Mechanika (emelt szint)
Órai előadásvázlat a merev testek mozgásához

Anyagfizikai Tanszék (Groma István, Tüzes Dániel)

2018. december 6.

Tartalomjegyzék

1. Merev testek mozgása

Egy tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontnak a $\boldsymbol{v}$ sebességét egy K koordinátarendszerben a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{1}$$

összefüggés adja meg, ahol $\boldsymbol{r}_0$ a merev testnek egy kitüntetett "O" pontjához tartozó helyvektora (nem feltétlen a TKP) a K rendszerben, $\boldsymbol{v}_0$ az "O" sebessége a K-ban, $\boldsymbol{\omega}$ pedig a szögsebesség vektora a merev testnek a K rendszerben.

1.1. Tehetetlenségi nyomaték tenzor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_s =& \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{v}_i \\ =& \sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\rho}_i) \\ =& \hat{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{2}$$

A tehetetlenségi nyomaték tenzor az a mennyiség, ami egy pontra – jelen esetben TKP-ra – felírt impulzusmomentum – jelen esetben az sajátimpulzus-momentum – kifejezésében mejelenik, ami a szögsebesség vektort szorozza.

2. Merev test rögzített tengely körüli forgása

2.1. Mozgásegyenletek

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{TKP}} \tag{3a}$$

$$\sum_i \boldsymbol{M}_i = \frac{d}{dt}\boldsymbol{N} \tag{3b}$$

Hogy a 3a. egyenlet miért igaz, levezettük. A 3b. egyeneltet szintén, ahol a forgatónyomatékokat egy adott pontra vonatkozva fel kell felírni, és arra a tengelyre vonatkoztatva számolni az $\boldsymbol{N}$ impulzusmomentumot is. Vehetjük ezt a vonatkoztatási pontot a rögzített tengelyre is, ekkor $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{N}_s = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}$, de erre a tengelyre vett $\boldsymbol{N}$-ről is mondhatunk valamit.

Ha a vonatkoztatási pont a tengelyen van, akkor a test egy tetszőleges pontjára felírt 1. egyenletben $\boldsymbol{v}_0 = 0$ és $\boldsymbol{r}_0 = 0$, így

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i.$$

Ezt használjuk fel most $\boldsymbol{N}$ számolásánál!

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} =& \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \\ =& \boldsymbol{\Theta}^* \boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

ahol az itt bevezetett $\boldsymbol{\Theta}^*$ nem ugyanaz a tehetetlenségi nyomaték tenzor, mint amit korábban bevezettünk, mert itt másik pontra, nem a TKP-ra van vonatkoztatva. Ez ugyanúgy mátrix, amelnyek az elemei hasonló módon számolandók. Ha z a forgás tengelye, akkor az impulzumomentum tengely irányú vetületére

$$\boldsymbol{N}_z = (\boldsymbol{\Theta}^* \boldsymbol{\omega})_z = \boldsymbol{\Theta}^* \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Theta}^*_{zz} \omega_z$$

adódik, ahol

$$\boldsymbol{\Theta}^*_{zz} = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$

2.2. Fizikai inga

Mutasson a z tengely a papír síkjára kifele, ekkor x, y és z a szoktott irányokkal jobbsodrású bázist alkot. Térjen ki az egyensúlyi helyzetből az inga $\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_z \end{pmatrix}$ szöggel! Ekkor a felfüggesztési pontra felírva a forgatónyomatékokat:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{N} =& \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} =& \boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}} \times m\boldsymbol{g} \quad \boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

amelyben láthatjuk, hogy ennek csak z irányú komponense van. $\boldsymbol{\Theta}_{zz}\dot{\omega}_z = -xmg$, vagy beírva az x-re a súlypont helyvektorának s hosszát:

$$\boldsymbol{\Theta}_{zz}\dot{\omega}_z = -smg \sin(\varphi).$$

Ha a kitérés kicsi, a szinuszt lineárisan közelítve kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\Theta}_{zz}\ddot{\varphi} = -smg \cdot \varphi.$$

Ez egy harmónikus rezgőmozgás

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{smg}{\boldsymbol{\Theta}_{zz}}}$$

(kör)frekvenciával.

3. Pörgettyűk

3.1. Kísérletek

Kísérleti eszközeink:

1. Egy alátámasztási ponttú pörgyettyű. A tengely egyik vége egy alátámasztási ponton elforoghat, a másik vége a tengelynek szabad.
2. Lendkerék, amelynek a tengelyének két vége be van fogva. A két vég 6 megkötést jelentene, de a tengely annak irányban kilenghet, a végei fel-le irányban elmozdulhatnak, és függőleges tengely mentén el is foroghatnak, így csak $6 - 3 = 3$ megkötést jelentenek.

3.1.1. Erőmentes pörgettyű

Hívják még súlytalan pörgettyűnek is. A megforgatott pörgettyűt a tengelyre akár ferdén is helyezve csak körmozgást végez. Ha meglökjük a tengellyel párhuzamosan, akkor imbolyog, de úgy, hogy a tengely egy adott pontja (pl. a szabad vége) körmozgást végez. Ezt a mozgást nutációnak hívják. A kísérlet megismételhető a lendkerékkel.

3.1.2. Súlyos pörgettyű

A tengelyen eltolva a pörgettyűt a TKP nem az alátámasztási pontra esik, hanem alá vagy fölé.

