot \sin\varphi \cdot \sin(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left[-A\omega^2\cos\varphi + A\omega_0^2\cos\varphi - 2\beta\omega A\sin\varphi\right]\sin(\omega t) + \\ &+ \left[-A\omega^2\sin\varphi + A\omega_0^2\sin\varphi + 2\beta\omega A\cos\varphi\right]\cos(\omega t)\end{aligned}\right\} = f_0 \sin(\omega t)$$

Ez csak úgy lehet ha $b \cdot \cos(\omega t)$-nél $b = 0$ és $a \cdot \sin(\omega t)$-nél $a = f_0$

$$\text{I. } A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega \sin\varphi\right] = f_0$$

$$\text{II. } A\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi\right] = 0$$

$$\text{II.} \rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}}$$

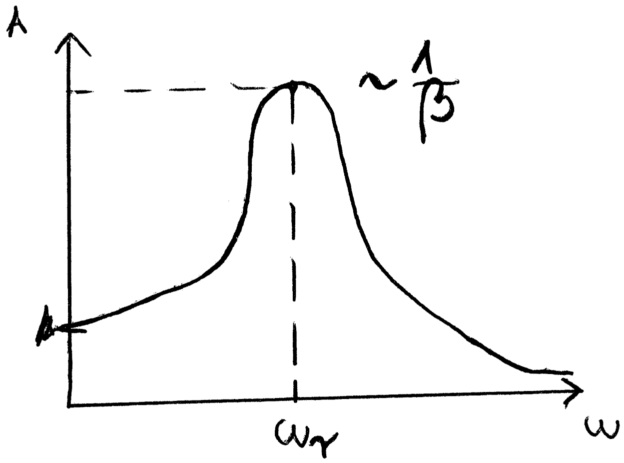
$\cancel{\text{I}^2+\text{II}^2}$

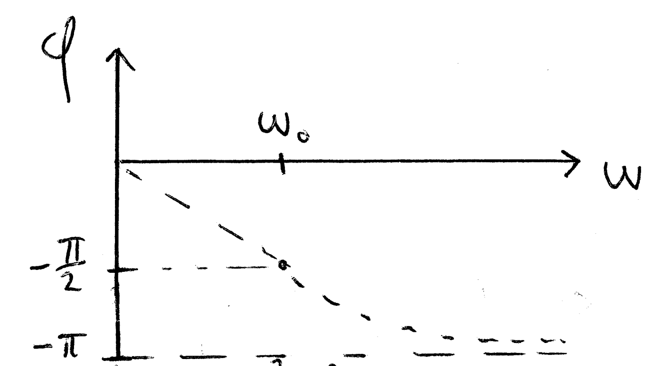
$$\oplus\begin{cases} \text{I}^2: A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2\cos^2\varphi + 4\beta^2\omega^2\sin^2\varphi - 4\beta\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right] = \\ \text{II}^2: A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2\sin^2\varphi + 4\beta^2\omega^2\cos^2\varphi + 4\beta\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right] = \end{cases}$$

$$\boxed{A^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right] = f_0^2}$$

Elemzés: $\omega_0 =$ állandó $\quad \omega =$ mi változtatjuk a kísérlet során

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$





kis ω-ákra ω^2 elhanyagolható

$\hookrightarrow \frac{2\beta}{-\omega_0^2}\omega \rightarrow$ lineáris

$-\frac{\pi}{2}$-nél $\omega = \omega_0$

↓

Van-e A-nak maximuma?

Ha a gyökös kif. minimális, ott lesz max. A

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right]=\cancel{2}\cdot(-\cancel{2}\omega)(\omega_0^2-\omega^2)+\cancel{8}^{2}\beta^2\omega=0$$

$\cancel{\omega \neq 0}$

$$2\beta^2\omega=(\omega_0^2-\omega^2)\omega$$

$\omega=0$

$$2\beta^2=\omega_0^2-\omega^2$$

$$\boxed{\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$$

rezonanciafrekvencia

Fontos megjegyzések:

1) ω_r-nél $\varphi \neq -\frac{\pi}{2}$

2) β-t és ω_0-t mi állítjuk be → úgy is beállíthatjuk, hogy ne legyen ω_r

3) $$A(\omega_r)=\frac{f_0}{\sqrt{\underbrace{4\beta^4}_{(2\beta^2)^2=(\omega_0^2-\omega_r^2)^2}+4\beta^2\cdot(\omega_0^2-2\beta^2)}}$$

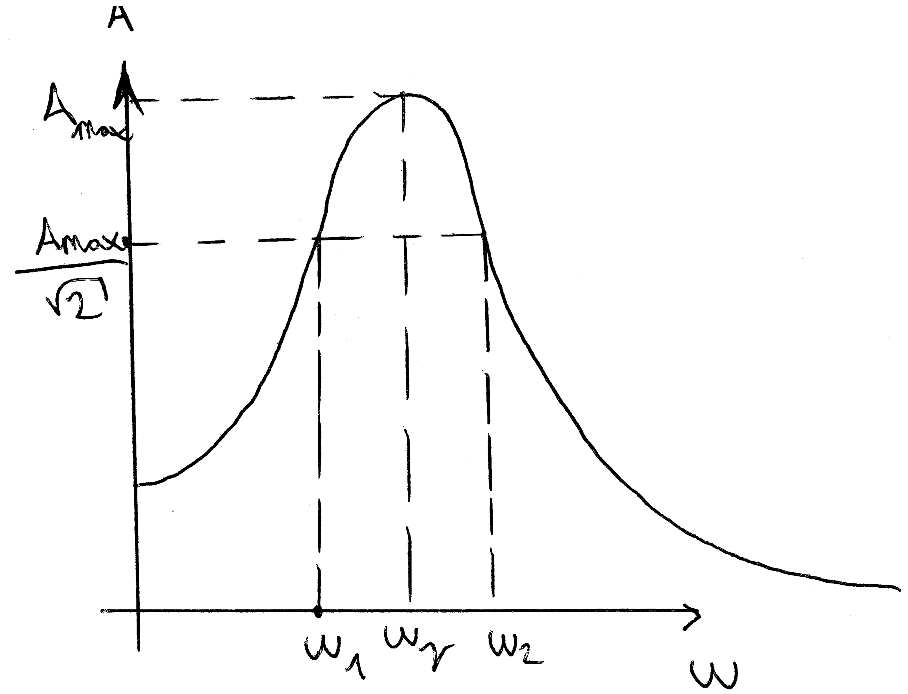
$$A(\omega_r)=\frac{f}{2\beta\sqrt{\beta^2+(\omega_0^2-2\beta^2)}}$$

↓ ilyen értéknél az Ampl.

→ ha elhanyagolható a csillapítás (β kicsi → β^2 elhany.)

↓

a maximális amplitudó nagyon megnő.



Mikor lesz az energia a maximális érték fele?

Ilyen $A_{max}^2 \sim E$

$$\frac{A_{max}^2}{2} \sim \frac{E}{2}$$

$\downarrow$

$A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ mikor lesz?

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} = \frac{\overbrace{f_0}^{A_{max}}}{\sqrt{2}\cdot 2\beta\cdot\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2 = 8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^4+\left[-2\omega_0^2+4\beta^2\right]\omega^2+\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)=0$$

$\hookrightarrow \omega_1^2$

$\hookrightarrow \omega_2^2$

$$\omega_1^2-\omega_2^2 = \sqrt{(4\beta^2-2\omega_0^2)^2-4\left(\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)\right)} =$$

$4\omega_0^4$ kiesik, β^2 kivihető a gyök al

$\downarrow$

$$= \beta(\ldots\ldots)$$

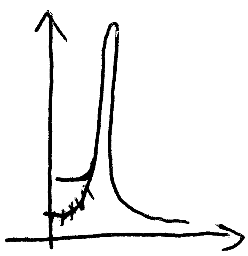
$$(\omega_1-\omega_2)\underbrace{(\omega_1+\omega_2)}_{\substack{\text{kb. } 2\omega_r, \\ \text{mert } \frac{\omega_1+\omega_2}{2}=\omega_r \\ \text{nagyjából}}}=\beta(\dots)$$

$$\Delta\omega \sim \beta$$

= A görbe magassága fordítottan, szélessége egyenesen arányos β-val.

⇓

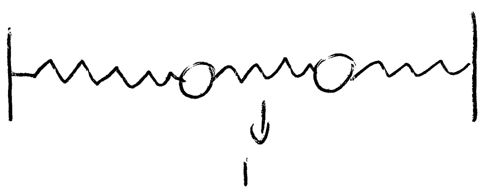
ha csökkentem a csillapítást → β nagyon kicsi lényegében 1 frekvencián fog rezegni, de nagyon nagy amplitúdóval

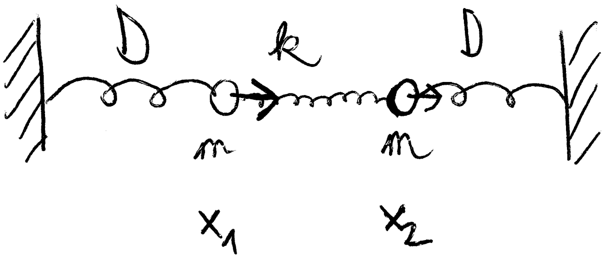


10. óra

Csatolt rezgések

A két rezgést összekötjük





$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Olyan kezdeti feltételeket tudunk beállítani, amikor mind a kettő külön külön harmonikus rezgőmozgást végez ugyanazon a frekvencián.

I. ha: $x_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t)$ $\qquad \ddot{x}_1 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)x_1 + \Omega^2 x_2 \qquad \frac{D}{m} = \omega_0^2$

$x_2 = A_2 \sin(\omega t) \qquad \ddot{x}_2 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)x_2 + \Omega^2 x_1 \qquad \frac{k}{m} = \Omega^2$

ha a frekvenciák megegyeznek

(x_1 és x_2 felcserélhetők)

$$-\omega^2 A_1 \cancel{\sin(\omega t)} = -(\omega_0^2 + \Omega^2) A_1 \cancel{\sin(\omega t)} + \Omega^2 A_2 \cancel{\sin(\omega t)}$$
$$-\omega^2 A_2 \cancel{\sin(\omega t)} = -(\omega_0^2 + \Omega^2) A_1 \cancel{\sin(\omega t)} + \Omega^2 A_2 \cancel{\sin(\omega t)}$$

$$-\omega^2 A_1 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)A_1 + \Omega^2 A_2$$
$$-\omega^2 A_2 = -(\omega_0^2 + \Omega^2)A_2 + \Omega^2 A_1$$

$A_1, A_2 = 0$ pl. megoldás $\rightarrow$ nem mozdul meg egyik sem

---

$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) A_1 = \Omega^2 A_2$$
$$(\omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2) A_2 = \Omega^2 A_1$$

$$A_2 = \frac{(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)}{\Omega^2} A_1$$ az 1. egyenletből

$$\frac{(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2}{\Omega^2} A_1 = \Omega^2 A_1$$

$$\frac{(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2-\Omega^4}{\Omega^2} A_1 = 0$$

↙ $A_1 = 0$

↘ $(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 - \cancel{A}\Omega^4 = 0$

↓

~~tet~~ ha ω egy meghatározott értéket vesz fel, akkor bármilyen A_1-re kialakul ez a mozgás

$$(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 = \Omega^4$$

$$\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2 = \pm\Omega^2$$

1) $\omega_0^2-\omega^2=0$

$\omega_0^2=\omega^2$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2} = \frac{\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}+\cancel{\Omega^2}}{\cancel{\Omega^2}} = 1$$

2) $\omega_0^2+2\Omega^2=\omega^2$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\cancel{\omega_0^2}+\Omega^2-\cancel{\omega_0^2}-2\Omega^2}{\Omega^2} = \frac{-\cancel{\Omega^2}}{\cancel{\Omega^2}} = -1$$

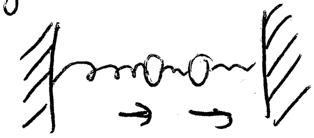
↓

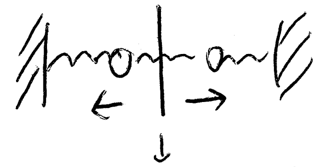
a kettő között 180°-os fáziseltérés van

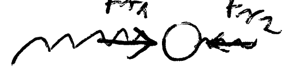
↙

(Mi ezt a ~~két~~ feltételt hat. meg $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$, ebből következik visszafelé, hogy $\omega_1=\omega_2$ lesz)

2. megoldás:

1)  ha $A_1 = A_2$, akkor a középső rugóerő 0

2)  ha $A_1 = -A_2$

ez a pont nem mozdul el $\Rightarrow$ olyan mintha mindkét rugóra  erő hatna külön-külön

Miért kellett mégis bonyolult módon megoldani? Mert a megoldásban nem használtuk ki, hogy a két tömeg egyenlő $\rightarrow$ analóg módon oldhatunk meg nehezebb problémákat is.

Másfajta rezgések kiszámítása: az előző 2 esetből tesszük össze (rezgések összetétele)

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A^{1.\,\text{frekvencia}}_{1.\,\text{test}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A^{2.\,\text{frekv.}}_{1.\,\text{test}} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ az első rezgést előbb az előbb kiszámolt 2 komponensből tesszük össze

az arányok $\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$ változatlanul maradnak

4 szabad paraméter lesz: $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \varphi_1, \varphi_2$

$$X_1 = A\left(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right)$$

$\hookrightarrow$ lebegés:

ha $\Omega - \omega_1$ kicsi gyenge csatolás

$\sim \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ frekvencián rezeg $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ szerint változó amplitúdóval péntek 15^{00} Eötvös-verseny

Impulzus

$$m\underline{a} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

$$\frac{d}{dt}(m\underline{v}) = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

$$\underline{p} = m\underline{v}$$

$\downarrow$

új jelölés, elnevezzük impulzusnak (lendület)

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t) \Rightarrow \underline{p}(t+\Delta t) = \underline{p}(t) + \overbrace{\underline{F}\Delta t}^{p(\Delta t)}$$

$$\dot{\underline{r}} = \frac{\underline{p}}{m} \left(= \frac{\cancel{m}\underline{v}}{\cancel{m}} = \underline{v} \right) \qquad \underline{r}(t+\Delta t) = \underline{r}(t) + \frac{\underline{p}}{m}\Delta t$$

$\downarrow$

egy numerikus módszer arra, hogy jól közelítsük ezeket a függvényeket, ha Δt-t kicsire választjuk

pl. ha $\underline{F}$-et tudjuk $\to \underline{F}\Delta t \to \tilde{\underline{p}}$

$\sim \underline{r}$

$$m\underline{a} = \underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

$$\underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M} \qquad \underline{M} \text{ forgatónyomaték}$$

$$\underline{r} \times \frac{d}{dt}\underline{p} = \underline{M} \qquad \underline{N} = \underline{r} \times \underline{p}$$

$\underline{N}$: perdület (impulzusmomentum)

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = (\underline{r} \times \underline{p})^{\bullet} = \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \overbrace{\underline{p}}^{m \cdot \dot{\underline{r}} \text{ (def. szerint)}}}_{0} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}}$$

ez belátható koordinátákkal

(mert $\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}} = 0$ ‖-ak)

$\Downarrow$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underbrace{\underline{r} \times \dot{\underline{p}}}_{\text{lsd. előbb}} = \underline{M} \quad \cancel{\text{felsd.:}}$$

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M}}$$

Gyakran előfordul, hogy egy ~~testre~~ ható erő egy adott pontba mutat mindig.

<u>Centrális erőtér</u>

ilyenkor $\underline{F} \parallel \underline{r} \Rightarrow \frac{d\underline{N}}{dt} = 0 = \underline{M}$

Ez csak úgy lehet, ha az erővektor időben nem tud megváltozni.

$\underline{N} = \text{áll} \qquad \left(N = \int \frac{dN}{dt} = \int 0 = c\right)$

= Ha az erő mindig a centrum felé mutat, akkor az erő nem változhat meg.

11. óra

Ismétlés

1) $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

$\underbrace{\underline{r} \times m\ddot{\underline{r}}} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M}$ → új jelölés

$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\underline{r} \times m\underline{v}\right)}_{\underline{N}}$ → új jelölés

2) Mikor jó ez?

Ha centrális erőtér van $(\underline{F} \parallel \underline{r})$, akkor $\underline{M} = 0$

ilyenkor $\underline{N}$ = áll

3) ↳ ha a kiindulófeltételeket (r_0, v_0) tudjuk, akkor N_0 kiszámítható, és $N = N_0$ minden pillanatban

↳ segít a mozgás kiszámításában

4) $\underline{N}$, $\underline{M}$ függ az inerciarendszertől

$$\underline{r} \cdot \underline{N} = \underline{r}(\underbrace{\underline{r} \times \underline{p}}_{\underline{N}}) = 0$$

⇓

ez csak úgy lehet, ha $\underline{N} \perp \underline{r}$-re

= centrális erőtérben sík mozgás létezik csak,

mert $\underline{N} \perp \underline{r}$-re
↓ áll ⇓
$\underline{r}$ az $\underline{N}$-re merőleges síkban mozog

↓ mert $\underline{N}$ iránya állandó, és nem tud megváltozni (mindig merőleges $\underline{r}$-re) ~~$\Leftrightarrow \underline{r} \perp \underline{v}$~~

~~(és r ill ha r síkja megváltozna, N iránya is megváltozna)~~

5) Ilyenkor síkbeli polárkoordinátarendszert használunk:

$$\underline{r} = r\cdot\underline{e}_r \quad , \underline{v} = \dot r\,\underline{e}_r + r\dot\varphi\cdot\underline{e}_\varphi \qquad \underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi$$

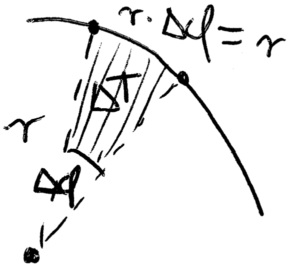
$$\frac{\underline{N}}{m} = \underline{r}\times\underline{v} = r\cdot\cancel{(r_2)}\,\underline{e}_r \times \left(\dot r\,\underline{e}_r + r\dot\varphi\cdot\underline{e}_\varphi\right) =$$

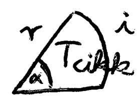
$$= \underbrace{r\cdot\dot r\,\underline{e}_r\times\underline{e}_r}_{0} + r\cdot r\cdot\dot\varphi\cdot\underbrace{\left(\underline{e}_r\times\underline{e}_\varphi\right)}_{\substack{\text{egységvektor}\\ (\underline{e}_3)}}$$

- $\boxed{|\underline{N}| = m\,r^2\cdot\dot\varphi = \text{áll}}$

csak centrális erőtérben

Körmozgás

1) 

mo.: 

Δt idő ~~múlva~~ alatt:

$$\Delta T = \frac{1}{2}r^2\cdot\dot\varphi\,\Delta t \;/:\Delta t$$

$$\dot T = \frac{1}{2}r^2\cdot\dot\varphi = \text{áll}$$

$$\frac{\frac{i}{r}(=\alpha)}{2\pi} = \frac{T_{cikk}}{T_{kör}}$$

$$\frac{i}{2\pi r} = \frac{T_{cikk}}{r^2\pi}$$

$$\frac{ri}{2} = T_{cikk}$$

– A mozgás során a „területsebesség" állandó:
a sugár egységnyi idő ~~alatt~~ alatt u. a. területet súrol.

Kepler II. törvénye
+ több: nem csak bolygómozgásnál igaz, hanem minden körmozgásnál

Munka, teljesítmény

1) $\underline{F} = m \cdot \underline{a} \quad / \cdot \underline{v}$

$$\boxed{\underline{F}\,\underline{v} = m \cdot \underline{a} \cdot \underline{v} = P}$$ (teljesítmény) power

$$m\,\dot{\underline{v}} \cdot \underline{v} = \frac{d}{dt}\boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{E\,\text{kinetikus}}}$$

msz.: $\leftarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2(t) = \underbrace{mv(t)}_{\text{külső fgv. deriváltja } v(t) \text{ helyen}} \cdot \underbrace{\dot{v}(t)}_{\text{belső fgv. deriváltja } t \text{ helyen}}$

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = P$$

ha $P = 0$, akkor a mozgási energia nem változik meg

pl. mágneses térben $\underline{F_L} \perp \underline{v} \Rightarrow$ a mágneses tér maga nem ~~gyorsítja~~ változtatja meg a részecske mozgási energiáját.

$$\frac{d}{dt}E_{kin} = P \Big/ \int_{t_0}^{t} (\quad)\,dt$$

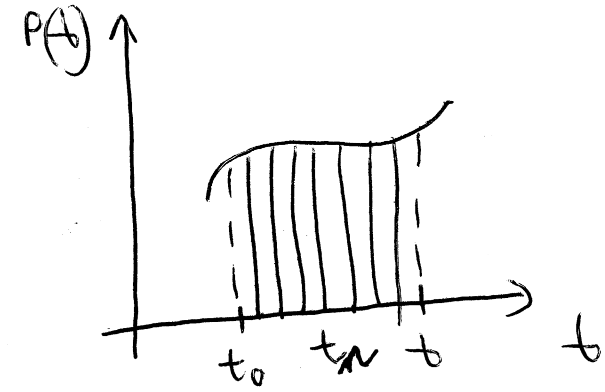
$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt$$

Legyen $\boxed{\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = W}$ (work, munka)

Vagyis a kinetikus energia megváltozása egyenlő a munkával: (munkatétel)

$$\boxed{W_{t_0,t} = E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0)}$$

2)



N

$$\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt \approx \sum_{n=1}^{N} P(t_n)\,(t_n - t_{n-1})$$

Tegyük fel, hogy $\underline{F}(\underline{r})$ → az erő csak a helytől függ (erőtérben mozog)

$$\sum_{n=1}^{N} P(t_n)\cdot(t_n - t_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_n))\,\underbrace{\underline{v}(t_n)\,(t_n - t_{n-1})} =$$

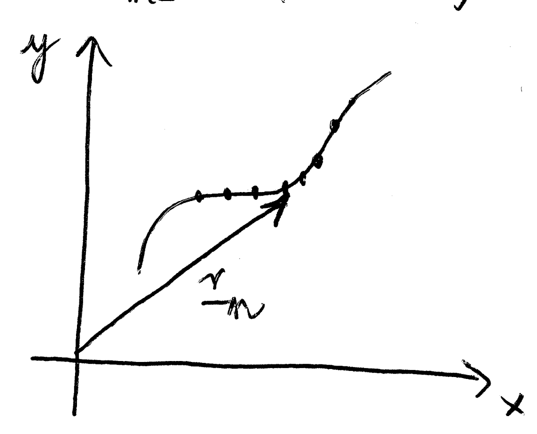
$P = \underline{F}\cdot\underline{v}$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{\underline{r}_n - \underline{r}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}$$

$\underline{v}\,(t_n - t_{n-1}) = \underline{r}_n - \underline{r}_{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_n))\,(\underline{r}(t_n) - \underline{r}(t_{n-1}))$$

$$W \approx \sum_{n=1}^{N} \underline{F}((\underline{r}(t_n))\;(\underline{r}(t_n) - r(t_{n-1}))$$



$$\sum_{n=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}_n)\,(\underbrace{\underline{r}_n-\underline{r}_{n-1}}_{\Delta r})$$

A görbéhez és a fgv-hez hozzárendelünk egy **számot**

$$\boxed{W = \int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}}$$

egy vektorfv. egy adott görbére vonatkozó integrálja

nem kell a valódi **pályára** kiszámítani a munkát, lehet tetszőleges görbére is ⟷ a munkatételhez **rendes** idő kell, most nem kell **idő**.

$\underline{r}(s)$

Konzervatív erőtér

a) Olyan erőtér, melyre bármely zárt görbén végighaladva a munka **0**.

- $W \equiv \int_0 \underline{F}\, d\underline{r} \equiv 0$
- jelölés $\oint \underline{F}\, d\underline{r} = 0$

b) 

$r_1 \to r_2$-be 2 görbén is eljuthatunk

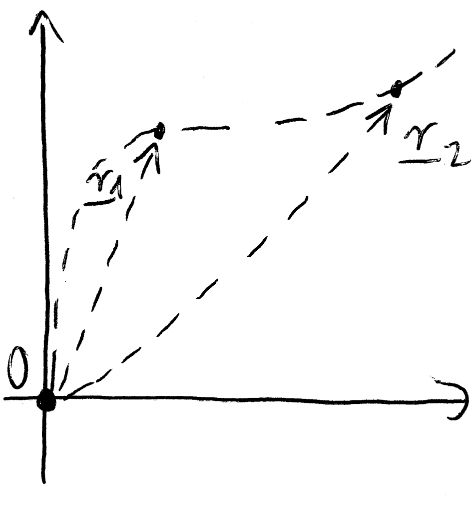
⇒ a munka, ha $r_1 \to r_2$-be megyünk, <u>független</u> az <u>úttól</u>

$$\int_{\underline{r}_1, G_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r} = \int_{G_2} \underline{F} d\underline{r} \quad \text{mert} \quad \overbrace{\int_{\underline{r}_1, G_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r}}^{\text{def. (a)) szerint:}} + \underbrace{\int_{\underline{r}_2, G_2}^{\underline{r}_1} \underline{F}\, d\underline{r}}_{} = 0$$

$$\int_{\underline{r}_1, G_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r} - \int_{\underline{r}_1, G_2}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r} = 0$$

c) Rögzítsünk egy origót!
Így minden ponthoz hozzárendelhetünk egy skalárt
↳ azt az skalárt, ami azt a munkát adja, ami az origóból az adott ~~ponthoz~~ pontba eljuttat ~~minket~~.

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = -\int_{\underline{0}}^{\underline{r}} \underline{F}\, d\underline{r}}$$ → potenciális energia



$$\Phi(\underline{r}_2) = -\int_{\underline{0}}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} =$$

$$= \underbrace{-\int_{0}^{\underline{r}_1} \underline{F}(\underline{r}) d\underline{r}}_{\Phi(\underline{r}_1)} - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

$$\Phi(\underline{r}_2) = \Phi(\underline{r}_1) - W(\underbrace{r_1 \to r_2}_{1,2})$$

$$\boxed{W_{1,2} = \Phi(\underline{r}_1) - \Phi(\underline{r}_2)}$$

Ha ez egy valódi pályagörbe, akkor ~~a pot.~~ a munka egyenlő a pot. energia megváltozásával:

$$E_{kin}(t_2) - E_{kin}(t_1) = \phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2)$$

$$E_{kin}(t_2) + \phi(\underline{r}(t_2)) = E_{kin}(t_1) + \phi(\underline{r}(t_1))$$

Konzervatív erőtérben találtunk még egy olyan mennyiséget, ami az időben nem változik meg.

Legyen a neve: $E_{össz} = E_{kin}(t_1) + \phi(\underline{r}(t_1))$

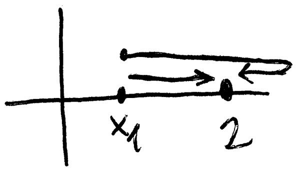
feltétel: konzervatív legyen az erőtér

Példák

1) 1D-ós mozgás:

$F(x)$ → ~~Áll.~~ az ilyen mozgás mindig konzervatív, mert:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$



→ a munka független az úttól

$$\phi = -\int_0^x F(x)\,dx$$

$$F(x) = -\frac{d\phi}{dx}$$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + \phi(x) = E$$

Ebből meg tudjuk határozni a mozgást, ha E-t ismerjük.

Miért jó? Csak első deriváltat tartalmaz: $\dot{x} = \pm\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}$

↳ elsőrendű egyenlet

12. óra

1) Ism.:

$$W=\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt$$

- és ha $\underline{F}(\underline{r})$, akkor $W=\int_G \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r}$
- amennyiben $\oint \underline{F}(\underline{r})=0$ → bármely zárt görbére vonatkozó integrálja 0

(konzervatív erőtér)

- legyen:

$$\Phi(\underline{r})=-\int_{\underline{0}\,(\text{origó})}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\,d\underline{r}$$

konvenció az előjelre

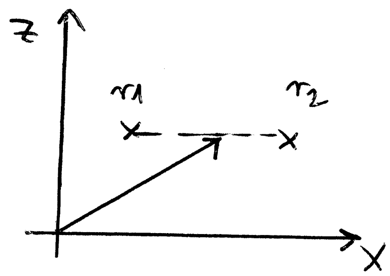
$$=\quad \boxed{E_{kin}+\Phi(\underline{r})=E=\text{áll}}$$

valódi pályán vett pot. energia

2) Mi van, ha nem $\underline{F}(\underline{r})$-t adják meg, hanem a potenciált $(\Phi(\underline{r}))$?

$$\Phi(\underline{r}_2)-\Phi(\underline{r}_1)=-\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2}\underline{F}\,d\underline{r}$$

Vegyük fel úgy r_1 és r_2 pontokat, hogy azok egy x tengellyel ∥ ~~tan~~ egyenest hat. meg.



megegyeznek

$\underline{r}_1=(x_1, y, z)$ $\quad\underline{r}_2=(x_2, y, z)$

$(d\underline{r}=\underline{r}_2-\underline{r}_1=(x_2-x_1, 0, 0))$

$$\Phi(x_2,y,z)-\Phi(x_1,y,z)=-\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2}F_x(x,y,z)\,dx$$

↳ jelentése: F erő x komponensét integráljuk x-szerint, mert csak x változik a mozgás során

Vagyis: $\overset{\phi(x_2)-\phi(x_1)}{=} -\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f_x(x,y,z)\,dx}_{\text{egyváltozós fgv.-t csináltunk a 3 változós fgv.-ből}} \Big|\; y,z = \text{áll}$

~~Ebb~~ Tehát $\phi(x_2,\,y,z) - \phi(x_1,y,z) = -\int_{x_1}^{x_2} f_x(x,y,z)\,dx$

$$f_x(x,y,z) = \frac{-d\,\phi(x,y,z)}{dx} \Big|\; y,z = \text{áll}$$

---

ugyanígy kell kiszámítani f y és z komponensét (ekkor csak y, illetve z szerint deriválok).

Új jelölés: $f_x(x,y,z) = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ → úgy deriváljuk $\phi(x,y,z)$ fv.-t x-szerint, hogy közben $y,z = \text{áll}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\underline{f}(\underline{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\,\text{grad}\,\phi}$$

parciális deriválás: egy többváltozós fgv.-t mindig egy adott változó szerint deriváljuk, miközben a többi változó állandó, és ezt minden változóra eljátszuk.

$$-\text{grad}\,\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = -\nabla\phi$$

más jelölések: vektoroperáció ∇: nabla operáció: skalár → vektor fv.

$\Downarrow$

Következmény:

- ha megadom ϕ-t (~~skalár~~tgv.), akkor ~~ki~~ előállíthatom az erőteret [$\underline{F}(\underline{r})$-t kapom ~~megadom~~] az előző módszer szerint.

3) $$\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1) = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r}$$

$$\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} (\text{grad}\, \phi)\, d\underline{r}$$ $\to$ ez egy matematikai azonosság (ezt jelenti a gradiens)

ha $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{h}$

$\underline{r}_2 - \underline{r}_1 = \underline{h}$

$$\phi(\underline{r}+\underline{h}) \cong \phi(\underline{r}) + (\text{grad}\, \phi)\, \underline{h}$$

így lehet közelíteni a fgv. értéket $\underline{r}+\underline{h}$ helyen

$\Downarrow$

a gradiens a 3 változós fgv-ek esetén a deriválás ~~gra~~ szerepét játssza. (mert $f(x+h) = f(x) + f'(x)h$)

(Elvileg egy vektorfgv.-t nem lehetne deriválni, mert $\frac{}{\underline{h}}$ $\to$ nem értelmezett

A gradiens alkalmazása:

a) $\text{grad}\,|\underline{r}|$

$$\frac{\partial |\underline{r}|}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \overbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}^{|\underline{r}|} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x + \underset{\uparrow}{0} + \underset{\uparrow}{0}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y és z konstans

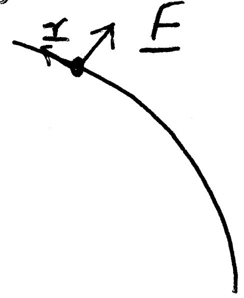
$$= \frac{x}{|\underline{r}|}$$

$$\frac{\partial |\underline{r}|}{\partial y} = \frac{y}{|\underline{r}|} \qquad \frac{\partial |\underline{r}|}{\partial z} = \frac{z}{|\underline{r}|}$$

$$\text{grad}\,|\underline{r}| = \left(\frac{x}{|\underline{r}|}; \frac{y}{|\underline{r}|}; \frac{z}{|\underline{r}|}\right) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{e}_r \rightarrow r \text{ irányú egységvektor}$$

b) Ekvipotenciális felületek:

Φ = áll



$\underline{F}$-nek merőlegesnek kell lennie

↳ mert ilyenkor $\underline{F} \cdot \underline{r} = \underline{F}(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) = 0$

$$\Phi(\underline{r}_2) - \Phi(\underline{r}_1) = 0$$

= a gradiens (erő) merőleges az ekvipotenciális felületekre

(ha pl. $\Phi = |\underline{r}|$, akkor a gradiens normálvektora a gömbnek)

c) Hogyan hat a gradiens egy vektorfüggvényre?

$\underline{A}(\underline{r})$

$\underline{\nabla}$ $\downarrow$ a gradiens egy vektort ad

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\underline{A}$$

A_x, A_y, A_z is fgv.-ek

$$(\underline{\nabla}\times\underline{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad \nabla\times\underline{A} = \mathrm{rot}\,\underline{A} = \underbrace{\mathrm{curl}\,\underline{A}}_{\text{angol név}}$$

- $$[\underline{\nabla}\times(\nabla\phi)]_z = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}_{\text{„}A_y\text{"} = (\nabla\phi)_y} - \frac{\partial}{\partial y}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}_{\text{„}A_x\text{"} = (\nabla\phi)_x} \equiv 0$$

rendes fgv.-eknél (többszörösen deriválhatóak) deriválási a sorrend felcserélhető.

$$\underline{\nabla}\times\underbrace{\underline{F}}_{\nabla\phi} = 0$$

Ha az $\underline{F}$ fv. egy potenciálból származtatható, vagyis ~~rotáció~~ konzervatív erőtér, akkor a ~~rotá~~ciója $0 = \mathrm{rot}\,\underline{F}$ ~~a rotá~~

↳ Így lehet ellenőrizni, hogy konzervatív erőtér-e egy adott erőtér (F fv.)

A munkatétel, energia és a gradiens felhasználásai

1) $F(x) = -\dfrac{d\phi(x)}{dx}$

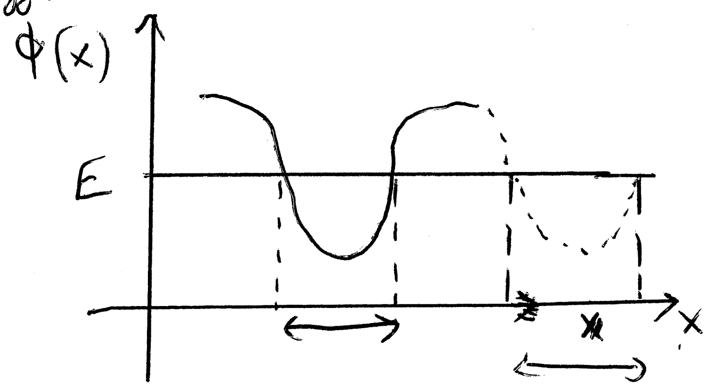
$\frac{1}{2}mv^2 + \phi(x) = E = \text{áll}$ a mozgás során

$\dot{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2E - \phi(x)}{m}}$

Elsőrendű diff. egyenletet csináltunk a másodrendű diff. egyenletből.

A kezdeti feltétel E paraméterben jelenik meg.

Legyen:



~~mech~~

- mivel $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ pozitív, akkor $\phi(x) \leq E$ lehet csak.
  Vagyis $\phi(x)$ görbéjéből meg tudom állapítani a mozgás ~~tartományát~~, ahol $\phi(x) \leq E$ lesz.
- lehetséges több ~~tartomány~~ is, de klasszikusan ez átjárhatatlan
- Alagút effektus:
- kvantummechanikában az e^- számára átjárható a 2 tartomány bizonyos valószínűséggel.

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}}\,\frac{dx}{dt} = 1 \Big/ \int_{t_0}^{t} \quad \leftarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}} \Big/ : \sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}$$

$$\pm \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dx}{dt'}}{\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}}\,dt' = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt}_{t-t_0} = t - t_0$$

egyszerűsítünk dt-vel, ÉS a határokat kiterjesztjük

msz.:

$$\pm \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}} = \pm \frac{dx}{dt}\,\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E-\phi(x)}{m}\right)}}$$

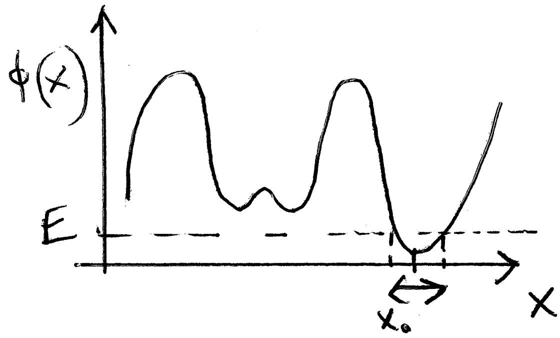
az új d valami mennyiség valami szerint $\int_{\text{valami}_0}^{\text{valami}}$-re

$$\pm \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\dots}}\,dt = \pm \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\dots}}$$

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\frac{E-\phi(x)}{m}}}$$

Ha megadunk egy $\phi(x)$ fv.-t, akkor ki tudjuk számítani, hogy mennyi idő alatt ér el egyik szélső helyzetből a másikba.

↳ mindig ki lehet számítani 1D-ban a mozgásegyenletet



minimumok: egyensúlyi helyzet, ahol a sebesség és az erő is 0.

$\phi(x) \cong \frac{D}{2}(x-x_0)^2$ → a harmonikus ~~r~~ rezgőmozgást fog végezni

$F(x) = -D(x-x_0)$

$m\ddot{x} = -D(x-x_0)$ $\qquad x - x_0 = u$

$m\ddot{u} = -Du$

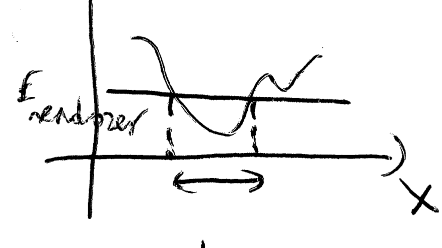
⇒ Ha az energiát leszorítjuk, akkor a test az egyensúlyi helyzet körül harmonikus rezgőmozgást fog végezni, közelíteni

pl. inga, atom a rácsban

13. óra

Legyen $F(x) \Rightarrow \phi(x)$ ahol $F = -\frac{d\phi}{dx}$

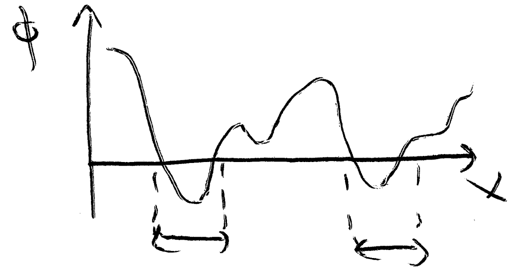
egyensúlyi helyzet van a szélsőértékekben



$\phi + E_{mozg} = E_{össz\ rendszer}$

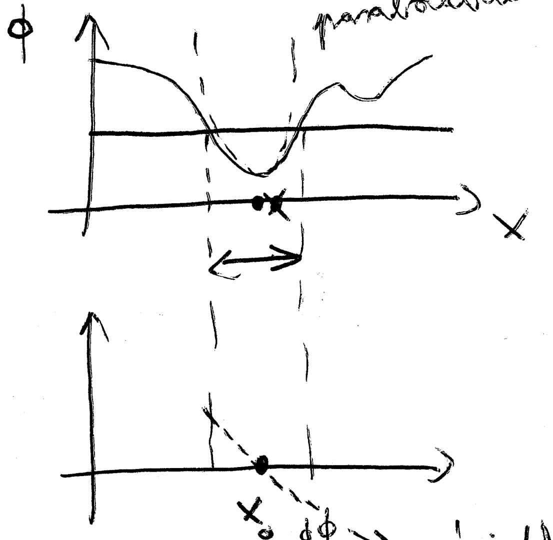
↓

a test nem tudja elhagyni ezt az állapotot, $E_{mozg} = -$ mert akkor $\phi > E$ lenne



a részecske milyen valószínűséggel át tud ugrani egy potenciál gátat

parabolával közelítjük



$F = \frac{d\phi}{dt}$ → az érintő a zérushelyen metszi az x tengelyt

$$F \approx -D(x - x_0)$$

$$D = -\frac{dF}{dx}(x_0) = \frac{d^2\phi}{dx^2}(x_0)$$

$$m\ddot{x} = -D(x - x_0)$$

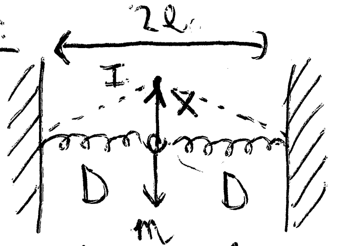
legyen $u = x - x_0$

$\dot{u} = \dot{x}$

$\ddot{u} = \ddot{x}$

$$m\ddot{u} = -Du$$

Rugó:



rugó nyújtatlan hossza: l_0

l $\quad$ l_0 nyugalmi hossz, lehet $l > l_0$ is

Hogyan írhatjuk le a függőleges irányú rezgését $\left(D_{transzv.} = ?\right)$

I. ponton a helyzeti energiája:

$$\phi(x) = \underbrace{2\frac{D}{2}\left(\sqrt{x^2+l^2}-l_0\right)^2}_{2\cdot\int F(x)} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2D\left(\sqrt{x^2+l^2}-l_0\right)\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+l^2}} = 2D\left(x-\underbrace{\frac{x\,l_0}{\sqrt{x^2+l^2}}}_{\text{szorzatfgv.}}\right)$$

(megj.: $x=0$-ban egyensúlyi helyzet van)

$$D = \frac{d^2\phi}{dx^2} = 2D\left(1-\frac{l_0}{\sqrt{x^2+l^2}} - x\underbrace{(\dots)}_{\downarrow}\right)$$

D^* transzverzális

$x=0$-ban nem fontos (ha kicsi a kitérés $x \to 0$)

$$\boxed{D^* = 2D\left(1-\frac{l_0}{l}\right)}$$

Legyen: $\omega_T^2 = \dfrac{D^*}{m} = \dfrac{2D}{m}\left(1-\dfrac{l_0}{l}\right)$

$$\boxed{\omega_T^2 = \omega_L^2\left(1-\frac{l_0}{l}\right)} \rightarrow \omega_T < \omega_L$$

ω_T: transzverzális frekvencia, ω_L: longitudinális frekvencia

$$F_h = D(l - l_0)$$

$$l = l_0 + \frac{F_h}{D}$$

$$\downarrow$$

$$\omega_T^2 = \omega_L^2 \left(1 - \frac{l_0}{l_0 + \frac{F_h}{D}}\right)$$

$$\omega_T^2 = \omega_L^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{F_h}{l_0 D}}\right)$$

- Ha $F_h = 0$ (nem nyújtjuk meg) $\omega_T = 0$ $\rightarrow$ nem harmonikus rezgőmozgást fog végezni

- Ill. $F_h > 0$

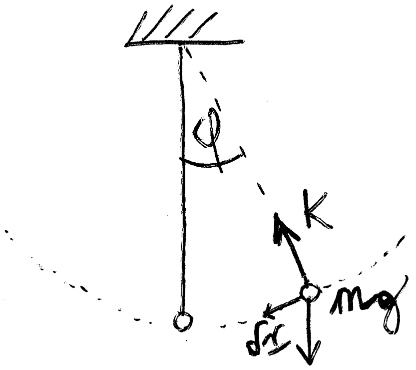
$$\frac{1}{1+X} \approx 1 - X \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{F_h}{l_0 D}} \simeq 1 - \frac{F_h}{l_0 D}$$

$$\omega_T^2 = \omega_L^2 \frac{F_h}{l_0 D} = \frac{2\cancel{D}}{m} \cdot \frac{F_h}{l_0 \cancel{D}}$$

$$\underline{\underline{\omega_T \sim \sqrt{F_h}}}$$

- A transzverzális frekvencia a húzóerő négyzetgyökével arányos, ha a húzóerő nem túl nagy
- Olyan esetet vizsgálunk, ahol az egyensúlyi helyzettől nem túlságosan térítjük ki

Ingamozgás:



a) — K: mi az, hogy kényszererő?

Olyan erő, ami azt biztosítja, hogy a test egy adott mozgást végezzen. Nagysága akkora, amekkorának a feltételek szerint kell lennie.

Több ilyen erő is létezik, az hogy melyiket alkalmazzuk, az adott problémára jellemző.

↳ Szabályok:

- a kényszererő mindig akkora, amekkora kell, hogy legyen.
- $\underline{K}\cdot\delta\underline{r}\equiv 0$ $\boxed{\text{virtuális munka elve}}$ kényszererő erőtörvénye

↳ a valódi mozgás során nem tud munkát végezni!

b) $m\underline{\ddot{r}} = m\underline{g} + \underline{K}$ $\quad \underline{K}\,\delta\underline{r}\equiv 0$ $\quad l=\sqrt{x^2+y^2}$

1. mo.