Ha a súlypont az alátámasztási pont alatt van: Ha ekkor a megforgatott pörgettyűt a tengelyre helyezzük úgy, a súlypont és az alátámasztási pont ne egymás fölött legyen, akkor pörgyettyű nem csak a tengely körül fog forogni, hanem a tengely is az alátámasztási pontba húzott függőleges körül. Ezt hívják precessziónak. Ha most megütjük a pörgyettűt, nutációs és precesszió együtt fog jelentkezni.

Ha az alátámasztási pont fölött van a súlypont: akkor forgatás nélkül láthatjuk, hogy a pörgettyű annak megforgatása nélkül ledőlne az alátámasztási pontról. Megforgatva az már nem következik be, precesszió (és esetleg nutáció) fog jelentkezni, de úgy, hogy a precesszió iránya ellentétes az előbbivel.

Lendkerék Ha a lendkerék tengelyére teszünk egy súlyt, elkezd precesszálni. Ha a másik tengelyre, akkor a másik irányba. A súly helyétől függ, hogy milyen gyorsan precesszál. Ha megütjük, nutál.

A lendkereket egyik tengelye mentén is felfüggeszthetjük

Virágmintában haladó pörgettyű: egy súlyos pörgettyű, aminek az egyik tengelyének a vége fix, a másiknak a mozgása pedig elő van írva egy nyílt röbe mentén. Ekkor a görbén körbekjár a másik tengely vége.

Borzov pörgettyű: ha a pörgettyű nem forog, akkor a gumiszál megcsavarodása esetén az kicsavarodik. Ha meg van pörgetve a pörgettyű és a gumiszál is, akkor érdekes jelenséget látunk. Amikor a függőlegesbe áll a tengely, a gumiszál kitekeredik, majd mielőtt újra betekeredne, átfordul a tengelye a pörgettyűnek.

3.2. Euler egyenletek

Tekintsünk egy általános alakú merev testet, aminek egyetlen "O" pontja rögzített (amely nem feltétlen a tömegközéppontja), de ezen kívül más megkötésünk nincs. Ezt nevezzük pörgettyűnek. Ennek a testnek a mozgását szeretnénk leírni, miközben rá valamilyen külső erők hatnak.

Szabadási fokok száma Mennyi egy ilyen testnek a szabadsági fokainak a száma? Egy kiterjedt testnek 6 szabadsági foka van (pl. a TKP mozgása, és az ekörüli 3 tengely mentén a forgás). A megkötés mit eredményez? Vizsgáljuk meg, hány további megközés kell ahhoz, hogy a test egyáltalán ne tudjon mozogni! Tekintsünk még 2 másik pontot "O"-n kívül, "A"-t és "B"-t rögzítettnek. Ennek a két pontnak a megadásához 6 paraméter kell, de merev test esetén d_{OA}, d_{OB} és d_{AB} adottak, vagyis ez 3 megkötést jelent. Maradt tehát

$$6 - 3 = 3$$

szabadási fokunk. Ez nem meglepő, hiszen a test transzlációt nem, csak 3 tengely körüli forgást végezhet, ami épp 3 szabadsági fok.

Ha 3 független egyenletet fel tudnánk írni a testre, akkor a test mozgását teljeskörűen le tudnánk írni. Hogyan válasszunk ki a

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{TKP}} \tag{4a}$$

$$\sum_i \boldsymbol{M}_i = \frac{d}{dt}\boldsymbol{N} \tag{4b}$$

egyenletekből 6-ot? A gond az, hogy ezek az egyenletek általában tartalmazzák a kényszererőt (egyetlen egy van csak, ami az "O" pontban hat), amik biztosítjátk, hogy az "O" pont ne mozduljon el.

Válasszuk az origót a rögzített pontba, mert ekkor a kényszererő forgatónyomatéka 0. Ekkor az impulzusmomentum megváltozásáról szóló 4b-es egyenlet (ami 3db) nem tartalmazza ezt az ismeretlen kényszererőt. Oldjuk meg hát ezeket először, ami egyúttal megadja azt is, hogy a tömegközéppontja hogyan mozog, végül a tömegközéppontra vonatkozó 4a egyenleteket tekintve megadhatjuk a kényszererőt is. A kényszerő a forgás szempontjából nem fontos, de mérnöki szempontból könnyen az lehet, ha tudni akarjuk, hogy a kényszererőt biztosító eszközre mekkora erő hat.

Egy tetszőleges pontnak a sebességét ekkor a $\boldsymbol{r}_0 = 0$ és $\boldsymbol{v}_0 = 0$ választással az 1 egyenlet alapján a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{5}$$

egyenlet határozza meg. Ekkor egy "O"-n átmenő tengelyre felírva az impulzusmomentumot:

$$\boldsymbol{N} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}^{**}\boldsymbol{\omega}, \tag{6}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{**}$ a tehetetlenségi nyomaték tenzora, és általánosan nem diagonális, és időben sem állandó egyetlen komponense sem, $\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{**}(t)$. Mit tehetünk? Üljünk át a testtel együtt forgó rendszerre (ami gyorsuló[1]), és ha ezt jól tesszük meg, akkor abban már diagonális lesz ez a $\hat{\boldsymbol{O}}\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{**}\hat{\boldsymbol{O}}^{-1} = \hat{\boldsymbol{\Theta}}'$. A nehézség-megmaradás tétele szerint valamit fizetnünk kell ezért, ez pedig az, hogy ez a rendszer nem lesz inercia-rendszer. Hogyan kell átszállni egyik vonatkoztatási rendszerről a másikra, és hogyan fog ekkor a 6. egyenlet kinézni? Ehhez tekintsük az A fejezetet!