↓ körpályán mozog

---

de lehet φ szöggel is leírni a mozgást

2. mo. $\varphi(t)$ → polárkoordinátákkal is le lehet írni

3. mo. $\quad \Delta E_{ki} = W = -\Delta \phi_g^{(r)} + \underbrace{\cancel{K \delta r}}_{0}$

(energiák)

a feltétel szerint a kényszererő nem tud munkát végezni

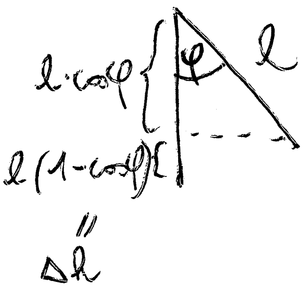
$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + \phi(\underline{r}) = \text{áll}}$$

$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\dot{r} = 0 \\ r = l\end{array}\right\}$ a kényszer miatt (körpályán mozog)

$\underline{v} = l \cdot \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot (l \dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi)^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$\underline{e}_\varphi^2 = 1$



$$E_{össz} = \frac{1}{2} m l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \text{áll.}$$

ha $E_{össz} = \text{áll} \Rightarrow \dfrac{dE}{dt} = 0$

belső fgv. deriváltja

$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} l^{\cancel{2}} \cancel{2} \cancel{\dot{\varphi}} \ddot{\varphi} + \cancel{m} g \cancel{l} (\sin\varphi(t) \cdot) \cancel{\dot{\varphi}(t)} = 0 \quad / : m, \; : l, \; : \dot{\varphi}$$

$$\boxed{l \cdot \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0}$$

=1 egyenlettel fel tudtuk írni a problémát, egyszerűbben mint a másik 2 megoldásnál.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin\varphi$$

$\sin\varphi \approx \varphi$ kis kitérésekre

$\Downarrow$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

<u>kis kitéréseknél</u> az inga lengésideje nem függ a kitéréstől

= az inga is harmonikus rezgőmozgást végez

A bolygók mozgása

1) Történeti előzmények:

a) (1473 – 1543) Kopernikusz

- a bolygók pályáit (akkor még 5-öt ismertek) körrel lehet közelíteni
- heliocentrikus világképek

b) (1571 – 1630) Kepler

- 3 törvény a bolygók mozgására

I. A bolygók ellipszis alakú pályán mennek (bármennyire is közelíthetőek speciálisan a Naprendszerben körrel)

II. Sík mozgást végeznek és területi sebességük állandó (lsd. centrális erőtér)

III. $\frac{T^2}{a^3} = \text{áll}$

c) (1642 – 1727) Newton

- 1660: a tömegvonzás törvénye → nehézség: nem körpályára, hanem ellipszisre akarta kiszámolni

- $\underline{F} \sim -\frac{1}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

$\downarrow$ vonzás, $\frac{\underline{r}}{r}$: vektor

Mekkora az arányossági tényező? Galilei → az inga lengésideje nem függ a tömegtől sem

$\underline{F} \sim -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r} \cdot M$ ← hogy lehet ~~ez~~ ez? ha $m\underline{a} = \underline{F}$

$\downarrow$ a másik tömegtől is függenie kell (részük a másik testre a problémát)

m-nek ki kell esnie ← de az eredmény nem függ a tömegtől

$$\boxed{\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}}$$

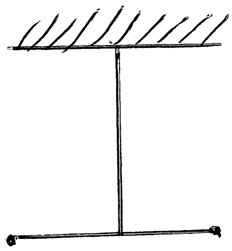
γ: arányossági tényező

Hogyan lehet igazolni? Cavendish földi körülmények között igazolta

14. óra

Cavendish: megmérte a gravitációs állandót

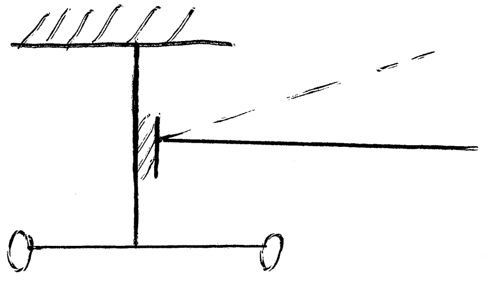
valójában ő fedezte fel:
- Coulomb-törvényt meghatározta
- H-t
- Ohm-törvény
- dielektromos állandó



- ha pici erőt akarunk megmérni, azt át kell alakítani forgatónyomatékká
- a pici forgatónyomatékot akarunk mérni, az az elfordulással és a szál vastagságának 4. hatványával arányos.

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N}{kg^2} m^2$$

1kg-os testeknél, 10 cm-es távolságnál nN-okat kell kimérni



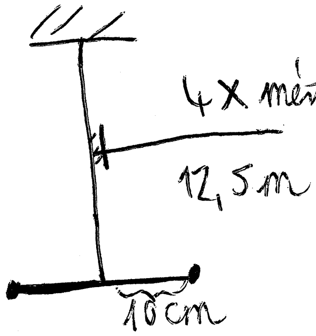
$$\cancel{m}a = -\gamma \frac{\cancel{m}M}{r^2}$$

25,5

30,5

$$a = -\gamma \frac{M}{r^2}$$

5cm-t mozdult el



4 x mért elfordulás = valódi elfordulás

$r = 6,5$ cm

$t = 100$ s

$M = 1,5$ kg

Kepler II. törvénye: centrális erőtérben mindig igaz

A Kepler-törvények bizonyítása

$$\underline{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\frac{\underline{r}}{r}$$

$\phi(\underline{r})$ → van-e ilyen fgv.?
(konzervatív-e az erőtér)

áll: $\phi(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r}$ potenciális energia jó lesz.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cancel{(-\gamma)}\frac{\partial}{\partial x}\gamma\frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma Mm \cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} =$$

$$= -\gamma \frac{Mm}{r^3}x \quad \checkmark$$

- a potenciál negatív gradiense tényleg az erő

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = -\gamma \frac{mM}{r}}$$ potenciális energia

potenciál fogalma:

$$\phi(\underline{r}) = m\underbrace{\left(-\gamma \frac{M}{r}\right)}$$

potenciál: a tére jellemző állandó, mely nem függ a behelyezett test tulajdonságaitól

= centrális, konzervatív erőtér

$\Downarrow$

I. $\underline{N} =$ áll (centrális erőtérben)

$\Downarrow$ $\Rightarrow$ $r^2\dot{\varphi} =$ áll

síkmozgást végez, a sík merőleges az impulzusra

II. Energiamegm.: $E = \frac{1}{2}mv^2 + \phi(\underline{r}) =$ áll

$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi \rightarrow |\underline{v}|^2 = (\dot{r})^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

polárkoordináták $\qquad |\underline{v}|^2 = v^2$

$$E_{össz} = \frac{1}{2}m\left((\dot{r})^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \gamma\frac{mM}{r} \quad \text{és} \quad r^2\dot{\varphi} = C = \text{áll}$$

2 db, elsőrendű diff. egyenlet

legyen $h = \frac{2E}{m}$ $\quad \mu = \gamma M \quad$ és $r^2\dot{\varphi} = C$

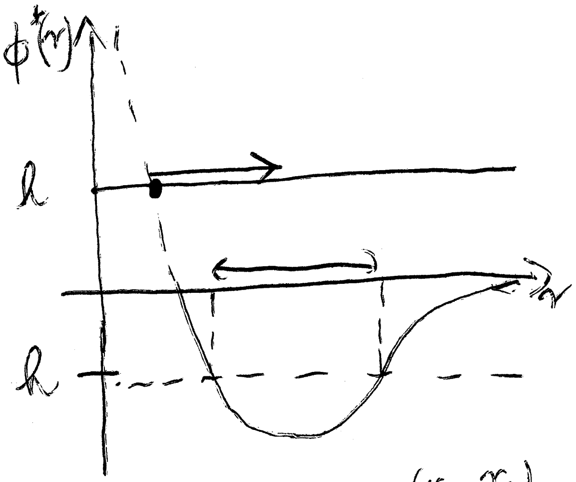
$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}$$

$$h = \left((\dot{r})^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{2\mu}{r}$$

$$h = \dot{r}^2 + \cancel{r^2}\cdot\frac{C^2}{r^{\cancel{4}2}} - \frac{2\mu}{r}$$

$$h = \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}}_{\phi^*(r)}$$

$\phi^*(r)$ → <u>effektív potenciál</u> ~ 1D-s mozgás



ha r kicsi $\phi^*(r) \to \infty$

ha r nagy $\phi^*(r) \to 0$

ha $h \ominus \to$ 2 $r\,(r_1, r_2)$ távolság között mozoghat

ha $h \oplus \to$ bizonyos r-nél közelebb nem mehet, de bármilyen messze mehet r-en túl

$$\dot{r} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$

pályaegyenlet → $r(\varphi)$-t megadjuk

$$r(t) = r(\varphi(t))$$

és $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}$ 		 ha $\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$

$$\underbrace{\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{C}{r(\varphi)}\right)} = \pm\sqrt{h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}$$

$$\frac{d\left(-\frac{C}{r(\varphi)}\right)}{d\varphi} = \frac{C}{r^2(\varphi)} \cdot \dot{r}(\varphi) \qquad \dot{r}(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2(\varphi)}$$

msz.: legyen $h - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = A^2 - \underbrace{\left(\frac{C}{r} - B\right)^2}_{\frac{C^2}{r^2} - 2\frac{BC}{r} + B^2}$

$$\frac{\cancel{2}\mu}{\cancel{r}} = \cancel{2}\frac{C}{\cancel{r}}B$$

$$\frac{\mu}{C} = B$$

$$h = A^2 - \frac{\mu^2}{C^2} \qquad A^2 = h + \frac{\mu^2}{C^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(-\left(\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}\right)\right) = \pm\sqrt{A^2 - \left(\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}\right)^2}$$

konstanst
beraktatunk
ide

Legyen $u = \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}$

$$-\frac{du}{d\varphi} = \pm\sqrt{A^2 - u^2}$$

Legyen $u = A \cdot \cos\varphi \rightarrow u^2 = A^2\cos^2\varphi$

$$A^2 - u^2 = A^2(1-\cos^2\varphi) = A^2\sin^2\varphi$$

$$-\frac{du}{d\varphi} = \pm A\sin\varphi$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{u = \mp A\cos\varphi}$$

$$\downarrow$$

$$-A\cos\varphi = \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}$$

$$r = \frac{c}{\frac{\mu}{c} \mp A\cos\varphi}$$

$$\boxed{r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 \mp \varepsilon\cos\varphi}} \qquad \varepsilon = A\cdot\frac{c}{\mu}$$

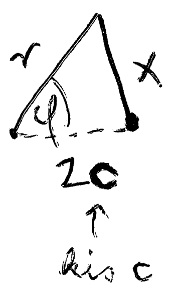
pályaegyenlet

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 \mp \varepsilon\cos\varphi}$$

$$A^2 = k + \frac{\mu^2}{c^2}, \quad \varepsilon = \frac{Ac}{\mu}$$

$$\mu = \gamma M \quad k = \frac{2E}{m} \quad c = r^2\dot{\varphi}$$

Ellipszis: $r + x = \text{áll} = 2d$



$$r + \underbrace{\sqrt{r^2+4c^2-2\cdot r\cdot 2c\cdot\cos\varphi}}_{x} = 2d$$

$$r^2+4c^2-4cr\cos\varphi = (2d-r)^2$$

$$\cancel{r^2}+\cancel{4}c^2-\cancel{4}cr\cos\varphi = \cancel{4}d^2-\cancel{4}dr+\cancel{r^2}$$

$$c^2-cr\cos\varphi = d^2-dr$$

$$\cancel{(c^2-d^2)} \quad d^2-c^2 = \overset{dr-cr\cos\varphi}{\cancel{cr\cos\varphi-dr}}$$

$$d^2-c^2 = r(d-c\cos\varphi)$$

$$\frac{d^2-c^2}{d-c\cos\varphi} = r$$

$$\frac{\frac{d^2-c^2}{d}}{1-\frac{c}{d}\cos\varphi} \quad \text{ha } \varepsilon=\frac{c}{d}<1 \rightarrow \frac{\frac{d^2-c^2}{d}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

eredeti $\varepsilon = \frac{c}{\mu}\sqrt{h+\frac{\mu^2}{c^2}}$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{c^2}{\mu^2}h+1}$$

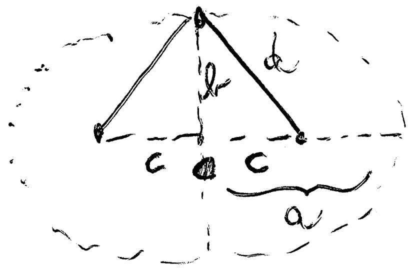
ha h negatív $\Rightarrow \varepsilon<1 \Rightarrow$ ellipszismozgás véges

ha h (+) $\Rightarrow$ nem lehet ellipszis, de ~~hat~~ hiperbolapálya egyenlete igen *

$\varepsilon<1$	ellipszis	h (−)	(energia (−))	
$\varepsilon>1$	hiperbola	h (+)	(energia (+))	üstökösök
$\varepsilon=1$	parabola	$h=0$	(energia 0)	üstökösök

ha $h \ominus$ → ellipszis

$$d^2 - c^2 = b^2$$



b kistengely

$2d = 2a$

$d = a$

$\Downarrow$

$$\frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{d}\cos\varphi}$$

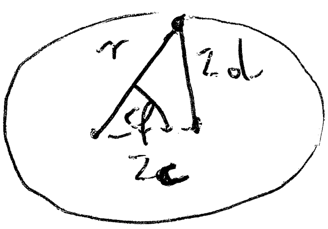
~~(jövő kedden)~~

16. óra

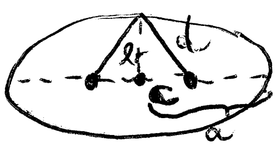
ism.:

$$r^2\dot{\varphi} = C \qquad \mu = \gamma M$$

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1-\varepsilon\cdot\cos\varphi}$$ → az energiamegmaradásból felírva



$$r = \frac{\frac{d^2-c^2}{d}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$ → az ellipszisre felírva



$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

b: ellipszis kistengelye

$a = d$ az ell. nagytengelye

összehasonlítva a gravitációs törvényből levezetett sugarat és az ellipszisre felírt összefüggést:

$$\frac{C^2}{\mu} = \frac{b^2}{a}$$

Igaz-e ez?

az ellipszis kerülete

$$\underbrace{r^2\dot{\varphi} = C}_{\text{a területi sebesség}} = 2\cdot\frac{\pi a b}{T}$$

→ keringési idő

$$4\pi^2\frac{a^2\cancel{b^2}}{T^2\,\gamma M} = \frac{\cancel{b^2}}{a}$$

μ

$$\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = \text{áll}}$$

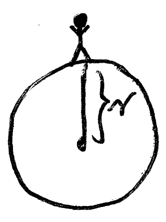
Kepler 3. törvénye

(ahhoz, hogy ezt használni tudjuk, γ-t ismerni kell

↳ Cavendish)

~~Nem triviális~~

Nem triviális állítás: ugyanez a gravitációs törvény nem csak a pontszerű testekre igaz, hanem itt a Földön is.



$$\underline{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3}\underline{r} \rightarrow \underline{g} = -\gamma \frac{M}{r^3}\underline{r}$$

gravitációs térerősség

↓

~~több~~ tömegpont esetén célszerű így felírni a gravitációs erőtörvényt

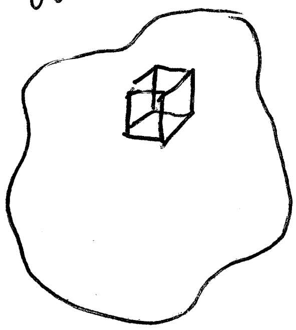
⇓

$$\underline{g}(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|r-\underline{r}_i|^3} \cdot \underbrace{(\underline{r}-\underline{r}_i)}$$

r_i az i. tömegpont távolsága a középponttól

az i. tömegponttól származó járulék

hogyan kell ezt a Σ-t kiszámolni?



ΔV_i

→ kis V_i térfogatokra osztjuk a testet

bevezetjük a sűrűség fogalmát

$$\rightarrow \rho(\underline{r}) = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$$

$$\Delta m_i = \rho(\underline{r}_i)\,\Delta V_i$$

$$\underline{g}(\underline{r}) \approx -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(r_i)}{|r-r_i|^3}|r-r_i|\,\Delta V_i$$

csökkentsük le a kockák térfogatát $\Delta V_i \rightarrow 0$

$$\rightarrow \int -\gamma \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}|\underline{r}-\underline{r}'|\, dV'$$

térfogati integrálás

$$\underbrace{g}_{\text{potenciál}} = -\operatorname{grad} \underbrace{\phi}_{\text{potenciális energia}}$$

$$\phi = -\gamma \cdot \frac{m}{r}$$

Kiterjedt test esetén:

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = -\gamma \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \, dV'}$$

Nem 3, csak 1 db integrált kell kiszámítani

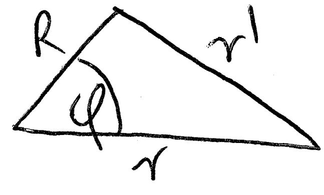
Vegyünk egy gömbhéjat:

M tömegű a gömbhéj

→ Mekkora ez a potenciál?

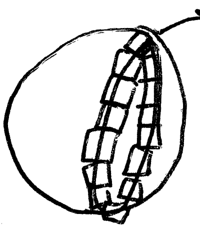
Kis felületdarabokra osztjuk

$$\Delta\phi(\underline{r}) = -\gamma \frac{M}{4\pi R^2} \Delta A \, \frac{1}{r'}$$



$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi}$$

ilyen gömbövekre osztjuk a gömbhéjat



→ összeadogatjuk simán ezeket a ΔA-kat

$$\Delta A = R \sin\varphi \cdot 2\pi R \Delta\varphi$$ → belátható

$$\Delta\phi(r) = -\gamma \frac{M}{2\cancel{4\pi}\cancel{R^2}} \cancel{2\pi}\cancel{R^2} \frac{\sin\varphi \cdot \Delta\varphi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}}$$

— ezeket adogatjuk össze $\varphi = 0$-tól π-ig

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}}\, d\varphi$$

mivel:

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}}{rR} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}} \cdot \frac{(+\cancel{2rR}\sin\varphi)}{\cancel{rR}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}}$$

$\downarrow$ ez pont az integrálandó kif.

$$\Downarrow$$

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2} \frac{1}{rR} \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\varphi}\,\Big|_0^{\pi}$$

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2rR}\Big[\sqrt{r^2+R^2+2rR} - \sqrt{r^2+R^2-2rR}\Big]$$

$\cos\pi = -1$

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2rR}\Big[(r+R) - |(r-R)|\Big]$$

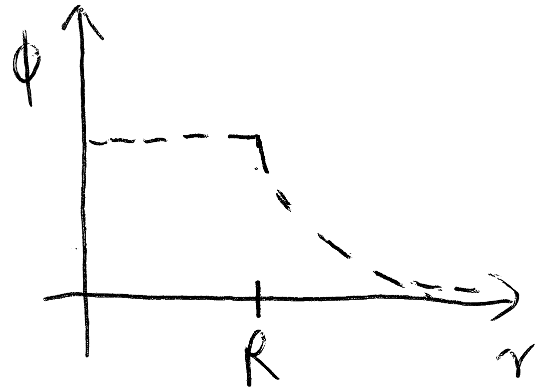
I. ha $r \geq R$ (ezt nem használtuk ki a számolás során):

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2rR}\Big[\cancel{r}+R-\cancel{r}+R\Big] = -\frac{\gamma M}{\cancel{2}rR}\cdot \cancel{2}R = -\frac{\gamma M}{r}$$

II. ha $R \geq r$

$$\phi(r) = -\frac{\gamma M}{2rR}\Big(r+\cancel{R}+r-\cancel{R}\Big) = -\frac{\gamma M}{\cancel{2r}R}\cdot \cancel{2r} = -\frac{\gamma M}{R}$$

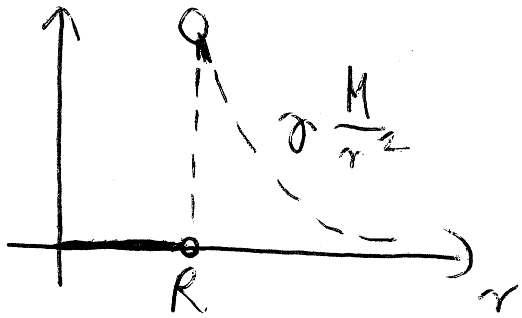
$$\phi(r) = \begin{cases} -\gamma \frac{M}{r} & \text{ha } r \geq R \\ -\gamma \frac{M}{R} & \text{ha } r \leq R \end{cases}$$



$\Downarrow$

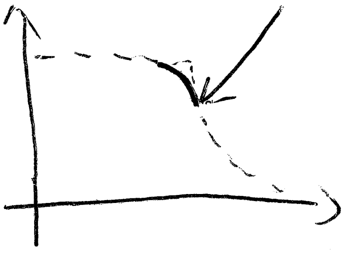
- ha a sugáron belül vagyunk, akkor konstans a potenciális energia
- ha a sugáron kívül vagyunk olyan, mintha az egész tömeg a tömegközéppontba lenne ~~(el)~~ egyesítve

$\phi'(r) = |g|$



$\downarrow$

itt $r=R$-ben nincs derivált, mert egy valótlan problémából indultunk ki: nincs végtelenül vékony gömbhéj → valóságban van véges vastagság, ezért ~~ott~~ kicsit más lesz a probléma



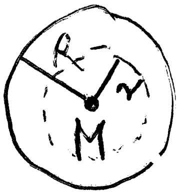
vagyis a levezetés alapján nem lehet megválaszolni a problémát $r=R$-ben.

A tömör gömb:

visszavezetjük az előző problémára

↳ a gömböt gömbhéjakra osztjuk

↓ ha belül vagyunk, minden (többiek belül lévő) gömbhéj úgy ~~hogy konstans a potenciálja~~ vehető, mintha a középpontba lenne sűrítve. A többiek kívül lévő tagok csak egy konstans tagot adnak az eredményhez, mivel nem foglalkozunk



$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \text{áll}$$

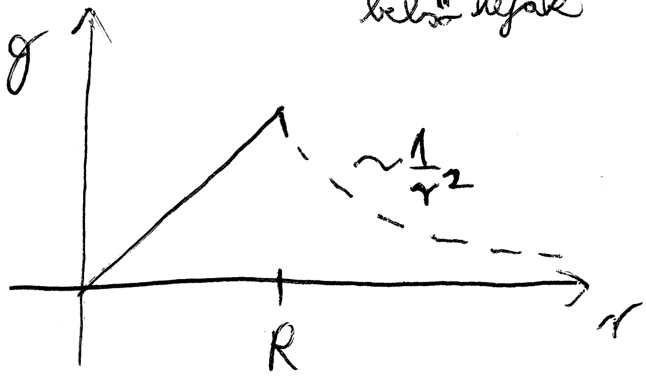
↘ a gömbön kívül olyan a ~~minden~~ ~~gömbhéjra konstans a~~ potenciális energia, mintha a tömegközéppontba lenne sűrítve

minden gömbhéj és tömegük $\rightarrow -\gamma \frac{M}{r}$ és

$g = \gamma \frac{M}{r^2}$ (lásd 80. old)

$$g = \begin{cases} \gamma \frac{M}{r^2} & \text{ha } r > R \\ \underbrace{\gamma \cdot \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^{\cancel{3}}}{\cancel{r^2}}}_{\text{belső héjak}} \; (+k) & \text{ha } r < R \end{cases}$$

→ külső héjak adaléka

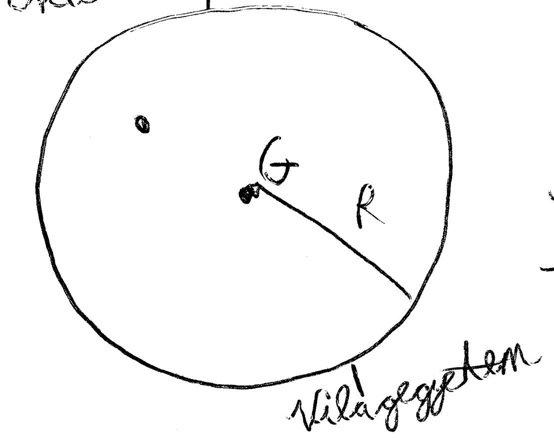


Hogyan változik a pot. energia a Föld felszínétől h távra:

$$\phi(R+h) - \phi(R) \approx (\text{grad}\, \phi) \cdot \underline{h} = -\underline{g} \cdot \underline{h} = |\underline{g}|\, h$$

ha $h \ll R$

Érdekes probléma:



$\rho = \text{áll}$

Mennyi a potenciál?

→ nincs egyértelmű megoldása a problémának

ha más pont körül zárom le a R sugarú kört, akkor mást kapunk eredményül

= gravitációs paradoxon

Megoldás:

- fújódik fel a világ: változik a sűrűség
  ↳ nem lehet ilyen kiindulási feltételek mellett (statikus világ) megoldani a problémát
- hogyan tágul a világ?
- ha az egész energia ⊖ → oszcillál
- ha —||— ⊕ → végtelenségig tágul

~~ha~~

↓

mérés ⟷ látott tömeg

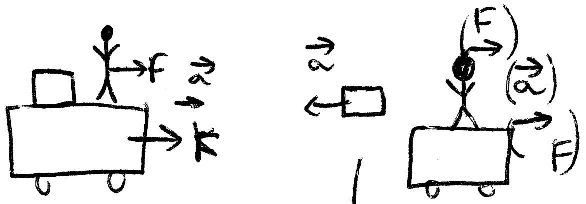
a 2 különbsége a sötét energia

17. óra

Inerciarendszerek

Kísérletek:

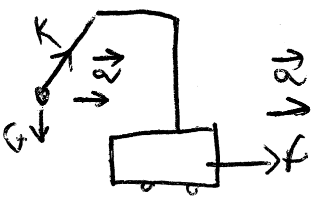
1)



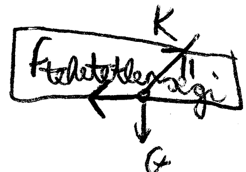
olyan, mintha erre a testre hatna erő és gyorsulna

külső nézőpont belső nézőpont

2)



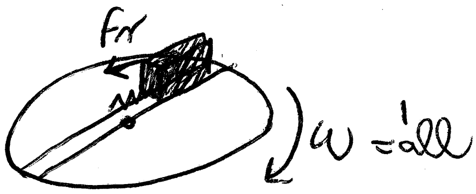
ha a kocsi szemszögéből nézzük, a golyó nyugalomban van

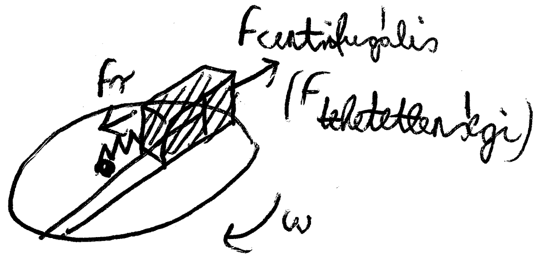


külső nézőpont

belső nézőpont

3)





külső nézőpont

belső nézőpont
(a test a forgó tárcsához képest nyugalomban van)

Előadás

Newton I. axiómája

- fontos kikötés, hogy nem gyorsuló koordinátarendszert tekintünk, amikor kijelentjük, hogy a magára hagyott test nyugalomban marad

- Látható a kis. alapján, hogy gyorsuló koordinátarendszerben a magára hagyott test nem marad nyugalomban
(belső nézőpont)

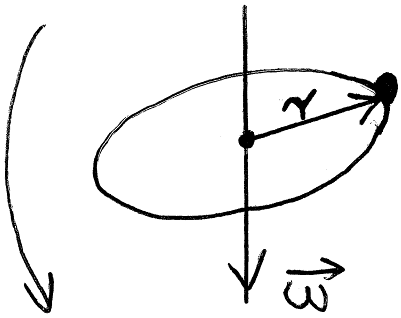
Hogyan módosulnak a törvények?

$\underline{F} = m \cdot \underline{\ddot{r}}$ → ez mindig igaz

DE ha az inerciarendszerben nézzük a gyorsulást, akkor nem ugyanazt a gyorsulást kapjuk
↳ ezért nem ugyanazt az erőt ~~nem~~ kapjuk

I. Forgó koordinátarendszer

$v \sim r, \omega, \sin\varphi$



(0)

inerciarendszerben **álló** test ~~a~~ belülről nézve mekkora ~~v~~ sebességgel rendelkezik?

$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$

Ha volt már $\underline{v}'$ sebessége a koordinátarendszerben (ami kívülről is látható)

$$\underline{v} = \underline{v}' + \underbrace{\underline{\omega} \times \underline{r}}_{\text{ezt a belső nézőpont miatt látjuk}}$$

kívülről nézett elmozdulás deriváltja (ez adja a külső sebességet)

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times\right)\underline{r}$$

$$\underbrace{\underline{\omega}\times \equiv \dot{\mathcal{O}}\,\dot{O}}_{\text{bizonyítható}} = \tilde{O}\,\dot{O} \qquad O = \mathcal{O}:\ \text{forgatásoperátor}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega}\times\underline{r} = \underline{r}\left(\frac{d'r}{dt}+\omega\times\right) \qquad \Big/ \quad \frac{d}{dt} = \left(\frac{d'r}{dt}+\underline{\omega}\times\right)$$

$\left(\frac{d'r}{dt}+\omega\times\right) = \frac{d}{dt}$ → ez az op. felel meg a deriválásnak mert ez csinál $r \to v - t$

$$\underline{a} = \left(\frac{d'}{dt}+\underline{\omega}\times\right)\left(\frac{d'}{dt}+\underline{\omega}\times\right)\underline{r} = \text{elvégezzük a beszorzást}$$

$$= \underbrace{\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}}_{\underline{a}'} + \boxed{\underline{\omega}\times\underline{v}'} + \underbrace{\frac{d'}{dt}\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)}_{\text{szorzat deriválási szabálya}} + \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)$$

$$\frac{d'}{dt}r = v' \qquad \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r} + \boxed{\underline{\omega}\times\underline{v}'}$$

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$$

~~nem foglalk~~

$$\cancel{\underline{F} = \underline{a} + 2\left(\underline{\omega}\times\underline{v}^{(1)}\right)}$$

$$\underline{F} = \underbrace{m\underline{a}}_{m\underline{a}+m\underline{a}_0} + 2m\left(\underline{\omega}\times\underline{v}^{(1)}\right) + m\cdot\left(\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}\right) + m\left(\underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)\right)$$

$=a'$

$\underline{a}$: belülről látott ~~nézett~~ „adalék"

a_0: a koordinátarendszer kezdőpontjának kívülről mért gyorsulása

~~tehetetlenségi~~ erők

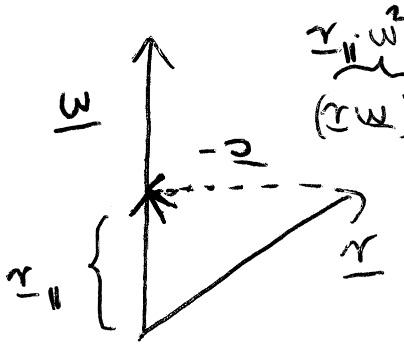
$$\underbrace{m\underline{a}}_{\substack{\text{a belülről}\\ \text{nézett (~~adalék~~) viszonylagos}\\ \text{gyorsulás}}} = \underline{F} - \overbrace{m\underline{a}_0 + \underbrace{2m\left(\underline{v}\times\underline{\omega}\right)}_{\text{Coriolis-erő}} + \underbrace{m\left(\underline{r}\times\underline{\beta}\right)}_{\substack{\dot{\omega}\\ \text{Euler-erő}}} - \underbrace{m\cdot\underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{r}\right)}_{\substack{\text{~~centrifugális~~}\\ \text{erő}}}}^{\text{tehetetlenségi erők}}$$

Msz.

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a}\,\underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a}\,\underline{b})$$

$$\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = \underline{\omega}\,(\underline{r}\,\underline{\omega}) - \underline{r}\,(\underbrace{\underline{\omega}\,\underline{\omega}}_{\omega^2}) = -\underline{\varrho}\,\omega^2$$

$$\overbrace{(\underline{r}\,\underline{\omega})\underline{\omega}}^{\underline{r}_\parallel \omega^2} - \underline{r}\cdot\omega^2 =$$



$$-m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = +m\,\underline{\varrho}\,\omega^2$$

centrifugális erő

egyenletes körmozgásnál ez a „centripetális erő" ellenereje, de egyébként semmi közük egymáshoz

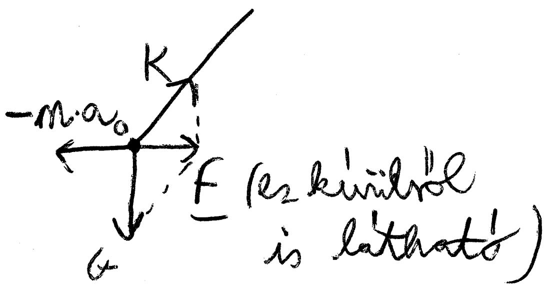
pl. kiskocsival

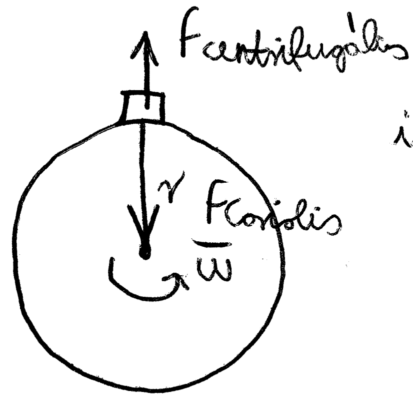
belülről nézve nyugalomban van

~~(belülről ható erő)~~

$$m\,\underline{a} = \underline{F} - \underbrace{m\,\underline{a}_0}_{\text{kényszererő}}$$

$\underline{a}$: belülről látott gyorsulás



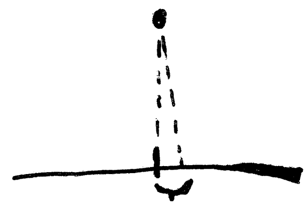


ilyenkor a Coriolis-erő:

$$F_C = 2 m \omega^2 r$$

~~(a kényszer)~~

a Földön ha valahonnan leejtünk vmit, akkor az más kezdősebességgel indul, mint a talaj (r más), ezért nem ugyanoda esik a test.



ugyanígy ~~az~~, a kitérített inga sem őrzi meg a mozgása síkját. → Foucault-inga

ez akkor érzékelhető, ha Δr nagy, és $t_{mérési}$ = sok
(a két sugár különbsége)

Kieg.: 85. old

$\underline{a}_{adalék} = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega}\times\right)^2 \underline{r}$ ~~= g~~ → belülről látott adalék gyorsulás

$a_{valós} - a_{adalék} = a_{fiktív}$ → összességében ekkora gyorsulást látunk

$a_{viszonylagos}$

$$m\cdot a_{visz} = \underbrace{m\cdot a_{valós}}_{\Sigma F} - m\cdot a_{adalék} = \Sigma F - m\cdot a_0 + 2m(\underline{v}\times\underline{\omega}) + \dots$$

18. óra

$$m\underline{a}_b = \underline{F} - m\underline{a}_0 + 2m\underline{v}\times\underline{\omega} + m\underline{r}\times\underline{\beta} \underbrace{- m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{\text{centrifugális erő}}$$

$\underline{a}_b$: belülről mérhető gyorsulás

$\underline{a}_0$: kívülről mérhető gyorsulás

Most: $\cancel{m\underline{a}_0}$ $\cancel{m\underline{r}\times\underline{\beta}}$

$m\underline{a}_0$ ↓ a Föld gyorsulása elhanyagolható

$m\underline{r}\times\underline{\beta}$ ↓ 100 ezer évig tart a megfigyelés

$$m\underline{a} = \underline{F} + 2m\underline{v}\times\underline{\omega} - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$$

ha $\underline{\omega}\times\underline{r}$ kicsi a karakterisztikus $\underline{v}$-hez képest

~~pl. ha~~ $\frac{1}{\underline{\omega}} = 1$ nap

ha t ehhez képest kicsi, akkor a centrifugális erő is elhanyagolható

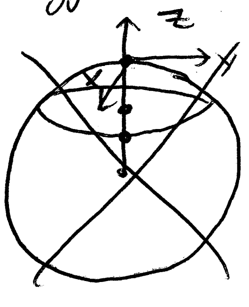
↳ mivel ha ω kicsi → ω^2-es tagok elhanyagolhatóak

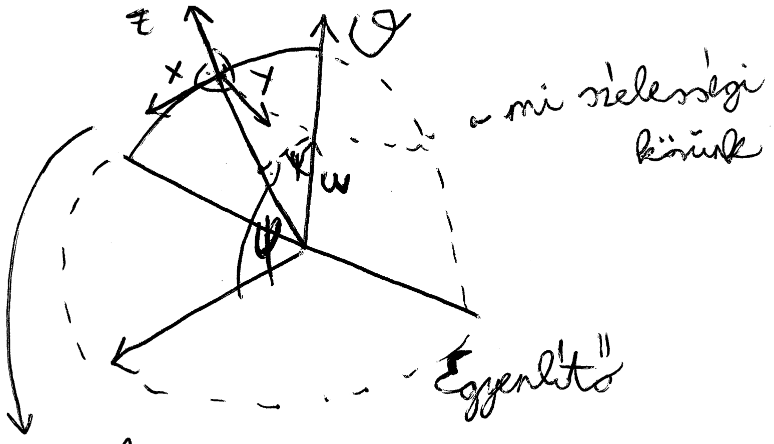
⇓

$$\boxed{\underline{a} = \underline{g} + 2\,\underline{v}\times\underline{\omega}}$$

a forgó Földön leejtett tárgy mozgása

Mi legyen a koord. rendszer?





Ez lesz a koordinátarendszerünk.

$$\underline{a} = g + 2\underline{v} \times \underline{\omega}$$

Ψ = dle

$$\underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \qquad \underline{\omega}(-\omega\cos\psi, 0, \omega\sin\psi)$$

$$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$g = (0, 0, -g)$$

$$2\underline{v}\times\underline{\omega} = 2\begin{vmatrix} \dot{x}, & \dot{y}, & \dot{z} \\ -\omega\cos\psi, & 0, & \omega\sin\psi \\ \underline{i}, & \underline{j}, & \underline{k} \end{vmatrix}$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\,\omega\cdot\sin\psi$$

$$\ddot{y} = -2\dot{z}\,\omega\cos\psi - 2\dot{x}\omega\sin\psi$$

$$\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\,\omega\cos\psi$$

$$\dddot{y} = -2\omega\left(\ddot{z}\cos\psi + \ddot{x}\sin\psi\right) = -2\omega\Big(-g\cos\psi +$$

$$+ \underbrace{2\omega\cos^2\psi\,\dot{y} + 2\omega\dot{y}\sin^2\psi}_{2\omega\dot{y}}\Big) \#$$

$$\dddot{y} = -4\omega^2\dot{y} + 2\omega g\cos\psi \sim m\ddot{x} = -Dx + G$$

↳ egy eltolt egyensúlyi helyzet körül harm. rezgőmozgást végez

$$\dot{y} := A\sin(2\omega t + \varphi) + B$$

$-4\omega^2 \cdot B + 2\omega g \cdot \cos\psi = 0$ → $t=0$ -ban ~~legyen $\dot{y} = B$~~

$\dot{y} = 0$ (~~$\sin 0 = 0$~~)

$$B = \frac{g\cos\psi}{2\omega}$$

$$\boxed{\dot{y} = A\sin(2\omega t + \varphi) + \frac{g\cos\psi}{2\omega}}$$

$A = ?$ $\varphi = ?$

A további kezdeti feltételekből határozzuk meg:

$\underline{v}(0) = (0,0,0) \Rightarrow \ddot{y}(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 0$

$\Downarrow$

$$\dot{y} = \frac{g\cos\psi}{2\omega}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)$$

$\omega t \ll 1$ esetet érdekel minket

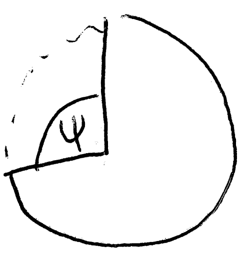
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$\downarrow$

$$\dot{y} = g\frac{\cos\psi}{\cancel{2\omega}} \cdot \frac{4\omega^2 t^2}{\cancel{2}} = g\,\omega \cdot \cos\varphi \cdot t^2$$

$\downarrow$

$$y = \frac{g\omega\cos\psi}{3}t^3$$



ha $\psi = 90°$ (déli-sark)

$\downarrow$

$\dot{y} = 0$ → a test nem fog arrébb esni

✓ ← tapasztalat

$X = 0$ az ω^2 korrekció tag miatt ~~kat~~

$z = h - \frac{g}{2}t^2$

ha elhanyagoljuk ω^2 tagokat

$$\ddot{z} = -g + 2\underbrace{(\underbrace{g\omega\cos\psi\, t^2}_{\dot y})\,\omega\cos\psi}_{\text{kiesik}}$$

$$\ddot{z} \approx -g$$

ha $h = 100$ m → 1 cm-rel esik arébb → nem lehet megmérni

de a Foucault-ingával igen.

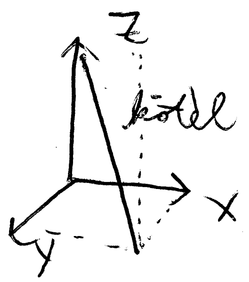
Foucault-inga

- Miért kell hosszú inga?
  Van légellenállás (~~súrlódás~~). Ha hosszú az inga, lassan leng (nagy a T),
  $v \sim$ kicsi a sebesség → kicsi a súrlódás, lassan áll meg
- Miért kell nagy tömeg?
  hogy ki tudja húzni a ~~kötelet~~ → matematikai inga legyen

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\psi + \overbrace{\lambda x}^{\text{kötél irányú kényszererő}}$$

$$\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\psi - 2\omega\dot{x}\sin\psi + \lambda y$$

$$\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega\cos\psi + \lambda z$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

$$z = \pm\sqrt{l^2 - x^2 - y^2} = \pm l\sqrt{1 - \underbrace{\frac{x^2+y^2}{l^2}}_{\sim 0}}$$

ha kicsit térítjük ki, akkor x^2, y^2 elhanyagolható lesz

$$z \sim -l$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{z}, \ddot{z} = 0$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega \sin\psi + \lambda x$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\psi + \lambda y$$

$$0 = -g + \cancel{2\dot{y}\omega\cos\psi} - \lambda l$$

$\to \dot{y}\omega << g \to$ elhanyagolható

$$\Downarrow$$

$$\lambda = -\frac{g}{l}$$

~~ha~~ $\omega_1 = \omega\sin\psi$

$$\ddot{x} = 2\omega_1 \cdot \dot{y} - \frac{g}{l}x$$

$$\ddot{y} = -2\omega_1 \cdot \dot{x} - \frac{g}{l}y$$

$\to$ ha $\omega_1 = 0$ lenne (nem forogna a Föld), sima inga lengést kapnánk

$$\ddot{x} - 2\omega_1\dot{y} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$\ddot{y} + 2\omega_1\dot{x} + \frac{g}{l}y = 0 \quad / \cdot i$$

$$i\ddot{y} + 2\omega_1 i\dot{x} + i\frac{g}{l}y = 0$$

$i^2 = -1$ $\quad \mathrm{Re}\, s = x$, $\quad \mathrm{Im}\, s = y$

$x + iy = s$ (komplex)

$$\underbrace{\ddot{s}}_{\ddot{x}+i\ddot{y}} + 2\omega_1 i \underbrace{\dot{s}}_{\dot{x}+i\dot{y}} + \frac{g}{l}\cdot s = 0$$

$s = e^{i\alpha t}$ ahol α most $\in \mathbb{C}$

$$-\alpha^2 s - 2\omega_1\alpha s + \frac{g}{l}s = 0$$

$$-s\underbrace{\left(\alpha^2 + 2\omega_1\alpha - \frac{g}{l}\right)}_{0} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 + 4\frac{g}{l}}}{2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\cancel{\omega_1^2} + \frac{g}{l}}$$

ω_1^2 elhanyagolható $\frac{g}{l}$ mellett $\Leftarrow$ $\frac{g}{l}$ az inga lengési frekvenciájával

$$s = s_1 e^{-i\left(\omega_1+\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t} + s_2 \cdot e^{-i\left(\omega_1-\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t}$$

$$s(0) = a + i0 = a = s_1 + s_2$$

$$\dot{s}(0) = -i\left(\omega_1+\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \cdot s_1 \cdot \overset{1}{\cancel{e^{-i(\ldots)\cdot 0}}} - i\left(\omega_1-\sqrt{\frac{g}{l}}\right) s_2 \cdot 1 = 0 \quad /:-i$$

$$\left(\omega_1+\sqrt{\frac{g}{l}}\right) s_1 + \left(\omega_1-\sqrt{\frac{g}{l}}\right) s_2 = 0$$

$$\omega_1 \cdot \underbrace{(s_1+s_2)}_{a} + \sqrt{\frac{g}{l}}\,(s_1 - s_2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$s_1 - s_2 = -\frac{a\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$s_1 + s_2 = a$$

$$s = e^{-i\omega_1 t}\left(\underbrace{s_1 \cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}} + \underbrace{s_2 \cdot e^{+i\sqrt{\frac{g}{l}}t}}\right)$$

$$s_1 \cdot \left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}t\right) - i\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}t\right)\right) + s_2\left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}t\right)\right)$$

$$s = e^{-i\omega_1 t}\left[a\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right) + i\,\frac{a\,\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)\right]$$

↳ 2 ellenkező fázisú, egymásra merőleges irányú rezgés összetétele

↳ ellipszis pályájú rezgés, ami forog

19. óra

Eötvös munkássága

$$\cancel{m}\underline{a} = -\gamma \frac{\cancel{m} M}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r}$$

Newton-féle tömeg: a 2 test gyorsulásának hányadosát 2 részre bontottuk „tehetetlen tömeg”

„súlyos tömeg” γm

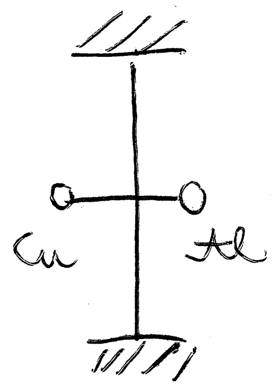
} alapvetően az anyag 2 különböző tulajdonságáról van szó

Kérdés: a ~~tehetetlen~~ és a súlyos tömeg tényleg szigorúan arányosak-e egymással?