Azt látjuk a 26. egyenletből, hogy tetszőleges $\boldsymbol{u}$ (időfüggő) vektormennyiségre igaz, hogy

$$\hat{\boldsymbol{O}}^T\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{u}', \tag{7}$$

ahol bal oldalt az $\boldsymbol{u}$ időderiváltját látjuk a vesszős rendszerben, jobb oldalt pedig az $\boldsymbol{u}$ vesszős rendszerbeli időderiváltja szerepel, plusz egy tag, amiben a vesszős rendszerbeli $\boldsymbol{u}$-t kell balról megvektorszorozni a forgó rendszerben látott szögsebességgel. Felírva ezt az impulzusmomentumra, kapjuk, hogy

$$\hat{\boldsymbol{O}}^T\frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{N}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{N}', \tag{8}$$

ahol erre az $\boldsymbol{N}$-re igaz a 4b, valamint a 6 egyenletek. Utóbbiban $\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{**}(t)$ csúnya alakú időfüggő mennyiség, $\boldsymbol{N}'$ viszont a forgó rendszerben értendő, és rá $\boldsymbol{N}' = \hat{\boldsymbol{\Theta}}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$, ahol itt $\hat{\boldsymbol{\Theta}}'$ egy diagonális, időfüggetlen mennyiség,

$$\boldsymbol{N}' = \hat{\boldsymbol{\Theta}}'\boldsymbol{\omega}' = \begin{pmatrix} \Theta'_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta'_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta'_x\omega'_x \\ \Theta'_y\omega'_y \\ \Theta'_z\omega'_z \end{pmatrix}.$$

Bevezetve a

$$\left(\hat{\boldsymbol{O}}^T\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}\right)_i := M'_i \quad i \in \{x, y, z\} \tag{9}$$

jelölést, kapjuk koordinátánként az alábbi 3 egyenletet, az ún. Euler-egyenleteket.

$$\begin{aligned}
M'_x &= \frac{dN'_x}{dt} + \omega'_y \underbrace{N'_z}_{\Theta'_z\omega'_z} - \omega'_z \underbrace{N'_y}_{\Theta'_y\omega'_y} = \Theta'_x\frac{d\omega'_x}{dt} + \omega'_y\omega'_z\left(\Theta'_z - \Theta'_y\right) \\
M'_y &= \frac{dN'_y}{dt} + \omega'_z \underbrace{N'_x}_{\Theta'_x\omega'_x} - \omega'_x \underbrace{N'_z}_{\Theta'_z\omega'_z} = \Theta'_y\frac{d\omega'_y}{dt} + \omega'_x\omega'_z\left(\Theta'_x - \Theta'_z\right) \\
M'_z &= \frac{dN'_z}{dt} + \omega'_x \underbrace{N'_y}_{\Theta'_y\omega'_y} - \omega'_y \underbrace{N'_x}_{\Theta'_x\omega'_x} = \Theta'_z\frac{d\omega'_z}{dt} + \omega'_x\omega'_y\left(\Theta'_y - \Theta'_x\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

Fontos tulajdonságuk, hogy ezek ω-ban nem lineárisak.

[1]abban az értelemben, hogy ha egy pont körpályán mozog, akkor annak centripetális gyorsulása van

3.3. Súlytalan pörgettyű (szimmetrikus eset)

Ebben az esetben a tömegközéppont épp az "O" ponttal, az alátámasztási fix ponttal egyezik meg, ezért a K rendszerből felírva, homogén gravitációs tér esetén

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{M}_i = \underbrace{\boldsymbol{r}_{\mathrm{TKP}}}_{0} \times \boldsymbol{M} = 0.$$

Ezért a 9. egyenlet definíciójának bal oldalán a 0 vektor elforgatottjának vesszük a komponenseit, ami továbbra is 0, így a 10. egyenlet minden sorának bal oldala 0.

Még egy egyszerűsítést veszünk, miszerint a pörgyettyű szimmetrikus, és a szimmetriatengely a z' tengely irányába mutat. Ekkor

$$\Theta'_y = \Theta'_x,$$

ezeket egybevetve a 10 egyenlet alakja ebben a speciális esetben

$$0 = \Theta'_x \frac{d\omega'_x}{dt} + \omega'_y\omega'_z\left(\Theta'_z - \Theta'_x\right) \tag{11a}$$

$$0 = \Theta'_x \frac{d\omega'_y}{dt} + \omega'_x\omega'_z\left(\Theta'_x - \Theta'_z\right) \tag{11b}$$

$$0 = \Theta'_z \frac{d\omega'_z}{dt}. \tag{11c}$$

Az utolsó egyenletről látjuk, hogy mit állít,

$$\omega'_z = \text{áll.} \tag{12}$$

A másodikat szorozzuk be ω'_y-szel, az elsőt ω'_x-szel, majd adjuk össze őket:

$$\begin{aligned} & 0 = \Theta'_x\left(\omega'_x\frac{d\omega'_x}{dt}\right) + \omega'_x\omega'_y\omega'_z\cdot\left(\Theta'_z - \Theta'_x\right) \\ + \quad & 0 = \Theta'_x\left(\omega'_y\frac{d\omega'_y}{dt}\right) + \omega'_x\omega'_y\omega'_z\cdot\left(\Theta'_z - \Theta'_x\right) \\ = \quad & 0 = \Theta'_x\left[\underbrace{\omega'_x\frac{d\omega'_x}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\omega'^2_x} + \underbrace{\omega'_y\frac{d\omega'_y}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\omega'^2_y}\right] = \Theta'_x\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\omega'^2_x + \omega'^2_y\right]. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\left[\omega'^2_x + \omega'^2_y\right] = \text{áll.} \tag{13}$$

Összevetve a 12. és a 13. egyenleteket kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\omega}'^2_x + \boldsymbol{\omega}'^2_y + \boldsymbol{\omega}'^2_z = \text{áll} \Leftrightarrow |\boldsymbol{\omega}'| = \text{áll.} \tag{14}$$

A vesszős rendszerben tehát 12. egyenlet szerint az $\boldsymbol{\omega}'$ szimmetriatengelyre vett vetülete nem változik meg, de a hossza sem változik meg 14 értelmében, ezért az $\boldsymbol{\omega}'$ tengellyel bezárt szöge sem tud megváltozni. A t szimmetriatengely időben akár változhat is, az $\boldsymbol{\omega}'$ pedig ekörül forog, a vesszős vonatkoztatási rendszerben.

A K renszerből nézve

$$\boldsymbol{N} = \text{áll.}$$

Ez áll valamilyen szögben, és ez nem tud megváltozni, mert a külső erők forgatónyomatékainak összege 0. A testre ható külső erők támadáspontja a TKP, ami viszont rögzített, így a TKP sem tud elmozdulni. Tehát a teljes rendszer kinetikus energiája szintén állandó, ami csak a forgási energiából áll. $E_{\text{forg}} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Theta}(t)\,\boldsymbol{\omega}$ csúnya kifejezés, maradjunk a

$$E_{\text{forg}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega}$$

kifejezésnél, ahol $\boldsymbol{N}$ és $\boldsymbol{\omega}$ az IR-ben értendő. $|\boldsymbol{\omega}'| = \text{áll} \Leftrightarrow |\boldsymbol{\omega}| = \text{áll}$, vagyis $\boldsymbol{N}$ és $\boldsymbol{\omega}$ által bezárt szög is állandó.

Mindkettőt mégegyszer összegezve mondhatjuk, hogy nem csak, hogy az impulzusmomentum állandó, de a szögsebesség nagysága is az IR-ben, kettejük bezárt szöge nem változik, tehát a szögsebesség az impulzusmomentum, mint vektor körül köröz(het). Abból a rendszerből nézve pedig, amiben $\hat{\boldsymbol{\Theta}}'$ diagonális volt, az itteni szögsebesség nagysága és z komponensének a nagysága szintén állandó volt, és a szimmetriatengely körül (ami akár változhat is időben) forgott.

3.4. Súlyos pörgettyű (szimmetrikus eset)

Hasson most a pörgettyűre csak a homogén gravitációs erőtér! Ez csak a z tengely irányában hat, azonban most az alátámasztási pont és a súlypont nem esik egybe. Vegyük az IR-beli K-ban a vonatkoztatási pontnak az alátámasztási pontot, ekkor

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{dt} = \boldsymbol{M}, \tag{15}$$

ahol a forgatónyomaték csak a gravitációs- és kényszererőből származik. Utóbbinak a forgatónyomatéka 0, előbbinek pedig a z komponense 0, mert z irányú,

$$\boldsymbol{N}_z = \text{áll.} \tag{16}$$

Most szorozzuk be $\boldsymbol{N}$-nel 15. egyenletet!

$$\underbrace{\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{N}}{dt}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\boldsymbol{N}^2} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{M}. \tag{17}$$

Tegyük fel, hogy nagyjából $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{N}$. Ez jól igaz akkor, ha a szimmetriatengely körül gyorsan forog a pörgettyű. Ekkor mivel a tengely $\boldsymbol{N}$ irányú, a külső forgatónyomatékok összegének nincs tengelyirányú komponense, azaz $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{M}$. Ekkor a 17. egyenlet jobb oldala 0, vagyis

$$\boldsymbol{N}^2 = \text{áll.} \tag{18}$$

A 16. és a 18. egyenletekből pedig adódik, hogy az $\boldsymbol{N}$ az $\boldsymbol{N_z}$ tengelyével állandó szöget zár be. Ezt a körbeforgást nevezik precessziónak.

Ez egy közelítő megoldás volt. Ha most ehhez képest kitérítjük kicsi úgy, hogy ne essen egybe a forgástengely a szimmetriatngelyével, akkor a precessziós mozgáshoz hozzáadódik még egy kis nutáció, lásd a kísérletet.

A Föld forgástengelye sem mutat mindig ugyanabba az irányba a keringési síkhoz képest. Ha súlytalan pörgettyű volna, akkor egzaktul ugyanabba az irányba kéne mutatnia. (Földtudósok ezt nutációnak nevezik, pedig ez precesszió.) Mi okozza az eltérést? A számolás során feltettük, hogy a gravitációs tér homogén. Amennyiben figyelembe vesszük az inhomogenitását, azaz hogy a Föld egyik oldala közelebb, a másik távolabb van, adódik, hogy a gravitációs erők támadáspontja nem esik egybe a tömegközépponttal, így a Föld, mint egy súlyos pörgettyű viselkedik, és precessziós mozgást végez, kb. 100.000 év periódusidővel.

4. Merev testek forgásának stabilitása

4.1. Kísérletek

Láncot függeszünk fel egy pontjánál egy drót segítségével, majd a drótot a tengelye körül kezdjek el forgatni! Ez forgó mozgásba hozza a láncot. A szögsebesség növelésével a lánc a drót eredeti irányára merőleges síkban kezd el forogni úgy, hogy a láncszemek egy kör mentén helyezkednek el. Azt gondolhatjuk, hogy a láncszemek szeretnek a forgástengelytől minél távolabb elhelyezkedni.