Eötvös kísérletének lényege:
bizonyította, hogy gravitációs állandó szigorúan minden anyagra ugyanannyi → független az anyagi minőségtől γ ⇒ a tehetetlen és súlyos tömeg aránya állandó (γ)

$$\underbrace{-\gamma \frac{m_g M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}}_{\text{ebben a súlyos tömeg jelenik meg}} + \underbrace{m_t \omega^2 \cdot \underline{\rho}}_{\text{itt a tehetetlen tömeg jelenik meg}}$$

↳ ha a súlyos és tehetetlen tömeg aránya más (anyagi minőségtől függően), akkor u. a. m_t ~~esetén~~ mást lesz a Földön a testekre ható erő



- ha más erő hat rájuk, akkor el fog fordulni az inga → de ha más elfordultak, nem tudjuk megmérni

- viszont kísérlet következtében el kell fordulnia a 2 testnek (mert megfordul a forgatónyomaték iránya)

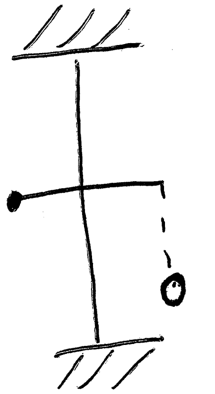
- Eötvös különböző testekre elvégezte a kísérletet

8 jegy pontossággal megmérte γ-t !!!

báró Eötvös Loránd (1848–1919)

- 1 évig kultuszminiszter is volt (ahogy apja, Eötvös József író)
- 26 évesen professzor lett

Eötvös-inga:



gravitációs potenciál változása a Földön (térerősség)

↓

$\underline{g}(\underline{r})$

← más erő hat rá

⇓

fontos következmény: ha a föld alatt üreg van, azt is ki lehet mérni!

feltérképezte Mo. tájait

- az Eötvös-ingát pl. olajkutatásra használták sokáig

⇓

első geofizikus is volt

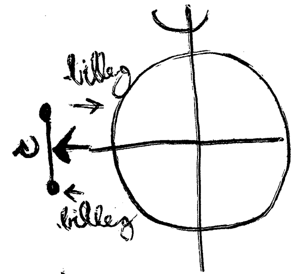
- ma pl. a katonai (~~GPS-nél~~) műholdaknál a változó térerősség (g) miatt változik a sebesség → ezt a cm-es pontosság érdekében meg kell határozni

$$-\gamma \frac{m_g M}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} + m_t \omega^2 \mathbf{r} + \underbrace{2 m_t \overset{\text{a Földhöz képesti sebesség}}{\mathbf{v}} \times \omega}_{\text{Coriolis-erő}}$$

↓

ha pl. mozgó hajóról mérnek, a -"- is számít

Eötvös-mérleg:



↓

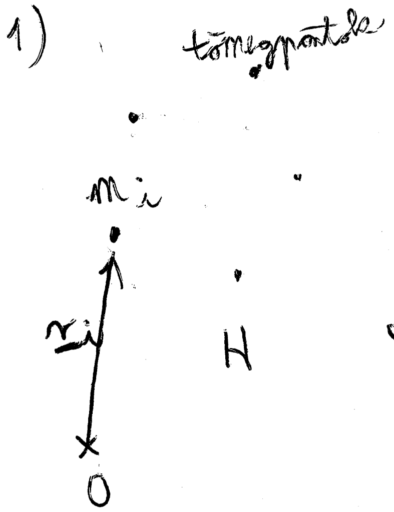
ha megforgatjuk, akkor a 2 golyóra ható erő eltér (mert ω más lesz)

↓

megbillen a mérleg:

ha jól állítjuk be a billegést, ~~a~~ → fokozatosan felerősödik a hatás

Pontrendszerek



1) minden tömegpontra külön, külön érvényesek a Newton-axiómák

de különbséget teszünk a külső és belső erők között (K)

belső erő

$$\underbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\text{az i. testre ható erő}} = \underline{f}_i^{(k)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{K}_{ij}$$

külső, a tömegpontokon kívülről ható erő

i. testre a j.-től ható erő

az összes tömegpontra kiszámoljuk, ~~de~~ kivéve saját magára

ma 10^9 (milliárd) tömegpontra (atomra) ezt ki is tudják számolni számítógépekkel, de egyébként remény-telen.

Mégis tudunk következtetéseket levonni

2) Adjuk össze a tömegpontra ható erőket

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{f}_i + \sum_{i,j=1}^{N} \underline{K}_{i,j}$$

mz.:

$$\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{i,j} = \sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{j,i}$$ de Newton értelmében:

csak jelölés

$$\underline{K}_{i,j} = -\underline{K}_{j,i}$$

$$\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij} = \sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ji} = -\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i,j}^{N} \underline{K}_{ij} = 0$$

a belső erők összege mindig 0 (mert az erőt és ellenerejét is mindig összegezzük).

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(\text{külső})}}$$

nem számít a belső erő

3) Definíció: tömegközéppont ($\underline{r}_0$)

$$\underline{r}_0 \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \ : \text{össztömeg}$$

$$\ddot{\underline{r}}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i}{M}$$

az összeget tagonként deriválhatjuk

$\ddot{\underline{r}}_0$: a tömegközéppont gyorsulása

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M \cdot \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{k}}$$

$$\Downarrow$$

tudunk definiálni egy olyan pontot (ha tudom az össz tömegpontok elhelyezkedését), amire a ~~külső~~ belső erők összege 0 (1 pontra).

ha pl. $\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^k = 0$ → a <u>tömegközéppont</u> egyenletesen ~~[illegible]~~ mozog

Másik felírás:

4) $$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i\right)}_{\text{az összimpulzus idő szerinti deriváltja}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^k$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^k$$

– ha a <u>külső</u> erők eredője 0, akkor az <u>össz</u>impulzus nem ~~tud~~ megváltozni. (de az egyes ~~tömegpontoké~~ igen).

↳ másképpen a ~~külső~~ belső erők az összimpulzust nem ~~lehet~~ tudják megváltoztatni.

5) $$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^k + \sum_{j=1}^{N} \underline{K}_{ij}$$

$$\underbrace{\underline{r}_i \times m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\frac{d\underline{N}_i}{dt}} = \underbrace{\underline{r}_i \times \underline{F}_i^k}_{\underline{M}_i} + \underline{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \underline{K}_{ij}\right)$$

$\underline{M}_i$ (az i. tetszőleges külső erő forgatónyomatéka)

ezt már beláttuk ← $\underline{N}_i = \underline{r}_i \times (m_i \underline{v}_i)$ $\Big/ \frac{d}{dt}$

$$\frac{d\underline{N}_i}{dt} = \underline{M}_i + \sum_{j=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}) \quad \Big/ \sum_{i=1}^{N}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i + \sum_{i,j=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{K}_{ij})$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{K}_{i,j}) \to \text{nem feltétlenül } 0$$

Mikor 0?

$$\sum_{i,j=1}^{N} (\underline{r}_i \times \underline{K}_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^{N} (\underline{r}_j \times \underline{K}_{j,i}) \overset{\text{Newton 3.}}{=} -\sum_{i,j=1}^{N} \underline{r}_j \times \underline{K}_{i,j}$$

felcserélhetem az összegzőindexeket

$$\underbrace{2 \sum_{i,j}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}}_{} = \sum_{i,j}^{N} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{K}_{i,j} \to \text{Ez mindig igaz}$$

$$= \sum_{i,j}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{i,j} + \underbrace{\left(-\sum_{i,j=1}^{N} \underline{r}_j \times \underline{K}_{ij}\right)}_{= \sum_{i,j}^{N} \underline{r}_i \times \underline{K}_{i,j}}$$

Ha $\underline{K}_{i,j} \parallel (\underline{r}_i - \underline{r}_j)$ (a belső erők centrálisak)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i,j}^{N} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{K}_{i,j} = 0$$

a belső erők forgatónyomatékának összege 0, centrális erőknél (mágneseknél nem centrálisak a belső erők) → de itt is 0 lesz ez a tag

Ha centrális erő hat:

$$\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i^k}$$

az összimpulzust ~~(forgatónyomatékot)~~ csak a külső erők összforgatónyomatéka változtathatja meg.

$\underline{r}_0$: tömegközéppont koordinátája

$\dot{\underline{r}}_0$: ~~tömeg~~ – " – sebessége $(\underline{v}_0)$

$\underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i \rightarrow$ a tömegk.-tól való eltérésvektora

$\underline{v}_i = \underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i$

$$\underbrace{\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i \times \underline{v}_i}_{\text{def.}} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i) \times (\underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i) =$$

$$= \underbrace{M \cdot \underline{r}_0 \times \underline{v}_0}_{= \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{r}_0 \times \underline{v}_0)} + \underbrace{\cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\varrho}_i\right)}}_{0} \times \underbrace{\underline{v}_0}_{\text{kiemelhető a } \Sigma\text{-ból}} + \underline{r}_0 \times \underbrace{\cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i\right)}}_{0} + \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\varrho}_i \times \dot{\underline{\varrho}}_i$$

a pálya impulzus momentuma

ha a tömegközépp.-hoz visz.

$$\boxed{\underline{N} = M \underline{r}_0 \times \underline{v}_0 + \underline{N}_S}$$

$\rightarrow$ sajátimpulzusmomentum, mely a rendszerhez van kötve

20. óra

1)

a) $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \underline{K}_{ij}$

$$\boxed{M \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i}$$ → a tömegközéppont gyorsulása · össztömeg = a külső erők összegével

b) Ha a belső erők centrálisak: (összimpulzus)

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

a ~~forgatónyomaték~~ perdület megváltozása a külső erők forgatónyomatékának összegével egyezik meg

mi nem jó?

ez koordinátarendszertől függ, de mi tudjuk, hogy az erő ~~...~~ és az imp. nem.

de

$$\underline{N} = \underbrace{M \underline{r}_0 \times \underline{v}_0}_{\text{a tömegközéppont helye és sebessége az adott k. rendszerben}} + \underbrace{\underline{N}_s}_{\text{saját impulzusmomentum}}$$

saját impulzusmomentum, mely koord. rendszertől függetlenül igaz a testre

⇓

így a t. középp. $\underline{r}_0, \underline{v}_0$-ját ismerve kiszámolhatjuk könnyen az összimpulzust.

2) $r_i = r_0 + \varrho_i \longrightarrow$ relatív helyzet

(a t.k.-hoz viszonyítva)

$$\underline{N} = M r_0 \times \dot r_0 + N_S \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M r_0 \times \dot r_0\right) + \frac{dN_S}{dt} = r_0 \times \left(\sum_{i=1}^{N} f_i\right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times f_i = \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times f_i = \sum_{i=1}^{N} (r_0 + \varrho_i) \times f_i$$

$$\underbrace{\cancel{M r_0 \times \ddot r_0}} + \frac{dN_S}{dt} = \underbrace{\cancel{r_0 \times \sum f_i}} + \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times f_i$$

$$r_0 \times M \ddot r_0 = r_0 \times M \ddot r_0, \text{ mert } \sum_{i=1}^{N} f_i = M \ddot r_0$$

$$\boxed{\frac{dN_S}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\varrho_i \times f_i)}$$

a rendszer sajátimpulzusának (minden ~~inercia~~ koordinátarendszerben) megváltozása egyenlő a külső erők a tömegközépponthoz viszonyított forgatónyomatékával

Ez még nem inerciarendszerben is igaz!!

3) a belső erők munkája nem 0 !!

(pl. amikor fizikai munkát végzünk)

de amennyiben a külső és belső erők is konzervatívak:

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot r_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \phi_i^k(r_i) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \phi^b(r_i - r_j)}_{\text{a belső erők potenciális energiájának összege}}}$$

mivel i-re és j-re is összegeztünk, ezért mindent 2-szer számoltunk (energiánál csak 1-szer kell) (másik felírás: $E=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2+\sum_{i=1}^{N}\phi_i^k(\underline{r}_i)+\sum_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{N}\phi^b(\underline{r}_i-\underline{r}_j)$)

→ de megjelennének kényszererők is

→ viszont a virtuális munka elve miatt:

a kényszererők ~~által az~~ megengedett elmozdulásokra az összmunkája $=0$ (külön-külön nem 0) de összegük az

$$E=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2+\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\phi_i^k(\underline{r}_i)}_{\text{külső erő}}+\underbrace{\sum_{i<j}^{N}\phi^b(\underline{r}_i-\underline{r}_j)}_{\text{belső erő}}+\cancel{W_{\text{kényszer}}}$$

Pontrendszereknél:

összimpulzus megmaradás

$1+3+6=10$ → 10 megmaradó mennyiség van

↓

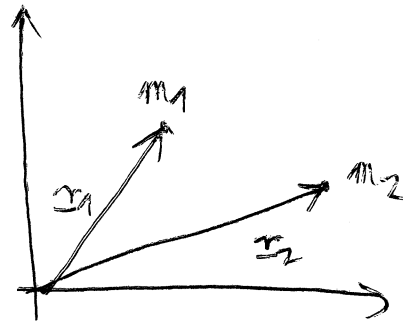
energiamegmaradás (skalár)

ha $M\ddot{\underline{r}}_0=0=\sum F_k$

↓

$\dot{\underline{r}}_0=$ áll.

Kéttest probléma



Tfh. nem hat a 2 testre külső erő, csak egymásra hatnak.

Tfh. a köztük ható erő nem függ a ~~koord.~~ rendszertől,

$\underline{F}_{12}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$ ← csak a relatív helyzettől

a) $$\left\{\begin{array}{l} m_1 \cdot \ddot{\underline{r}}_1 = f_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ \qquad\qquad\downarrow \\ \qquad\text{ez nem szorzás, hanem függés!} \\ m_2 \cdot \ddot{\underline{r}}_2 = -f_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \end{array}\right. \oplus$$

$\cancel{(m_1+m_2)}$

$$m_1 \cdot \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M \ddot{\underline{r}}_0 = 0}$$ ez ugyanaz (mert $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i = 0$)

N testre is igaz

b)

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{m_1}\ \ddot{\underline{r}}_1 = \dfrac{f_{12}}{m_1}(r_1 - r_2) \\ \ddot{\underline{r}}_2 = \dfrac{-f_{12}(r_1 - r_2)}{m_2} \end{array}\right\} \ominus$$

$\cancel{r = r}$

$$\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) f_{12}(r_1 - r_2)$$

c) Legyen $\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = \underline{r}$

$$\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \ddot{\underline{r}}$$

$$\boxed{m^* \cdot \ddot{\underline{r}} = \underline{f}_{12}(\underline{r})}$$

relatív koordináta (nem függ $\underline{r}_0$-tól)

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

~~a 2 tömeg~~

→ redukált tömeg (mindkettőnél kisebb).

⇓

az eredetileg összecsatolt 2 egyenletet szétcsatoltuk!

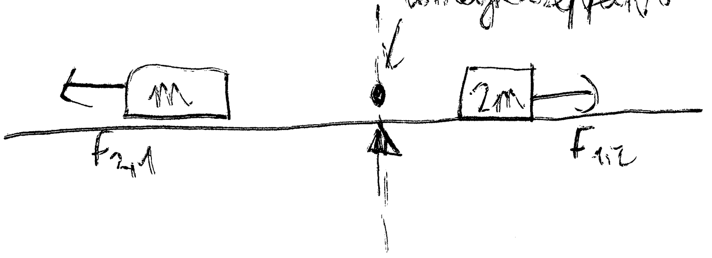
(pl. ha van 2 „kvázi-részecske", melyek kölcsönhatnak, akkor helyettesíthetők 2 másik részecskével, melyek nem hatnak kölcsön (ez az egyik m^*, a másik M tömegű))

pl.

a relatív helyzet folyamatosan változik ~~(miatt)~~ m^* miatt

tömegközéppont

a tömegközéppont nem mozdul el, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez



a tömegközéppont nyugalomban marad, de közben a relatív helyzetük változik

Ha az egyiket rögzítjük:

$\underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$

$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = f_{12}(\underline{r}_1)$

Legyen $\underline{r}_2 \equiv 0$

$\sqrt{\dfrac{D}{m_1}} = \omega$

↓

ilyenkor csak az egyik test rezeg

Ha elengedjük:

ez egy harmonikus rezgőmozgás lesz

$\sim m^* \ddot{\underline{r}} = f_{12}(\underline{r})$

$\sqrt{\dfrac{D}{m^*}} = \omega$

↓

ilyenkor mindkét test rezeg nagyobb frekvenciával (mert $m^* < m_1$)

pl. ha két bolygó hat kölcsön:

$$\underbrace{m^* \ddot{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{r}{r}}$$

ha mindkettő szabadon mozoghat

- ha $r_2 \equiv 0$ (meg van fogva) → eddig a bolygók keringésénél

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \frac{r}{r}$$

így számoltunk, hogy rögzítettük a Napot

- ha nincsen egyik sem megfogva

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2} \frac{r}{r}$$

↓

vagyis ha nincs rögzítve a Nap (valóság), ugyanaz a mozgásegyenlet, csak ($m_1 + m_2$ → kell beírni m_2 helyére.

ellipszis, parabola, ... pálya

ilyenkor nem a Nap marad helyben, hanem a tömegközéppont, és a Nap és a bolygó is rezeg egymáshoz viszonyítva (pontosabban a relatív helyzetük harmonikusan változik)

viszont $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma m_2}{4\pi^2}$

helyett $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma (m_1 + m_2)}{4\pi^2}$

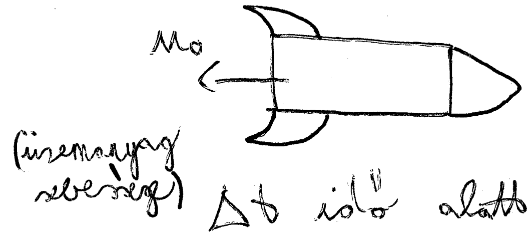
↓

nem igaz Kepler III. törvénye egzaktul (ő csak a Naptömeggel számolt)

⇓

ha lett volna még egy Naptömegű csillag (kettőscsillag) akkor nem lettek volna jók Kepler mérései

Rakétaelv:



(m_0: kezdeti tömeg)

Δt idő alatt Δm tömeg áramlik ki, m ~~kezdeti~~ a végső ~~tömeg~~

$\Delta v = ?$

(mennyit változik a sebesség)

$$\frac{\Delta mv}{\Delta t} = \Sigma F = 0 \quad \text{(nincs külső erő)}$$

$$-\Delta m\, u_0 + m\,\Delta v = 0 \quad \text{(az imp. változás 0)}$$

de ha Δm nem a kimenő ~~tömeget~~, hanem a test tömegváltozását jelenti, akkor előjelet vált Δm

$$+\Delta m\, u_0 + m\,\Delta v = 0$$

$$\frac{\Delta m}{m} u_0 = -\Delta v \quad /:\Delta t$$

$$\boxed{\frac{\dot m}{m} u_0 = -\frac{dv}{dt}} \quad / \int_0^t$$

$$\int_0^t \dot m \frac{u_0}{m}\, dt = -\underbrace{(v - \overset{0}{v_0})}_{\text{sebességváltozás}} \qquad \text{mz: } \frac{d}{dt}\ln m = \frac{1}{m}\cdot \dot m$$

$$u_0(\ln m(t) - \ln m(0)) = -v$$

$$u_0 \cdot \ln\frac{m(t)}{m(0)} = -v \longrightarrow \boxed{v = u_0 \ln\frac{m_0}{m}}$$

→ nem számít, hogy többen hogy áramlik az üzemanyag, csak hogy mekkora sebességgel (u_0

I. kozmikus sebesség: elég geostacionárius pályára állítani a testet

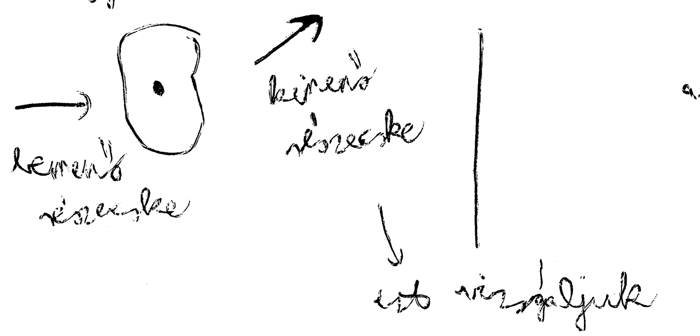
II. kozmikus sebesség: (+) összenergia kell, mert ~~ellip~~ ~~parabola~~ parabola vagy hiperbola pályát akarunk elérni

Marsra eljutás: az I. kozm. sebességet egy másik lépcsőben akarják biztosítani (űrállomásról indítják az űrrepülőt)

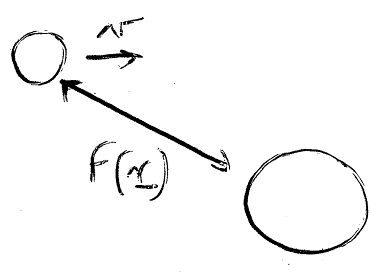
21. óra

Ütközések

1) Nagyon fontosak: szórási kísérletek !!