Homogén korongot egy kerületi pontjánál felfüggesztve egy dróttal, a drótot tengelye mentén forgatva mozgásba hozzuk a korongot, először egy átmérője mentén. Alacsony szögsebességeknél ez a mozgás, a függőleges drót és átmérő mentén történő forgás valósul meg. A szögsebességet eléggé megnövelve a korong vízszintes lesz, a forgástengelye a forgásszimmetria-tengelyére fog esni.

Téglatestet megforgathatjuk bármelyik oldallapközép-pontjának felfüggesztésében. A láncos kísérlet alapján sejthetjük, hogy a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú elrendezésben tetszőlegesen nagy szögsebességnél az eredeti, felfüggesztés szerinti tengely mentén fog forogni a hasáb. Valóban.

A legkisebb tehetetlenségi nyomatékú elrendezésben csak eléggé kicsi szögsebességek esetén lesz a mozgás az eredeti tengely körül megvalósuló, utána átfordul olyanra, hogy a drót nem lesz függőleges, a test pedig a legnagyobb Θ mentén fog forogni.

A középső Θ-jú tengely mentén nagyobb szögsebességig tart ki az eredeti tengely, de elég nagyra ismét a legnagyobb Θ-val rendelkező tengely mentén fog forogni.

4.2. Levezetés az Euler-egyenletekből

A test forgómozágásnál azt tesszük fel, hogy egy pontja rögzített, mint a pörgettyűknél. Elég kicsi szögsebességeknél ez igaz is, nagyobb szögsebességekre pedig beáll egy új állapot, ahol ismét igaz, hogy 1 pontja a rendszernek helyben marad. Azt fogjuk vizsgálni, hogy hogyan viselkedik a rendszer egy kis perturbációra.

Felírjuk a 10. egyenleteket arra az esetre, ha a külső erők forgatónyomatéka 0, de a testünk nem feltétlen forgásszimmetrikus, mint pl. egy hasáb. Ekkor:

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z \left(\Theta_z - \Theta_y\right) \\ 0 &= \Theta_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(\Theta_x - \Theta_z\right) \\ 0 &= \Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(\Theta_y - \Theta_x\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Ennek egy általános, analitikus megoldását megadni reménytelen feladat. Amit tehetünk, hogy keresünk egyszerű megoldásokat, és azokból próbálunk okosakat mondani. Az egyenletek egy triviális megoldása az $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, egy kevésbé triviális megoldása pedig a $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \cdot \boldsymbol{e}_z$. Ekkor a 19. egyenlet első két sora azt mondja, hogy $0 = 0$, az utolsó pedig, hogy

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

Mit mond ez a megoldás? A testnek **a** tehetetlenségi nyomaték tenzora általában nem diagonális, de van olyan vonatkoztatási rendszer, amiben igen. A test tehát kijelöl 3 tengelyt, amelyek közül bármelyikben - nem csak abban, amit z-nek nevezünk, tehettük volna az előbbi gondolatmenetet x-re és y-ra is - foroghat.

4.2.1. Lineáris stabilitás analízis

Merre gurul le a háztető tetején tojt tojás? Szimmetria okokból a rá ható erőnek 0-nak kell lennie.

Egy egyensúlyi helyzet nem feltétlen stabil. Csak azért, mert egy mozgás "papíron" megvalósul, még nem jelenti, hogy az stabil is volna. A stabilitásanalízis arra való, hogy egy egyensúlyi helyzetből való kis kitérés esetén megvizsgáljuk, hogy mi történik. Kitérítjuk a testet az egyensúlyi helyzetből, majd az egyenletekben a kitérítésben elsőrendű tagokat megtartva, a magasabbrendűeket elhanyagolva vizsgáljuk a mozgást.

A tojás esetén a tojást képzeletben odébb mozgatjuk, és megnézzük, hogy az elmozgatás irányába még inkább fog-e mozogni a tojás, avagy sem. Igen, a tojás arra az irányba gördül tovább, tehát az egyensúlyi helyzet instabil volt.

Ha azt kapjuk, hogy a rá ható erő az eredeti állapota felé téríti vissza a testet, akkor stabil egyensúlyi helyzet volt. Ha az erő arányos a kitéréssel elég kis kitérésekre, akkor ráadásul harmónikus rezgőmozgást fog végezni.

A lineáris stabilitás analízis általános azt csinálja, hogy egy adott mennyiségre felírt egyenletekre adott egyedi megoldáshoz hozzáad egy kis perturbációt, és vizsgálja a mennyiségre felírt egyenleteket. Azokat linearizálja úgy, hogy az egyenletekben megjelenő, perturbációban legalább másodrendű tagokat elhanyagolja. Ilyet a kúpingánál már tanulmányoztunk.

Vizsgáljuk meg, hogy mit történik, ha most

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \delta\omega_x(t) \\ \delta\omega_y(t) \\ \delta\omega_z(t) + \omega_z \end{pmatrix},$$

ahol

$$\frac{\delta\omega_i(t)}{\omega_z} \ll 1 \quad i \in \{x, y, z\}. \tag{20}$$

Látható, hogy egy ilyen $\boldsymbol{\omega}$ előáll, mint egy (korábbi) megoldáshoz hozzáadott perturbáció. Ha kiderül, hogy bármelyik δ-s mennyiség megnő úgy, hogy a 20. feltétel nem teljesül, akkor a perturbáció nem hal ki, hanem erősödik, tehát a megoldás nem volt stabil. Az, hogy ezek a δ-s mennyiségek kicsik, azt engedik meg, hogy a számolások során megjelenő, legalább 2 δ-s mennyiség szorzatát tartalmazó mennyiségeket elhanyagoljuk.

$$\begin{aligned} 0 &= \Theta_x \cdot \delta\dot{\omega}_x + \delta\omega_y \cdot \omega_z (\Theta_z - \Theta_y) \\ 0 &= \Theta_y \cdot \delta\dot{\omega}_y + \delta\omega_x \cdot \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) \\ 0 &= \Theta_z \cdot \delta\dot{\omega}_z \end{aligned} \tag{21}$$

Az utolsóból látjuk, hogy

$$\delta\omega_z(t) = \text{áll.}$$

Mi a megoldás a másik két perturbáció-komponensre? Általánosan az alábbi megoldásokkal próbálkozunk ekkor:

$$\begin{pmatrix} \delta\omega_x(t) \\ \delta\omega_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\omega_{x,0} \\ \delta\omega_{y,0} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

(Azért szokott ez az alak jó lenni, mert a perturbációban már lineáris az egyenlet.) Ezt visszírva a 21. egyenletbe megkapjuk, hogy milyen feltételek esetén nő vagy csökken λ. Ha nő, akkor a perturbáció nő, a megoldás instabil volt, ha csökken, akkor a perturbáció kihal.

$$\begin{aligned} \Theta_x\lambda \cdot \delta\omega_{x,0} \cdot e^{\lambda t} + \delta\omega_{y,0} \cdot e^{\lambda t}\omega_z \cdot (\Theta_z - \Theta_y) &= 0 \\ \Theta_y\lambda \cdot \delta\omega_{y,0} \cdot e^{\lambda t} + \delta\omega_{x,0} \cdot e^{\lambda t}\omega_z \cdot (\Theta_x - \Theta_z) &= 0 \end{aligned}$$

Most $e^{\lambda t}$-vel egyszerűsítve, mátrix alakba írva az egyenleket:

$$\begin{pmatrix} \Theta_x\lambda & \omega_z \cdot (\Theta_z - \Theta_y) \\ \omega_z \cdot (\Theta_x - \Theta_z) & \Theta_y\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega_{x,0} \\ \delta\omega_{y,0} \end{pmatrix} = 0.$$

Ennek a triviális, nem sokat mondó megoldása a $\begin{pmatrix} \delta\omega_{x,0} \\ \delta\omega_{y,0} \end{pmatrix} = 0$. A nem triviálishoz meg kell keresni a mátrix sajátvektorait. Mátrix-diagonalizálási szubrutin indul! A mátrix determinánsa mikor 0?

$$\Theta_x\Theta_y \cdot \lambda^2 - \omega_z^2 \left(\Theta_z - \Theta_y\right)\left(\Theta_x - \Theta_z\right) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\omega_z\sqrt{\frac{\left(\Theta_z - \Theta_y\right)\left(\Theta_x - \Theta_z\right)}{\Theta_x\Theta_y}}$$

Ha a gyök alatt lévő mennyiség pozitív, akkor az egyik λ pozitív, vagyis ekkor a perturbáció időben nő (a perturbáció másik része csökken, de az alulról korlátos). Tehát

$$\frac{\left(\Theta_z - \Theta_y\right)\left(\Theta_x - \Theta_z\right)}{\Theta_x\Theta_y} > 0,$$

a megoldás instabil. Ha a gyök alatt negatív szám van, akkor mindkét λ képzetes, és a megoldás az alábbi alakban írható:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1 = i\omega_z\lambda\\ \lambda_2 = -i\omega\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}\delta\omega_x(t)\\ \delta\omega_y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta\omega_{x,0}\\ \delta\omega_{y,0}\end{pmatrix} \cdot \left(Ce^{i\omega_z\lambda t} + De^{-i\omega_z\lambda t}\right),$$

ahol C és D komplex együtthatók, és a (valós) kezdeti feltételhez való illesztést szolgálják. Ez a megoldás valós, és szinuszok és koszinuszok összegeként előáll, tehát ekkor a kis perturbációra a rendszer harmónikus rezgőmozgással válaszol. Mi a stabil megoldás feltétele Θ-kra? Tudjuk, hogy a Θ-k külön-külön pozitívak, tehát az egész gyök alatti mennyiség akkor negatív, ha

$$\left(\Theta_z - \Theta_y\right)\left(\Theta_x - \Theta_z\right) < 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\Theta_z - \Theta_y\right)\left(\Theta_z - \Theta_x\right) > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\Theta_z - \Theta_y > 0 \text{ és } \Theta_z - \Theta_x > 0\right) \text{ vagy } \left(\Theta_z - \Theta_y < 0 \text{ és } \Theta_z - \Theta_x < 0\right)$$

Hogyan egyeztethető ez össze a kísérletekkel? Tekintsük a forgástengelynek mindig a z-t, és változtassuk a Θ értékeit! A bal oldali eset, vagyis hogy Θ_z a legnagyobb esete stabil megoldást ad, ezt jól mutatta a kísérlet. A $\Theta_x < \Theta_z < \Theta_y$ esete instabil, ezt is jól mutatta a kísérlet (a nagy szögsebességnél jól látszott). A $\Theta_z < \Theta_y < \Theta_x$ esete, vagyis a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú tengely stabilitását viszont mintha nem láttunk volna a kísérletben, az instabil volt. A magyarázatot abban kell keresni, hogy a lineáris stabilitás analízis csak elég kicsi δ-ra igaz, és a kísérletben ennél tovább mentünk, azaz vagy figyelembe kellene venni a számolás során a magasabbrendű tagokat, vagy kisebb perturbációt kellene alkalmazni.