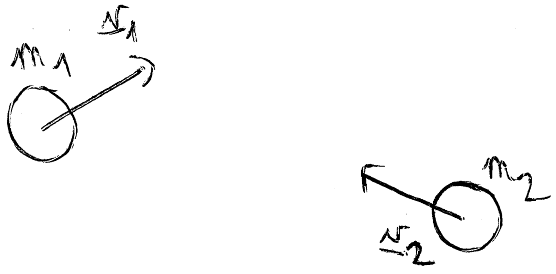
az anyagvizsgálat is ezen alapul



szórási kísérlet:
- kiinduló állapot: kezdetben távol vannak egymástól
- kölcsönhatás
- végállapot: milyen irányban jön ki

↑ megint távol vannak egymástól

2)



az 2 részecske között $\phi(\underline{r}_{12})$ kölcsönhatás van

az összimpulzus minden időpillanatban állandó, ha konzervatív az erőtér + az energia is megmarad.

jelölések:

bemenő seb. $\leftarrow \underline{v}_1^{-\infty} = \underline{v}_1(t=-\infty)$

kimenő seb. $\leftarrow \underline{v}_1^{+\infty} = \underline{v}_1(t=+\infty)$

$$m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 = \text{áll}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \underbrace{\phi(\underline{r}_{12})} = E$$

ha nagyon messze vannak, akkor a potenciál 0 (nem jelenik meg)

$\downarrow$

$$E = \frac{1}{2}m_1(\underline{v}_1^{-\infty})^2 + \frac{1}{2}m_2(\underline{v}_2^{-\infty})^2$$

$\underline{v}_1^{\infty}$ -t és $\underline{v}_2^{\infty}$ -t akarjuk meghatározni (6 adat)

3) Tömegközépponti rendszerben:

$\underline{v}_1'$: az 1. test ~~tkp~~ beli sebessége

$$\underline{v}_1' = \underline{v}_1 - \underline{v}_{\text{tömegköz.}} = \underline{v}_1 - \underbrace{\frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2}}_{\text{tömegk. definíciójából}} = \frac{m_2(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)}{m_1+m_2}$$

- ebből 4 adatot tudunk mindig meghatározni
- 2 adat marad, amit nem triviális meghat. (a kölcsönhatásból adódik)

$\downarrow$

ezeket vizsgáljuk

$$\underline{v}_2' = \underline{v}_2 - \underline{v}_{\text{tömegk.}} = \underline{v}_2 - \frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)}{m_1+m_2}$$

b) Az impulzus a tömegközéppontú rendszerben

$$\underline{p}_1' = m^* (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \qquad m^* \text{(redukált tömeg)} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

előző óra

$$\underline{p}_2' = m^* (\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = -\underline{p}_1'$$

az összimp. állandó

c) Az energiamegmaradás a tömegközéppontú rendszerben:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

$$\frac{1}{2m_1} \left(\underline{p}_1'^{-\infty}\right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\underline{p}_2'^{-\infty}\right)^2 = \frac{1}{2m_1} \left(\underline{p}_1'^{+\infty}\right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\underline{p}_2'^{+\infty}\right)^2$$

ez csak a végtelenben igaz, mert nincs benne potenciál

de $\underline{p}_1'^2 = \underline{p}_2'^2$

$$\frac{1}{2} \left(\underline{p}_1'^{-\infty}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{m^*} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} = \frac{1}{2m^*} \left(\underline{p}_1'^{+\infty}\right)^2$$

$\Downarrow$

$$\underline{\underline{\left|\underline{p}_1'^{-\infty}\right| = \left|\underline{p}_1'^{+\infty}\right|}}$$

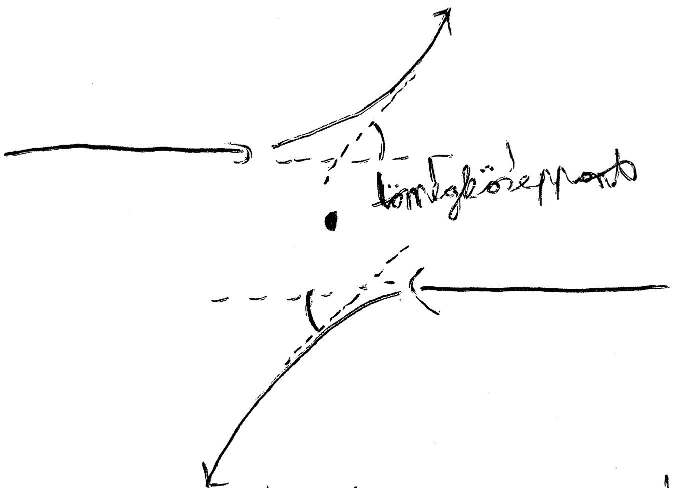
a bejövő impulzus abszolútértéke megegyezik

a kimenő —||— —||— -vel.

$\Downarrow$

csak az iránya tud megváltozni + 2 adat

$\Rightarrow$ a keresett 2 adatot az adja meg, hogy az adott rendszer -ben milyen irányba térül el



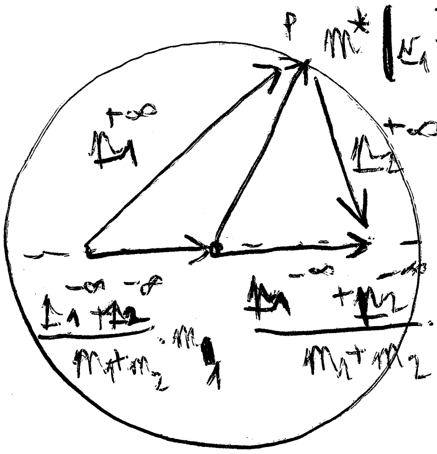
4) Nem t.k.-i rendszerben

a) $\underline{p}_1^{+\infty} = |\underline{p}_1^{-\infty}|\cdot \underline{n}$ ↗ egységvektor, ami az ütközést adja meg

$|\underline{n}|=1$

$$\underline{p}_1^{+\infty} = m^*\left|(\underline{v}_1^{-\infty}-\underline{v}_2^{-\infty})\right|\cdot \underline{n} + \underbrace{\frac{\underline{p}_1^{-\infty}+\underline{p}_2^{-\infty}}{m_1+m_2}}_{\text{tömegközéppont sebessége}}\cdot m_1$$

$$\underline{p}_2^{+\infty} = -m^*\left|(\underline{v}_1^{-\infty}-\underline{v}_2^{-\infty})\right|\cdot \underline{n} + \frac{\underline{p}_1^{-\infty}+\underline{p}_2^{-\infty}}{m_1+m_2}\cdot m_2$$



$m^*|\underline{v}_1^{-\infty}-\underline{v}_2^{-\infty}|\,\underline{n}$ sugarú kör → ezen mozoghat az első torg

→ most ezt a vektort választjuk vízszintesnek

⇓

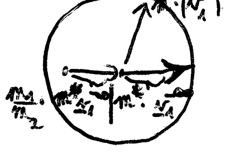
a lehetséges kimenő vektorokat fel tudjuk rajzolni úgy, hogy $\underline{n}$-t változtatjuk (a körön forgatjuk P pontot)

b) ha a 2. test állt kezdetben: $\underline{p}_1^{-\infty}\cdot\frac{m_1}{m_1+m_2} = m^*\cdot\underline{v}_1^{-\infty}\cdot\frac{m_1}{m_2}$

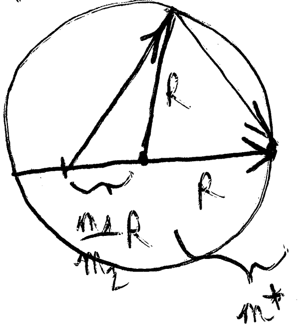
$\underline{p}_2^{-\infty}=0$ $\quad \underline{p}_1^{-\infty}\cdot\frac{m_2}{m_1+m_2} = m^*\cdot\underline{v}_1^{-\infty}$ $\cancel{|\underline{v}_1^{-\infty}|\,\underline{n}}$

$m^*\cdot|(\underline{v}_1^{-\infty}-\underline{v}_2^{-\infty})|\cdot\underline{n} = m^*\cdot|\underline{v}_1^{-\infty}|\cdot\underline{n}$

$\cancel{\left(0 = -m^*|\underline{v}_1^{-\infty}|\,\underline{n} + \frac{\underline{p}_1^{-\infty}}{m_1+m_2}m_2\right)}$

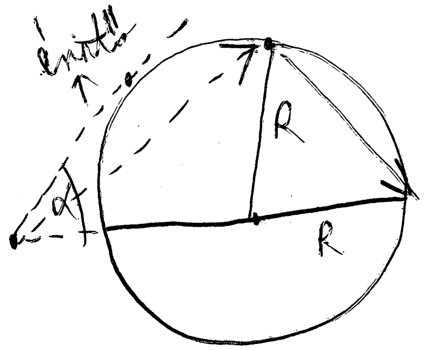


— ha $m_1 < m_2$ $\qquad \frac{m_1}{m_2} < 1$



— ha $m_1 > m_2$

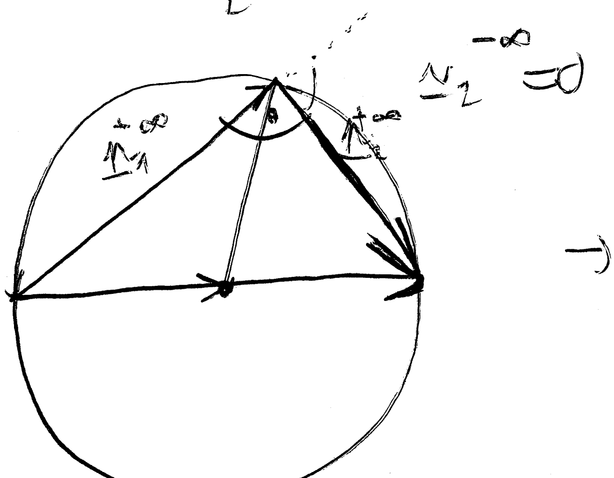
$\frac{m_1}{m_2} > 1$



α : maximális eltérülési szög

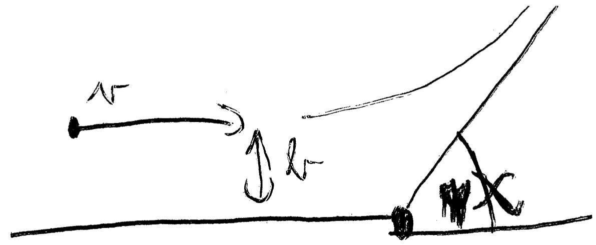
— ha $m_1 = m_2$

$\frac{m_1}{m_2} = 1$



→ ⊾-ben fognak mindig kitérülni

= a kölcsönhatás befolyásolja a kiszórási szög változását az ~~(ka)~~ ekvépülési távolság fgv.-ében



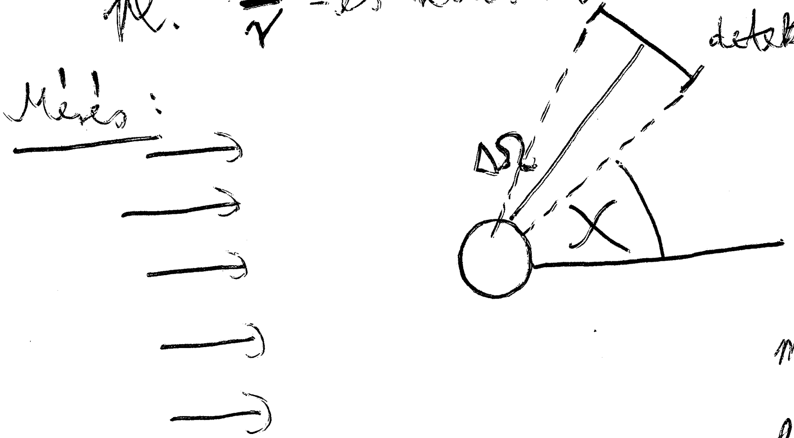
$\boxed{b(\chi)}$

ezt adja meg a kölcsönhatás

b: ütközési paraméter

pl. $\frac{1}{r}$-es kölcsönhatásnál ez hiperbola lesz.

Mérés:



meg tudjuk számolni vele a ~~fluxust~~ részecskéket

Δn ↓ $\frac{N}{t} = \Delta n \quad \left(\frac{1}{s}\right)$

N: az összesen detektált részecskék száma

$n_0 = \frac{N}{At} \quad \left(\frac{1}{s\,m^2}\right)$

n_0: egységnyi idő ~~alatt~~ A keresztmetszeten áthaladó részecskék száma (fluxus)

$\Delta\sigma = \frac{\Delta n}{n_0}$

a térszögben detektált részecskék száma, ha n_0 a fluxus

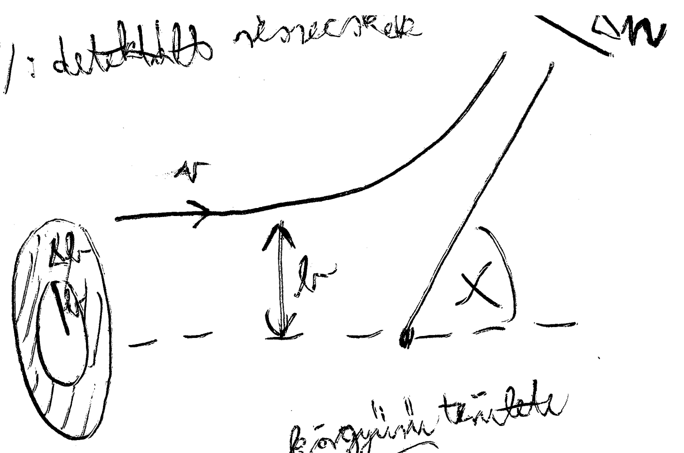
$[\Delta\sigma] = m^2$ hatáskeresztmetszet

pl. rugalmas ütközésnél ← teljes hatáskeresztmetszet

a hatáskeresztmetszet a target (álló céltárgy) keresztmetszetével egyenlő!!

az összes kijövő hatáskeresztmetszetek összege

III: detektált részecskék

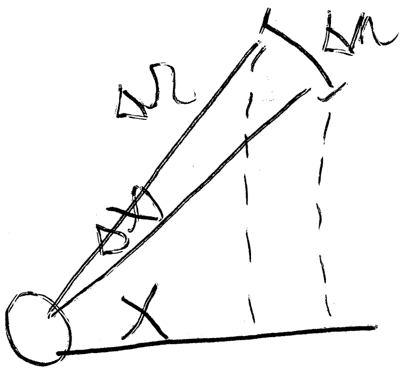


$$\Delta N = n_0 \cdot \overbrace{2\pi b\,\Delta b}^{\text{körgyűrű területe}} = n_0 \cdot 2\pi b \cdot \left|\frac{db}{d\chi}\right| \cdot \Delta\chi$$

$$\Delta b = \frac{db}{d\chi}\Delta\chi$$

azokat detektáljuk a nyalábból, amik a középponttól $b+\Delta b$ távolságra vannak

$$\Delta\sigma = 2\pi\, b(\chi) \left|\frac{db}{d\chi}\right| \Delta\chi$$



$$\underbrace{\Delta\Omega}_{\text{térszög}} = \sin\chi \cdot 2\pi \cdot \Delta\chi$$

$$\boxed{\Delta\sigma = \left|\frac{db}{d\chi}\right| \cdot b(\chi) \cdot \frac{1}{\sin\chi}\Delta\Omega}$$

22. óra

1) tm.: $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$

$$\left.\begin{array}{l} M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)} \\ \dfrac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i \end{array}\right\} \quad \frac{d\underline{N}_S}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i}_{\text{a külső erők tömegk.-ra vonatkoztatott forgatónyom.}}$$

(a ~~tehetetlenségi~~ erők nem változtatják meg a sajátimpulzust)

Merev testek

1) def.: ~:

2 pontjának távolsága nem tud a mozgás során megváltozni

$$|\underline{r}_i - \underline{r}_j| = \text{áll}$$

$\Downarrow$

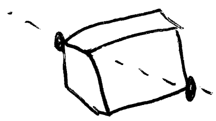
2) az összes belső erő kényszererő (akkora, amekkora kell a feltétel teljesítéséhez)

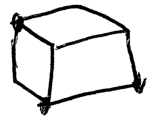
$\Downarrow$

mivel a kényszererők összmunkája 0, ezért ~~belső~~ a esetén a belső erők —||— is mindig 0.

$$\Delta E_{kinetikus} = W_k + \cancel{W_b}$$

3) Ha 3 pontjának helyzetét megadjuk $(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3)$, akkor a merev test helyzete egyértelműen meg van szabva.

(pl.  így még foroghat

 más nem foroghat)

– ez 3×3 adat

– de(!) teljesül ezekre az $|\underline{r}_i - \underline{r}_j|$ összefüggés

↓

3 összefüggés

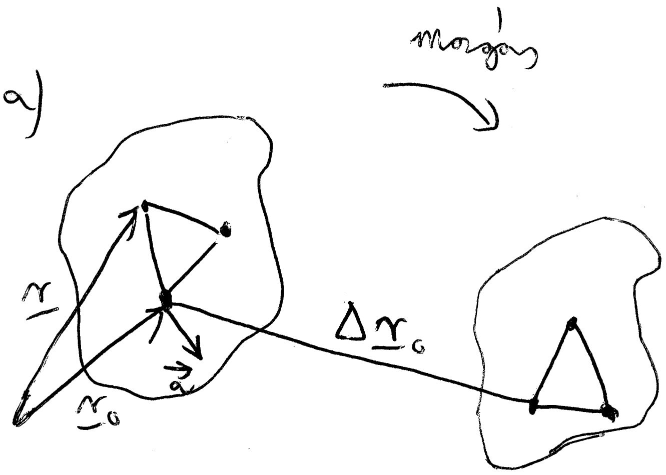
↳ $9 - 3 = 6$ adat kell

– node(!)

$$\underbrace{\boxed{M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i^N \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_i^N \cancel{\underline{r}_i \times \underline{F}_i}\ \underline{M}_i}}_{6 \text{ adat}}$$

↳ a pontrendszer leírásához <u>elég</u> ez a 2 egyenlet

4) a)



tetszőleges állapotot egy eltolással és egy forgatással meg lehet adni

$\Delta\underline{r}$ → kijelölünk 1 pontot ($\underline{r}_0$)

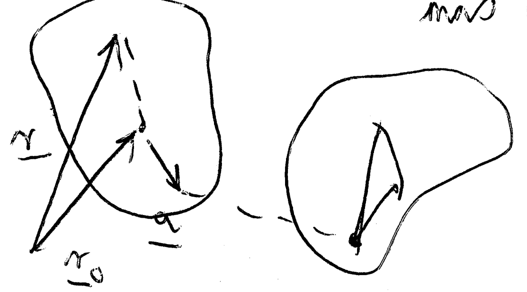
↓ → megnézzük, hogy $\underline{r}_0$ mennyit mozdul el

tetszőleges pont elmozdulása → elforgatjuk körülötte

$$\Delta\underline{r} = \Delta\underline{r}_0 + \Delta\underline{\varphi} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

4) b) ha más pontot jelölünk ki

más körül forgatunk



$$\Delta \underline{r} = \Delta(\underline{r}_0 + \underline{a}) + \Delta\varphi' \times (\underline{r} - \underline{r}_0 - \underline{a})$$

$$\Delta \underline{r} = \Delta(\underline{r}_0 + \underline{a}) - \Delta\varphi' \times \underline{a} + \Delta\varphi' \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$= \Delta \underline{r} = \Delta \underline{r}_0 + \Delta\varphi \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$\Downarrow$

az elfordítás ~~a~~ mindig ugyanaz lesz, akármelyik pontot nézzük: $\Delta\varphi' = \Delta\varphi$

$$\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \underline{r}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$\boxed{\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

tetszőleges pont sebessége

kitüntetett pont sebessége

5) ha a v_0 a tömegközéppont!:

$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \rho$ $\rightarrow$ tömegközépponti koord. rendszerben ~~gyorsuló kor~~)

$$\underline{\omega} \times \rho = \underline{v}_{visz}$$

$$\underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \times (m_i \varrho_i)$$

és $\dot{\varrho}_i = \underline{\omega} \times \varrho_i$ $\quad (-)\ \cancel{a}\,\dot{\varrho}_i = \underline{v}_{visz})$

merev test!

$$\underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \varrho_i \times (\underline{\omega} \times \varrho_i) = \hat{\Theta}\, \underline{\omega}$$

lineáris összefüggés van $\underline{N}_S$ és ω között

tehetetlenségi tenzor

mn.: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \cancel{\underline{b}\,\underline{a} - \underline{a}\,\underline{c}}\ (\underline{a}\,\underline{c})\,\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\,\underline{c}$

$$\underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\varrho_i)^2\, \underline{\omega} - (\varrho_i\, \underline{\omega}_i) \cdot \varrho_i \right]$$

$$\underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(\varrho_i)^2\, \hat{1} - (\varrho_i \circ \varrho_i) \right] \underline{\omega}$$

$$\underline{N}_S = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\varrho_i^2\, \hat{1} - (\varrho_i \circ \varrho_i) \right] \right)}_{\hat{\Theta}} \underline{\omega}$$

↳ szimmetrikus

$$\varrho_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$\underline{\hat{\Theta}} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) , & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i , & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i , & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) , & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i , & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i , & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

- szimmetrikus tenzor
- valós sajátértékei vannak

$\downarrow$

a saját koordinátarendszerben átírható diagonális alakba

$\Downarrow$

a tehetetlenségi tenzor minden sajátért.-e nem ~~neg~~ Θ (mert a ~~képletben leírtak~~ igazak általánosan minden k. rendszerben, és $\underset{\substack{\uparrow \\ m}}{\Theta} \cdot (\dots^2 + \dots^2) > 0$)

$\Downarrow$

vektor

$\underline{A}\ \hat{\Theta}\ \underline{A} \geq 0$ → positív definit

$$\sum_{i=1}^{3} \Theta_{ii} (A_i)^2$$

$\underline{A}' \hat{\Theta}' \underline{A}' = \underline{A}\ \hat{\Theta}\ \underline{A}$ (ez a szám minden k.rendszerben ugyanannyi)

és $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{koordinátarendszerváltás}}}{\underline{A}' = \hat{O}\,\underline{A}}$ $\quad \hat{O}\underline{A}, \hat{\Theta}' \hat{O}\underline{A} = \underline{A}\,\underbrace{\tilde{\hat{O}}\,\hat{\Theta}'\,\hat{O}}_{\hat{\Theta}}\,\underline{A}$

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{\Theta}\,\underline{\omega}\right)=\sum_{i=1}^{N}\underline{\rho}_i\times\underline{f}_i$$

$$\hat{\Theta}(t)$$

$\downarrow$

a tehetetlenségi nyomaték általában időben változik,

ha forog a test, és nem merev

~~mert koordinátarendszerfüggő a felírása~~

$\hookrightarrow$ mert koordinátarendszerfüggő a felírása (koordinátákkal)

6) $$E_{kin}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\underline{v}_i^2 \qquad \underline{v}_i=\underline{v}_0+\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i$$

$$E_{kin}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\underline{v}_0+\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\left(\underline{v}_0+\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)=$$ csak merev testekre

$$=\frac{1}{2}M\underline{v}_0^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\underline{v}_0\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\cdot\underline{v}_0+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)$$

de $$\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\underline{v}_0\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)=\underline{v}_0\left(\underline{\omega}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{N}m_i\underline{\rho}_i}_{=0}\right)$$

0 tömegközéppontí rendszerben

$$E_{kin}=\frac{1}{2}M\underline{v}_0^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\underset{a}{\underline{\omega}}\times\underset{b}{\underline{\rho}_i}\right)\underbrace{\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)}_{c}$$

vegyesszorzat

$$\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\underline{\rho}_i\times\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\right)}_{\underline{N}_S}\underline{\omega}$$

$$\underline{\underline{E_{kin}}} = \frac{1}{2} M \underline{v}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{N}_S \underline{\omega} = \underline{\underline{\underbrace{\frac{1}{2} M \underline{v}_0^2}_{\text{tömegközéppont mozgási energiája}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega} \hat{\Theta} \underline{\omega}}_{\text{forgási energia a tömegk. körül}}}}$$

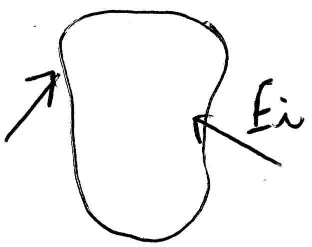
↳ de ez csak a tömegközépponti rendszerre igaz

$$\boxed{E_{össz} = \frac{1}{2} M \underline{v}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \Theta\, \underline{\omega} + \phi = \text{áll}}$$

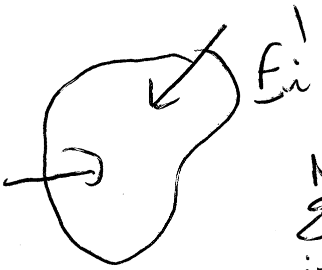
merev testekre

és $\boxed{M \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i}$ $\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i}$

7)



cseréljük ki a testre hatt erőket úgy, hogy összegük és forgatónyomatékaik összege ne változzon.