5. Árapály-jelenségek

6. Lineáris lánc, rugók kényszerrezgése

A. Vektorok transzformációja

A.1. Ortogonális formalizmus

Amikor egy K rendszerből áttérünk egy K' rendszerbe úgy, hogy a két rendszer egymáshoz képest csak forgómozgást végez, akkor a kettő közötti áttérés során a K-ban definiált vektorok koordinátáiból a vesszős rendszerben ugyannak a vektornak a korrdinátának kiszámításához az eredeti vektor szám n-esét meg kell szorozni egy forgatás mátrixszal. Itt ennek a transzformációinak nézzük a tulajdonságait.

Legyen egy $\boldsymbol{u}(t)$ valamilyen vektormezőnk egy K IR-ben. A K-hoz képesti forgó, vesszős rendszerben érzett $\boldsymbol{u}'(t)$ teret egy forgatás-mátrix hozza át K-ba,

$$\boldsymbol{u}(t) = \hat{\boldsymbol{O}}(t)\,\boldsymbol{u}'(t)\,. \tag{22}$$

Ennek az időderiváltja

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = \hat{\boldsymbol{O}}(t)\left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}'(t)\right] + \left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]\boldsymbol{u}'(t)\,, \tag{23}$$

ami tehát megadja a K rendszerben az $\boldsymbol{u}(t)$ deriváltját a vesszős rendszeri mennyiségekkel. Ez egy vektor-egyenlet. Ezt egy $\hat{\boldsymbol{O}}^{-1}(t) = \hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)$ mátrixszal való balról szorzás viszi át a vesszős rendszerbe, ugyanis

$$\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\boldsymbol{u}(t) = \hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{u}'(t)\,.$$

Beszorozva hát a 23. egyenlet mindkét oldalát balról $\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)$-vel:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) &= \underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}(t)}_{\hat{\boldsymbol{I}}}\left[\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}'(t)\right] + \underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]}_{:=\hat{\boldsymbol{\Omega}}'}\boldsymbol{u}'(t) \\
\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{u}'(t)}{dt} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}'\boldsymbol{u}'(t)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Ezt az egyenletet lehet úgy kiolvasni, hogy ez megadja az $\boldsymbol{u}(t)$-nek a K-beli változásának értékét a vesszős rendszerből nézve a vesszős rendszerbeli mennyiségekkel. Melyik mennyiség vesszős, és mi vesszőtlen? Tekintsünk most egy olyan esetet, amikor $\boldsymbol{u}'(t) =$ áll, vagyis amikor $\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}'(t) = 0$, azaz a vektor vesszősben megadott koordinátái állandóak. Másképp szólva a vektor a K'-ben áll. Ekkor

$$\underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\underbrace{\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}}_{\text{vesszőtlen}}}_{\text{vesszős}} = \underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]}_{\text{vesszős}\to\text{vesszős operá tor}}\ \underbrace{\boldsymbol{u}'(t)}_{\text{vesszős}},$$

vagyis láthatjuk hogy a definiált $\boldsymbol{\Omega}'(t) = \hat{\boldsymbol{O}}^T(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]$ mennyiség vesszős mennyiséget kell képezzen, továbbá egy vesszős mennyiségre hat, tehát ő egy vesszős $\rightarrow$ vesszős operátor, vagyis ő valóban vesszős operátor.

3 dimenzióban ezzel az $\hat{\boldsymbol{\Omega}}'$-val való szorzásnak van egy fontos tulajdonsága. Ennek kiderítéséhez deriváljuk idő szerint a

$$\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}(t) = I$$

azonosságot!

$$\underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)\frac{d\hat{\boldsymbol{O}}(t)}{dt}}_{\hat{\boldsymbol{\Omega}}'} + \underbrace{\frac{d\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)}_{?} = \mathbf{0} \tag{25}$$

Hogy mi a ?, ahhoz tekintsük $\hat{\boldsymbol{\Omega}}'$ transzponáltját!

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Omega}}'^T =& \left\{\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]\right\}^T \\ =& \left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]^T\left(\hat{\boldsymbol{O}}^T\right)^T(t) \\ =& \frac{d\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)\end{aligned}$$

Tehát a 25 egyenletben $? = \hat{\boldsymbol{\Omega}}'^T$, így

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}' + \hat{\boldsymbol{\Omega}}'^T = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\hat{\boldsymbol{\Omega}}'$ antiszimmetrikus, azaz csak offdiagonális komponensei vannak, és a főátlóra átellenes értékek -1 szeresei egymásnak, jelöljük őket így:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{pmatrix},$$

mert ekkor a mátrixszal való szorzás épp egy vektoriális szorzatot fog jelölni az alábbiak szerint.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Omega}}'\boldsymbol{u}' =& \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -\omega'_z u'_y + \omega'_y u'_z \\ \omega'_z u'_x - \omega'_x u'_z \\ -\omega'_y u'_x + \omega'_x u'_y \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \omega'_x \\ \omega'_y \\ \omega'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{u}'\end{aligned}$$

Ezek szerint a 24. egyenlet az alábbi formában írható:

$$\underbrace{\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}}_{\text{vesszős vektor}}=\frac{d\boldsymbol{u}'(t)}{dt}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{u}'(t)\,. \tag{26}$$

Felmerülhet még a kérdés, hogy mi köze ennek az $\boldsymbol{\omega}'$-nek a K rendszerből nézve a vesszős szögsebességéhez? Ehhez az $\boldsymbol{\Omega}$ operátort, majd az abból származtatott $\boldsymbol{\omega}$ vektort fogjuk vizsgálni.