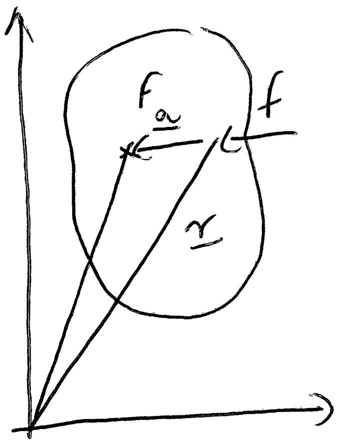
$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{K} \underline{F}_i'$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i = \sum_{i=1}^{K} \underline{M}_i'$$

Ilyenkor a test mozgása nem változik !!!

Van egy ilyen triviális helyettesítés:

„az erő a hatásvonala mentén eltolható"



$$\underbrace{\underline{r}\times\underline{f} = (\underline{r}-\underline{a})\times\underline{f}}_{}$$ mert $\underline{a}\parallel\underline{f}$

a forgatónyomaték nem változik meg.

8) Tfh. van 1 db olyan erő, ami megegyezik a külső erők összegével, és forgatóny.-a is u.a., mint a forgatónyomatékok összege. Ilyenkor:

$$\sum_{i=1}^{N}\underline{F}_i = \sum_{i=1}^{K}\underline{F}_i' = \underline{f}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\underline{M}_i = \sum_{i=1}^{K}\underline{M}_i' = \underline{r}^*\times\underline{f} \qquad \rightarrow \underline{f}(\underline{r}^*\times\underline{f})\equiv 0$$

$$\Updownarrow$$

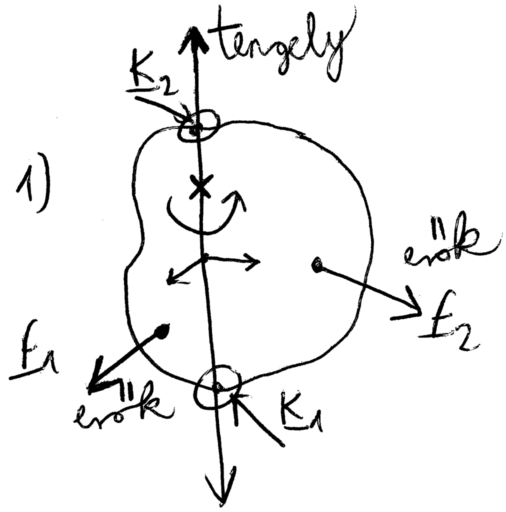
ha $\sum\underline{M}_i$ merőleges $\sum\underline{F}_i$-re, akkor $\exists$ 1 db ilyen erő.

23. óra

(4) $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^k$ $\qquad \frac{dN}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_i$ → merev testekhez szükséges egyenletek

Merev test tengely körüli forgása

1)



$\varphi(t)$ → ~~ezt~~ elég lenne megadni

- sajnos a tengely rögzítése miatt kényszererők hatnak a felfüggesztésben
- a fenti két egyenletben megjelennek kényszererők

- viszont a kényszererőknek nincs tengely irányú forgatónyomatékuk! ↳ ha centrálisak

⇓

lehet találni egy tengellyel ||-os z irányt, melyben a forgatónyom. csak a külső erők forg.-át tartalmazza!!

⇓

$$\boxed{\frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_z^i}$$

⇓

$\varphi(t)$ → ebből ki lehet számítani a kényszererőket

2) a súlypont nincs mindig rajta a tengelyen

de ekkor is igaz, hogy:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

legyen $\underline{r}_0$ most egy tengelybeli pont, ami nem a súlypont.

$\underline{v}_0 = 0 \rightarrow$ nem mozog a test

$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ $\Leftarrow$ $\underline{r}_0 = 0 \rightarrow$ a sugár

Most nem a tömegközépponti rendszerben felvett impulzusmomentumot számoljuk ki, hanem a tengelyen felvett pont rendszerében felvettet.

$$\underline{N} = \hat{\Theta}' \underline{\omega}$$

ez most másik $\hat{\Theta}$, nem a tömegközépponti, hanem a tengelyre vonatkozó

$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega) \Rightarrow \underline{N} = (\Theta_{13}\omega, \Theta_{23}\omega, \Theta_{33}\omega)$$

csak a z tengely körül forgatunk

minket ez érdekel

$$\boxed{\frac{d(\Theta_{33}\omega)}{dt} = M_z}$$

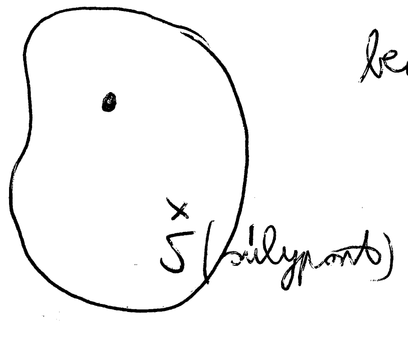
$$\Theta_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \text{áll (időben)}$$

merev test, ezért a forg. középponttól mért távolság állandó!

$$\Theta_{33} \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

a külső erők forgatónyomatéka

3)



benne van a grav. erőtérben

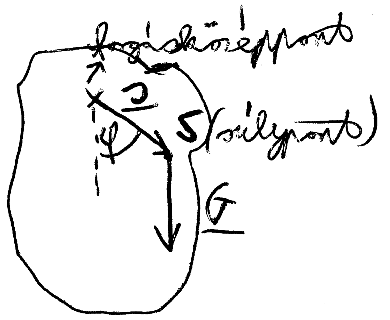
$$\underline{M} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times m_i \underline{g}}_{\text{a grav. erő forgatónyomatéka}} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i\right)}_{\underline{M}_{T_0}} \times \underline{g}$$

↓

ez nem igaz, ha $\underline{g}$ változik $(\underline{g}(\underline{r}))$

↓ nem lehet kiemelni

- homogén grav. térben a súlypont megegyezik a tömegközépponttal.
- nem homogén grav. térben $(\underline{g}(\underline{r}))$ a súlypont (a nehézségi erő támadáspontja) nem egyezik meg a tömegközépponttal



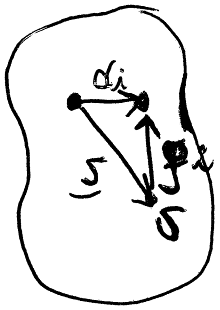
$$\Theta_{33}\beta = -\underline{s}\,\underline{G}\sin\varphi$$

$$\Theta_{33}\ddot{\varphi} = -\underline{s}\,\underline{G}\sin\varphi$$

ha $\varphi \ll$

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{sG}{\Theta_{33}}\varphi \qquad \omega = \sqrt{\frac{sG}{\Theta_{33}}}$$

4) A tehetetlenségi nyomaték kiszámítása tetszőleges tengelyre:



$$\underline{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$\Theta'_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

$$\underline{r}_i = \underline{s} + \rho_i$$ → súlyponthoz képesti koord.

$$\Theta'_{33} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\left(s_x + \rho_{ix}\right)^2 + \left(s_y + \rho_{iy}\right)^2 \right) =$$

$$= M\left(s_x^2 + s_y^2\right) + \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\rho_{ix}^2 + \rho_{iy}^2\right) + 2 s_x \cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_{ix}\right)} + \times$$

↓

tömegközéppont koordinátája a tömegközépponti rendszerben 0.

$$\boxed{\Theta'_{33} = M s^2 + \Theta_{33}}$$

Steiner-tétel

$$\underline{n}\,\hat{\Theta}\,\underline{n} = \Theta_{33}$$

↓

$\underline{n}$ a tengelyt leíró egységvektor

ilyen irányba forgatva

a belső erők nem centrálisak

↓

elfordulhatunk a székkel

Merev test síkmozgása

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

- kényszererőkkel sík pályán tartjuk a testet.
- ilyenkor 3db szabad adat van
  - ↳ 2 adat a tömegk. mozgását írja le
  - ↳ 1 adat a forgómozgásé

- megint az a baj, hogy megjelennek a kényszererők, de x és y komponense a kényszererőknek nem lehet, csak a síkra merőleges z komponense

⇓

z ~~tengelyen~~ irányban csak a külső erők forgatják

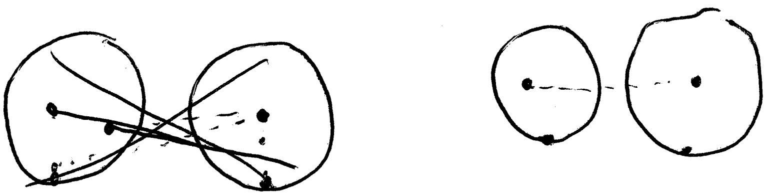
$$M\ddot{x}_0 = F_x \; ; \; F_y = M\ddot{y}_0 \; , \; \frac{d\underline{N}_z}{dt} = \underline{M}_z$$

↳ ezek nem tartalmazzák az ismeretlen kényszererőket
(visszafelé helyettesítéssel megint kiszámíthatóak a kényszererők)

$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\frac{dN_z^{saját}}{dt} = M_z^{saját} \qquad N_z^{saját} = \Theta_{33}\,\omega$$

↓ nem függ az időtől



→ a tömegpont lefelé megy, de olyan, mintha a lejtőn felfelé menne.

Merev test pont körüli mozgása

(pörgettyű)

$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i$ $\quad$ $\boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i}$ $\quad$ $6-3=3$

Baj: kényszererők hatnak az alátámasztási pontban.

De: ~~ezeknek~~ az alátám. pont körül nem forgathatnak

$\underline{N} = \hat{\Theta}\underline{\omega}$ de most a tehetetlenségi nyomaték folyamatosan változik, ha a koord. rendszer állandó.

$\underline{N} = \hat{\Theta}(t)\,\underline{\omega}(t)$

Ha a forgáshoz igazítjuk a koord. rendszert, Θ állandó marad,

de $\frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d'\underline{N}}{dt} + \underline{\omega}\times\underline{N} = \underline{M}$ (a külső erők forgatónyomatékainak összege)

$\underline{N} = \hat{\Theta}\,\underline{\omega}(t)$

$\downarrow$

a hozzárögzített koordinátarendszerben $\hat{\Theta}$ állandó

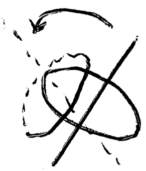
24. óra
Pörgettyű

1) $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum \underline{F}$ $\quad \boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum \underline{M}}$

↓

ezek nem tartalmazzák a kényszererőket

$\underline{N} = \hat{\Theta}^{(t)}\underline{\omega}(t)$, de most $\hat{\Theta}$ függ az időtől, mert változik a tengely koordinátája az ~~időt~~ időben.



valódi sebesség

↑

$\underline{v} = \cancel{\underline{v}_0} + \underline{\omega} \times \underline{r}$ → a ~~kitüntetett~~ ponttól mért távolság

↓ a ~~kitüntetett~~ pont sebessége

0, ha itt van alátámasztva (nem a súlypontban)

mert a súlypont is foroghat az alátámasztási pont körül

↓

ebben az alátámasztási pontban vesszük a koord. rendszer középpontját

spec. (ha ∄ az alátámasztási ~~pontban~~ a súlypont, akkor nem változik a tengely)

2) Gyorsuló k. rendszer (most forgó)

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r}$$

ugyanez az imp. momentumra is igaz:

$$\sum \underline{M} = \frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d'\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} \xrightarrow{\text{ekkor}} \underline{N} = \hat{\Theta}\underline{\omega}(t)$$

omega függ az időtől, de a theta már nem a főtengelyt választjuk az egyik tengelynek

a) $$\underline{N} = \begin{pmatrix} \underset{=:\Theta_1}{\Theta_{11}} \omega_1 \\ \underset{=:\Theta_2}{\Theta_{22}} \omega_2 \\ \underset{=:\Theta_3}{\Theta_{33}} \omega_3 \end{pmatrix}$$

Θ_3 (jelölés)

b) $\underline{\omega} \times \underline{N}$ $$\begin{vmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \omega_3 \\ N_1, & N_2, & N_3 \\ \underline{i}, & \underline{j}, & \underline{k} \end{vmatrix}$$

c) $$\frac{d\underline{N}}{dt} + \omega \times N = \Sigma M$$

I. $$\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = M_1$$

II. $$\Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = M_2$$

III. $$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = M_3$$

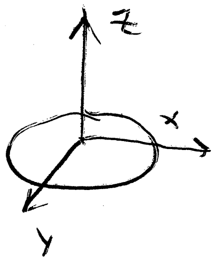
$$\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) = M_1$$

$$\Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 \omega_1 (\Theta_1 - \Theta_3) = M_2$$

$$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1 \omega_2 (\Theta_2 - \Theta_1) = M_3$$

ilyenkor M_1, M_2, M_3 általában függ az időtől (az erők változnak a koordináta rendszerhez képest) → **Euler-féle pörgettyű egyenletek**

3) Szimmetrikus pörgettyű:



x és y tengelyt bárhogy választhatjuk, a Θ nem változik

$\Downarrow$

$\hat{\Theta}$-nak 2 sajátértéke megegyezik ($\Theta_{11}=\Theta_{22}$)

a) súlytalan pörgettyű:

$$M=0$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \cancel{\sum M} = 0 \qquad \underline{N} = \text{áll}$$

$\downarrow$

ilyenkor a súlyerő nem hat, $\sum M = 0 \rightarrow \underline{N} = \text{áll}$

$E = E_{\text{külsőerők}} + E_{\text{potenciális}}$ (→ a belső erők munkája 0 ~~kem~~ merev ~~testnél~~)

kényszererők

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2}\underline{w}\,\Theta\,\underline{w} + \cancel{\Phi}$$

mindegy, melyik koordinátarendszerben vesszük (skalár), ezért vehetjük Θ-t a hozzá rögzített koord. rendszerben

$\downarrow$ a súlypontnak 0 a sebessége, mert ott van alátámasztva

$\downarrow$ most nem hat grav.

$$\frac{1}{2}\underline{w}\,\Theta\,\underline{w} = \frac{1}{2}\underline{w}\,\underline{N} = \text{áll}$$

$$\mathrm{I.}\quad \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\big(\Theta_3 - \underset{\Theta_2}{\Theta_1}\big) = 0$$

$$\mathrm{II.}\quad \underset{\Theta_2}{\Theta_1} \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_2\big(\Theta_1 - \Theta_3\big) = 0$$

$$\mathrm{III.}\quad \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + 0 = 0 \qquad 0 = \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1), \quad \Theta_2 = \Theta_1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_3 = \text{áll}}$$

$$\downarrow$$

a tengely körüli szögsebesség nem tud megváltozni

$\mathrm{I} \cdot \omega_1$

$$\hookrightarrow \omega_1 \cdot \Theta \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_1) = 0$$

$\mathrm{II} \cdot \omega_2$

$$\hookrightarrow \omega_2 \cdot \Theta \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_2\omega_3\omega_1(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$(+)$

$$\Theta\left[\omega_1 \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2\right] = 0$$

$$\boxed{\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{áll}} \qquad / + \omega_3^2 = \text{áll}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \text{áll}$$

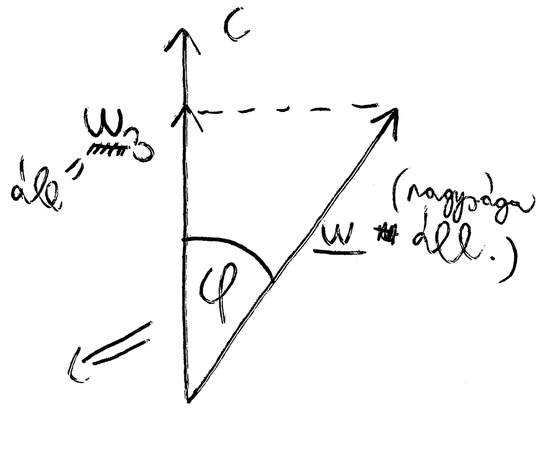
$\underline{\underline{|\underline{\omega}| = \text{áll}}}$ és $\omega_3 = \text{áll}$ és $\underline{N} = \text{áll}$ és $\frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{N} = \text{áll}$

$\Rightarrow \quad \underline{N} = \text{áll}$

$\omega_3 = \text{áll}$ → a szimmetriatengely (C) irányába mutat

$\underline{N}\,\underline{\omega} = \text{áll}$

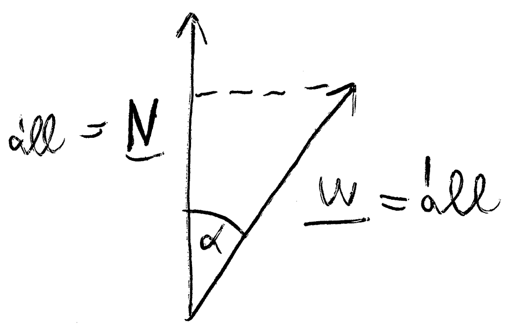
$|\underline{\omega}| = \text{áll}$



$\varphi = \text{áll}$

$\Downarrow$

a ~~forgástengely~~ szimmetriatengely (ω_3) körül egy kúpot ír le az $\underline{\omega}$ szögsebesség

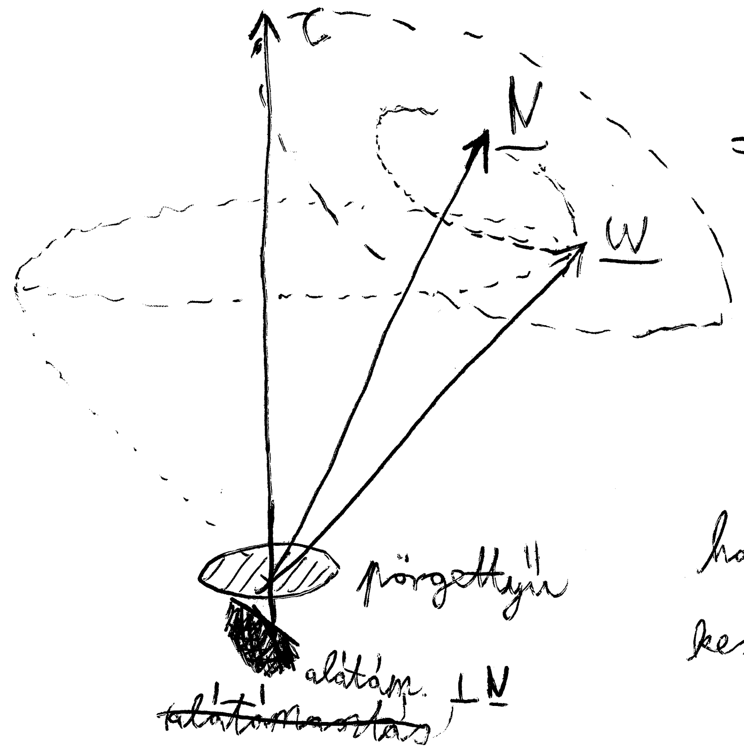


$\Downarrow$

$\alpha = \text{áll}$

A pillanatnyi forgástengely ($\underline{\omega}$) egy kúpon megy a fix tengely körül

és a forgástengely ($\underline{\omega}$) egy kúpon megy $\underline{N}$ körül



$\Rightarrow$ a szimmetriatengely is ~~egy~~ $\underline{N}$ körül megy egy kúpon.

ha nem lökjük meg, kezdetben $\underline{N} \parallel \underline{C}$

b) ## Nem szimmetrikus eset

$$\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

fő irányok

$$\Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) = 0$$

általában ezt nem tudjuk megoldani

ez például egy megoldás:

$\rightarrow$ $\underline{\omega}(t) = (0, 0, \omega)$ (most pl. 3-as (z) irány körül)

ha az egyik fő irány körül forgatjuk csak meg, akkor akörül a tengely körül fog csak forogni

de a valóságban ezt nem lehet megvalósítani,
lesz egy kis eltérés

$$\underline{\omega} = (\delta\omega_1, \delta\omega_2, \omega + \delta\omega_3)$$

$$\delta\omega \ll \omega$$

$\Downarrow$

stabil-e a tengely? ha $\delta\omega$ nő, akkor nem stabil
ha $\delta\omega$ nem nő, akkor stabil

amik $\delta\omega_1 \delta\omega_2$ alakúak, azokat elhanyagoljuk
(másodrendűen kicsi tagok)

$$\text{I. } \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

$$\text{II. } \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3\omega_1(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\text{III. } \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) = 0$$

$$\text{I. } \Theta_1 \frac{d\,\delta\omega_1}{dt} + \delta\omega_2 \cdot \omega(\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

$$\text{II. } \Theta_2 \frac{d\,\delta\omega_2}{dt} + \delta\omega_1 \omega(\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\text{III. } \Theta_3 \frac{d\,\delta\omega_3}{dt} = 0 \Rightarrow \delta\omega_3 \text{ konstans} \Rightarrow \omega + \delta\omega_3 = \overset{\text{áll. lesz.}}{\omega_{\text{új}}}$$

$$\begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \underline{A}\, e^{\lambda t}$$

ha λ képzetes → sin, cos → rezgés (harm.!)

ha λ nem képzetes → „elszáll" → instabil

$$\Theta_1 A_1 \lambda + \omega(\Theta_3 - \Theta_2) A_2 = 0$$

$$\Theta_2 A_2 \cdot \lambda + \omega(\Theta_1 - \Theta_3) \cdot A_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 \lambda, & \omega(\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega(\Theta_1 - \Theta_3), & \Theta_2 \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

↓ sajátérték probléma

$$\Theta_1 \Theta_2 \lambda^2 = \omega^2 (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3)$$

$\omega^2 \cdot (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3) < 0$ → tisztán képzetes → stabil mo.

↓

$(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_3 - \Theta_1) > 0$ stabil

= lineáris stabilitási analízis

$\Theta_3 > \Theta_2$ $\quad$ $\Theta_3 < \Theta_1$

$\Theta_3 > \Theta_1$ $\quad$ $\Theta_3 < \Theta_2$

ha a legnagyobb tengely körül forgatjuk meg, stabil lesz

ha a legkisebb körül forgatjuk meg, akkor is stabil lesz

25. óra

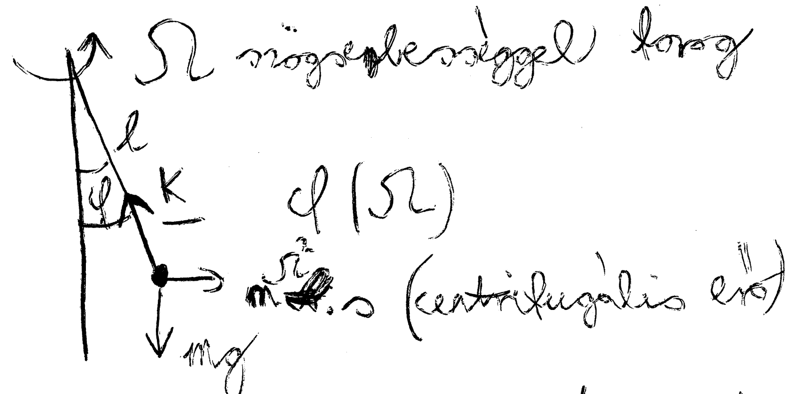
Vizsgák: 8^{00} -kor kezdődnek
4.69 teremben

- utolsó héten csak ÜV lesz
- utolsó előtti héten nem lesz vizsga

• vizsgára rendesen fel kell öltözni (öltöny)

1)

a)



(hozzárögzített k. rendszerben)

b) polárk. rendszer:

$$\underline{a} = \ddot{r}\underline{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 r \underline{e}_r \qquad \underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (2\cancel{\dot{r}}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{a} = -r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

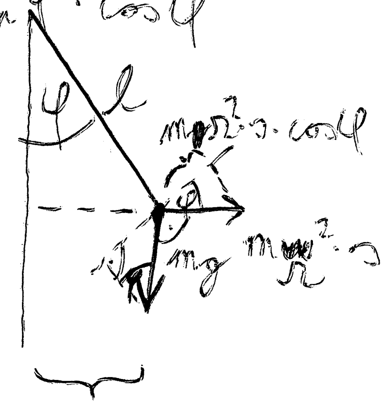
↓

- az erők is felbonthatóak $\underline{e}_r$ és $\underline{e}_\varphi$ irányú komp.-re
- de az $\underline{e}_r$ irányú erőkben $\underline{K}$ is megjelenik

⇓

$\underline{e}_\varphi$ irányú komponensek:

$$\cancel{m}\, l\, \ddot{\varphi} = -\cancel{m} g \sin\varphi + \cancel{m}\, \Omega^2 l \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$



↓

φ-vel ellentétesen

nő!!

$$s = \sin\varphi \cdot l$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi} = f(\varphi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

↓

egyensúlyi helyzet: $f(\varphi) = 0$ (φ nem változik meg)

$$\sin\varphi \left(\Omega^2 \cos\varphi - \omega_0^2 \right) = 0$$

I. $\sin\varphi = 0$

$\varphi = 0$

II. $\Omega^2 \cos\varphi - \omega_0^2 = 0$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

$$\Omega \geq \omega_0$$

Még nem vagyunk kész!

2 mo.-t találtunk.

!!

Meg kell vizsgálnunk, hogy ha az egyensúlyi helyzetből kicsit kitérítjük, akkor megmarad-e ott (stabilis-e).

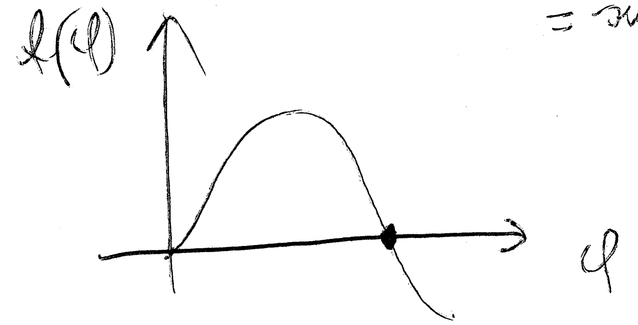
↓ a valóságban egy kicsit mindig kitér, ezért ha labilis, azt alig figyelhetjük meg.

⇓

Lineáris stabilitási analízis:

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\omega_0^2 \sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi =$$

$$= \sin\varphi \left(\Omega^2 \cos\varphi - \omega_0^2\right)$$



az egyensúlyi ~~helyzet~~ közelében:

$$f(\varphi) \approx \frac{df}{d\varphi}\bigg|_{\varphi_0} \cdot (\varphi - \varphi_0)$$

↓ ebben a pontban

$$\frac{df}{d\varphi} = \cos\varphi\left(\Omega^2\cos\varphi - \omega_0^2\right) - \Omega^2 \underbrace{\sin\varphi \sin\varphi}_{\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi}$$

és az egyensúlyi helyzetben

$\varphi = 0$ vagy $\cos\varphi = \dfrac{\omega_0^2}{\Omega^2}$

ha $\varphi = 0$

I. $$\frac{df}{d\varphi}\bigg|_0 = \Omega^2 - \omega_0^2$$

II. $$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\underbrace{\left(\Omega^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} - \omega_0^2\right)}_{=0} - \Omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^4}\right) = -\left(\Omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^2}\right) = \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2}$$

ha a derivált negatív → stabil egyensúlyi helyzet

$$\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} < 0$$

I. $\varphi = 0$

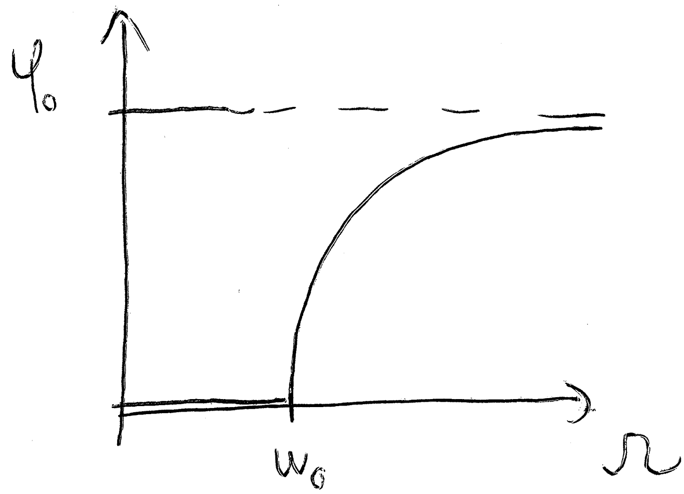
$$\frac{df}{d\varphi}\Big|_0 = \Omega^2 - \omega_0^2$$

stabil, ha $\Omega < \omega_0$

II. $\cos\varphi = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$ $\quad \Omega \geq \omega_0$

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2}$$

stabil, ha $\Omega \geq \omega_0$
(az É.T.-on mindig stabil)



(a stabil egyensúlyi helyzet (φ_0) változása Ω-tól függően)

konstans

$$\ddot{\varphi} = \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)$$

$\Downarrow$

mo.

I. $\varphi = 0$

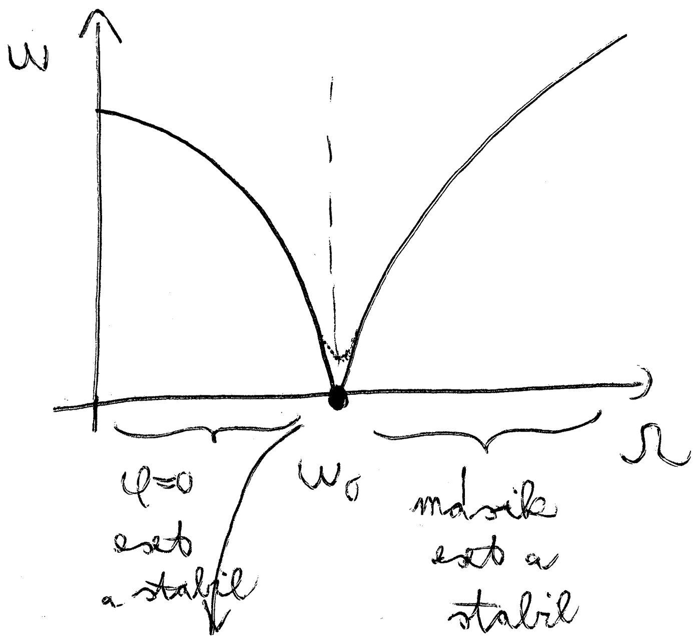
$$\omega^2 = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} = \omega_0^2 - \Omega^2$$

$\downarrow$

rezgési frekv. az egyensúlyi helyzet körül

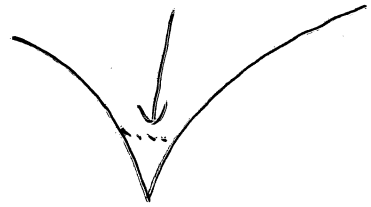
II.

$$\omega^2 = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi_0} = \frac{\Omega^4 - \omega_0^4}{\Omega^2}$$



"kritikus lelassulás"

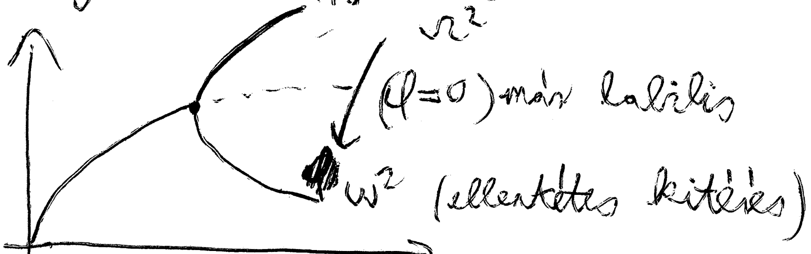
„hezitál a két stabilitási helyzet körül"
valójában ~~ha~~ ilyen helyzetekben nem lehet
~~(bifurkáció)~~
elhanyagolni a többi tagot.



bifurkáció:

a stabil egyensúlyi helyzet instabillá válik, és két új stabil egyensúlyi helyzet jelenik meg

$$\omega^2 = \frac{\Omega^4 - \omega_0^4}{\Omega^2}$$



kaotikus viselkedés:

ha egy differenciálegyenletekkel leírható egy rendszer, akkor rendszer nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre

↓

kis változásra a megoldások teljesen eltérhetnek (végtelen távol kerülhetnek egymástól.

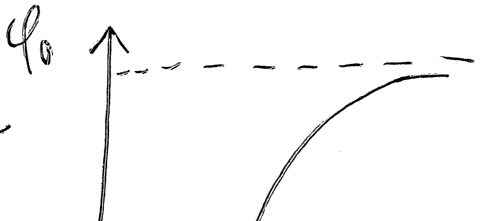
← ezt a kaotikus állapotot egy külső paraméter bifurkációinak sorozata okozza (Ω egy kicsit eltér ω_0-tól, megváltozik a stabil egy. helyzet)

↓

ez a mechanikai rendszerek sajátságos viselkedése

mágnes:

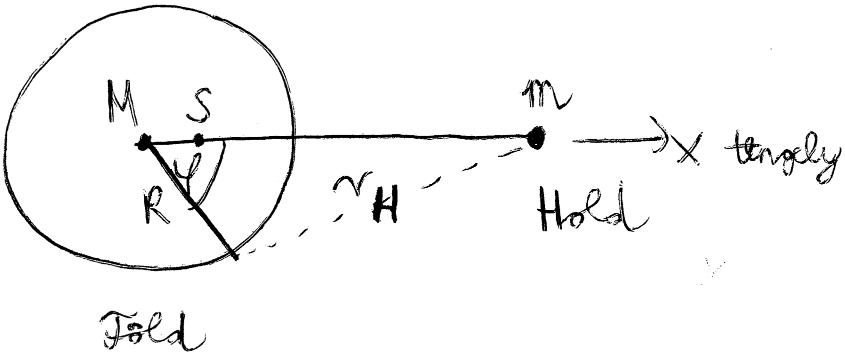
~



- ha a hőm. elég magas, elveszik a mágnesezettség
- ha a hőm. elér egy krit pontot, a mágnesezettség ~~(kb. gy)~~ a hőm. csökkenésével egyre nő

= reménytelenül bonyolult rendszerekről is lehet valamit állítani az analógiákról

Ár-apály jelenség



Cél: ekvipotenciális felületek kiszámítása
(a víz ezeken helyezkedik el)

a Föld-Hold rendszer súlypontja nem esik egzaktul a Föld középpontjába.

$$\underline{F}_t = -M\underline{a}$$

most az egész Földre számoltuk ki, de ugyanez hat a Föld egy adott pontjára

(gyorsuló koord. rendszer (a Föld pontjai is a súlypont körül fognak gyorsulni)

ahol

$$\underline{a} = -\gamma \frac{m}{r_H^2} \cdot \frac{\underline{r}_H}{r_H}$$ (a az x-nos)

$\Phi_t = M|a|X$ ebből a pot.-ból számítható az erő, ami az adott pontra hat (transzl. erő) a gyors. rendszer által

$$\Phi_t = M|\underline{a}| \cdot r_H \cos\varphi$$

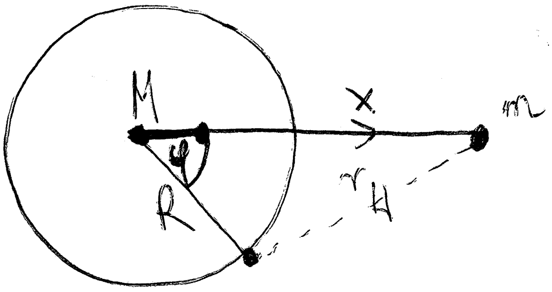
egységnyi tömege

és $R << r_H$

$$\boxed{\Phi = \underbrace{-\gamma \frac{M}{R}}_{\text{Földtől szám. pot.}} \overbrace{- \gamma \cdot \frac{m}{\sqrt{R^2 + r_H^2 - 2R r_H \cdot \cos\varphi}}}^{\text{Holdtól szám. pot}} + \underbrace{\gamma \frac{m}{r_H^2} r_H \cos\varphi}_{\text{a gyorsuló rendszertől adódó pot}}}$$

26. óra

1)



$$a = \gamma \cdot \frac{m}{r_H^2}$$

$\downarrow$

a koord. rendszer gyorsulása

$$\phi_f = \gamma \frac{m}{r_H^2} x$$

$\downarrow$

a tehetetlenségi erő potenciálja

$$\phi = -\gamma \frac{M}{R} - \gamma \frac{m}{\sqrt{R^2 + r_H^2 - 2 r_H R \cos\varphi}} + \gamma \frac{m}{r_H^2} R \cos\varphi$$

$$R \ll r_H$$

$$\phi = -\gamma \frac{M}{R} - \frac{\gamma m}{r_H} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{R}{r_H}\right)^2 - 2 \frac{R}{r_H} \cos\varphi}_{a}}} + \gamma \frac{m}{r_H^2} R \cos\varphi$$

msz.:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} \overset{\text{sorfejtés } (T_{3,0})}{\approx} 1 - \frac{a}{2} + \frac{3}{8} a^2 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\cancel{\left(\phi = -\gamma \frac{M}{R}\right)} \qquad \left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)' = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^{5/2}}$$

$\left(\frac{R}{r_H}\right)^3$ és $\left(\frac{R}{r_H}\right)^4 \to 0$

$\downarrow$

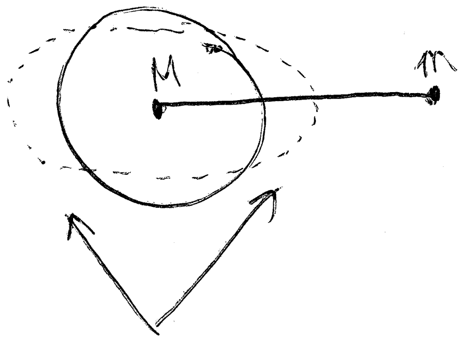
$$\phi = -\gamma \frac{M}{R} - \underbrace{\frac{\gamma m}{r_H}}_{\text{konstans}} + \frac{\gamma m}{2 r_H} \left[\left(\frac{R}{r_H}\right)^2 - \cancel{2 \frac{R}{r_H} \cos\varphi} \right] - \boxed{\frac{3}{8} \frac{\gamma m}{r_H} \cdot 4 \left(\frac{R}{r_H}\right)^2 \cos^2\varphi} + \cancel{\gamma \frac{m}{r_H^2} R \cos\varphi}$$

$\downarrow$

ez a tag függ csak a szögtől

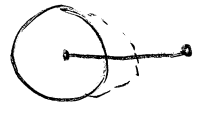
korrekciós tag $\sim \cos^2\varphi$

0°-ban és π-ben
ugyanakkora !!



a Holddal átellenes oldalon
is kipúposodik a víz !!
és ugyanannyira, mint a Holddal
megegyező oldalon

(ha nem lenne transzlációs ~~tag~~ (ha inerciarendszer lenne a Föld-Hold rendszer), akkor kipúposodna


)

ez behelyettesítve ~ 80 cm
de valójában áramlik a víz, torlódik a partoknál, stb.
↳ nagy dagályok lehetnek (több méter)

2)_ árapály jelenség a szilárd ~~k~~ Földkérgen is
megjelenik (nem teljesen szilárd)
↳ ez energiaveszteséggel jár

- csak úgy lehet ~~ez, ha nincs~~ az árapályt megszüntetni, ha mindig ugyanazt a felét mutatja a Föld felé!

↓

ezért mutatja a Hold mindig ugyanazt a felét a Föld felé.

3) Súlyos pörgettyű: a súlypont és a tömegközéppont nem esik egybe

↓

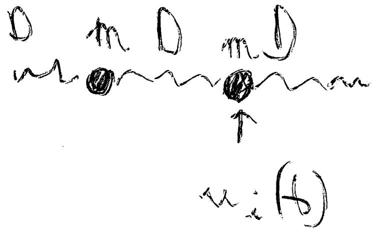
a Földnél ugyanez van, ha a Nap terében tekintjük (nem teljesen homogén)

↓

van a Földnek is precessziója, mint a súlyos pörgettyűnek

Folytonos közeg

az atomokat kis tömegekkel, a kölcsönhatást rugókkal szemléltetjük



$$m \ddot{u}_i = D(u_{i-1}-u_i) + D(u_{i+1}-u_i)$$

$$\ddot{u}_i = \omega_0^2 \left(u_{i+1}+u_{i-1}-2u_i\right)$$

legyen $u_i(t) = A_i e^{j\omega t}$ → ennek a valós része lesz a megoldás

↓

valamilyen harm. rezgőmozgás lesz

$(j^2 = -1)$

$$\underbrace{-\omega^2 A_i \cancel{e^{j\omega t}}}_{\ddot{u}_i(t)} = \omega_0^2 \left(A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i\right) \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\boxed{-\omega^2 A_i = \omega_0^2 \left(A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i\right)} \qquad A_0 = A_N$$

$\downarrow$

ilyenkor elhanyagoltuk a végeket, amik máshogy viselkednek

⊕ határfeltétel

legyen $u_0 = u_N$

(periodikus határfeltétel)

↳ de ha nagyon nagy a rendszer, akkor mindegy a közepén, vagy a szélén mi zajlik

↳ ilyenkor nincs kitüntetett pont

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ \dots, 1, & -2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, & 1, \dots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = 0$$

– ha a determináns eltűnik, lesz nem triviális mo.

↳ milyen ω-nál lesz ez?

$$A_i = B e^{jiq}$$

$$-\omega^2 \cancel{B} e^{jiq} = \omega_0^2 \left(e^{j(i+1)q} + e^{j(i-1)q} - 2\cdot e^{jiq} \right) \cancel{B}$$

$$-\omega^2 = \omega_0^2 \left(e^{jq} + e^{-jq} - 2 \right)$$

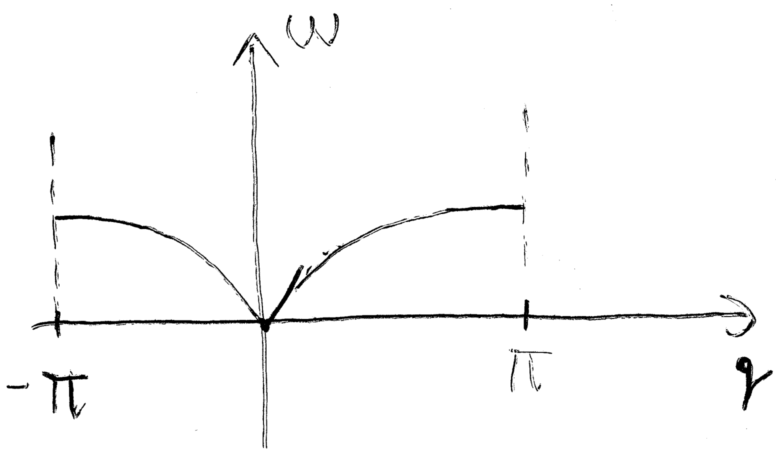
$$\boxed{\omega^2 = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos q\right)}$$

- ha q-nak ilyen ~~értéket~~ választunk, akkor a kapott ω kielégíti a mozgásegyenletet
- de van még egy határfeltétel: $A_0 = A_N$

$$\underbrace{1}_{e^{j0\cdot q}} = e^{jNq} \Rightarrow q = n \cdot \frac{2\pi}{N}$$

minél nagyobb a rendszer, annál sűrűbbek a m.o.-k

$$-\frac{N}{2} \le n \le \frac{N}{2} \qquad (-\pi \le q \le \pi)$$



$q = n \cdot \frac{2\pi}{N}$ (nem teljesen folytonos a grafikon)

$$u_i = B e^{j(\omega t + i q)} \qquad q = n \cdot \frac{2\pi}{N}$$

kaptunk N db mo.-t

$\cos(\omega t + i q)$

$\downarrow$

a szomszédosok mellett egy fix

fáziseltérés van.

$\Downarrow$

hullám: harm. rezgő rendszer, ahol a fáziskülönbség

a távolságokkal (i) arányos

(ált. esetben ezen hullámok szuperpozíciója a valódi mozgás)

Tételjegyzék
Mechanika
Fizika I. évfolyam

1.Kinematika, alapfogalmak, különböző koordinátarendszerek használata
2 Newton törvények, speciális erőtörvények.
3 Csillapított rezgések
4 Kényszerrezgés, rezonancia
5 Rezgések összetétele
6 Csatolt rezgések
7 Impulzus, Impulzusmomentum
8 Munka, potenciális energia
9 Gravitációs, tehetetlen és súlyos tömeg, gömbhéj, tömör gömb tere
10 Bolygók mozgása
11 Gyorsuló koordinátarendszerek
12 Szabadesés a forgó Földön
13 Foucault-kísérlet
14 Kéttest probléma
15 Pontrendszerek törvényei
(impulzus, impulzusmomentum, munka)
16 Rugalmas ütközések, hatáskeresztmetszet
17 Merev test mozgásának leírása,
saját impulzusmomentum, a kinetikus energia
felbontása, helyettesítő erők
18 Rögzített tengely körüli forgás, merev test síkmozgása
19 Rögzített pont körüli forgás

Groma István
egyetemi tanár

Tételjegyzék
Folytonos közegek mechanikája
Fizika I. évfolyam

1.Egyszerű deformációk, nyújtás, haránt összehúzódás, összenyomás, nyírás

2 A deformációs tenzor bevezetése

3 Feszültségtenzor, kontinuumok mozgásegyenlete

4 Általános Hook törvény, izotrop közegek rugalmas tulajdonságai

5 Csavarás, lehajlás, kihajlás

6 Hidrosztatika, Pascal törvény, Arkhimédész törvény, forgó folyadék felszíne, barometrikus magasságformula

7 Felületi feszültség, görbületi nyomás, kapilláris emelkedés

8 Ideális folyadék áramlása, Bernoulli törvény és alkalmazása

9 Súrlódó folyadék, a feszültségtenzor alakja, áramlás csőben

10 Hang terjedése gázban, hullámegyenlet

11 Rugalmas hullámok terjedése

12 Leejtett rugó

Groma István
egyetemi tanár