A.1.1. ω' jelentése

- Ha egy K-ban definiált vektormennyiséget balról egy $\boldsymbol{O}^T$ szorozza, akkor az vesszős vektor lesz, ez a vektorok transzformációja, ahogy azt a 22. egyenletnél láttuk.
- Ha egy mátrix van K-ban definiálva, akkor az ő vesszőse, azaz transzformált mátrixa a $\boldsymbol{O}^T\bullet\boldsymbol{O}$ operátor. A másik irányba, egy vesszőshöz a vesszőtlen mátrixot a $\boldsymbol{O}\bullet\boldsymbol{O}^T$ transzformációval tudjuk megadni.

$\boldsymbol{\Omega}'$-t áttranszformálva K-ba:

$$\boldsymbol{\Omega}(t)=\hat{\boldsymbol{O}}(t)\,\boldsymbol{\Omega}'(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)=\hat{\boldsymbol{O}}(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)=\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,. \tag{27}$$

$\hat{\boldsymbol{O}}(t)\,\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)=I$ idő szerinti deriválásával az előzővel analóg módon megmutatható, hogy ez az $\boldsymbol{\Omega}$ is antiszimmetrikus, és a komponenseiből az előzőbbiekkel azonos módon vektor képezhető:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\begin{pmatrix}0&-\omega_z&\omega'_y\\ \omega'_z&0&-\omega'_x\\ -\omega'_y&\omega'_x&0\end{pmatrix}.$$

Az $\boldsymbol{\omega}$ vektorral való vektoriális szorzás épp olyan, mint magával az $\boldsymbol{\Omega}$-val való (mátrix)szorzás. Az A.2-nél megmutatjuk, hogy ez ugyanaz a vektor, mint amit úgy kapnánk, hogy az $\boldsymbol{\omega}'$-t transzofrmálnánk át, mint vektort. Ezt a tényt a pörgettyűknél ki is használjuk, azaz hogy az itt bevezett $\boldsymbol{\Omega}'$-höz rendelt $\boldsymbol{\omega}'$ vesszőtlene, azaz $\boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega}'$ épp az a vektor, amit $\boldsymbol{\Omega}'$ vesszőtlenítéséhez rendelnénk hozzá. Ezt szemlélteti a következő ábra.

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{\Omega}' & \xrightarrow[\text{mátrix trafó}]{} & \boldsymbol{\Omega}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \boldsymbol{\omega}' & \xrightarrow[\text{vektor trafó}]{} & \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}'}=\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Omega}}\end{array}$$

$\boldsymbol{\omega}$ jelentéséhez vizsgáljuk meg, hogy $\boldsymbol{\Omega}(t)$-re milyen egyenlet vonatkozik. Ehhez vagy a 23. egyenletbe behelyettesítünk $\boldsymbol{u}'(t)=\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)\,\boldsymbol{u}(t)$-val, vagy a 24. egyenletet szorozzuk balról $\hat{\boldsymbol{O}}(t)$-val:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\hat{\boldsymbol{O}}(t)\frac{d\boldsymbol{u}'}{dt}+\underbrace{\left[\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)\right]\hat{\boldsymbol{O}}^{T}(t)}_{\boldsymbol{\Omega}(t)}\boldsymbol{u}(t)\,. \tag{28}$$

Egy K'-ben álló, vagyis ahhoz rögzített vektorra az egyenlet jobb oldalának 1. tagja 0, így ebben az esetben

$$\frac{d\boldsymbol{u}\,(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\,(t)\,.$$

Ez minden vektorra igaz, így pl. az anyagi pontok helyvektoraira is, bal oldalt a sebességük, jobb oldalt pedig a helyvektoruk jelenik meg, amelyek között immár mondható, hogy a szögsebesség-vektor teremtett kapcsolatot a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ módon.

A.2. A szögsebességvektorok azonossága

Végül lássuk be, hogy $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}'} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Omega}}$!

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{O}^T = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & O_{21} & O_{31} \\ O_{12} & O_{22} & O_{32} \\ O_{13} & O_{23} & O_{33} \end{pmatrix}$$

Fáradtságos számolás után kapjuk, hogy $\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0$, ahogy azt vártuk is. Az offdiagonális elemekre:

$$\Omega_{12} = (O_{13}O_{22} - O_{12}O_{23})\,\omega'_x + (O_{11}O_{23} - O_{13}O_{21})\,\omega'_y + (O_{12}O_{21} - O_{11}O_{22})\,\omega'_z \tag{29a}$$

$$\Omega_{13} = (O_{13}O_{32} - O_{12}O_{33})\,\omega'_x + (O_{11}O_{33} - O_{13}O_{31})\,\omega'_y + (O_{12}O_{31} - O_{11}O_{32})\,\omega'_z \tag{29b}$$

$$\Omega_{23} = (O_{23}O_{32} - O_{22}O_{33})\,\omega'_x + (O_{21}O_{33} - O_{23}O_{31})\,\omega'_y + (O_{22}O_{31} - O_{21}O_{32})\,\omega'_z. \tag{29c}$$

A főátlóra átellenesen pedig felismerhetjük, hogy a vártnak megfelelően ezek -1-szeresét kapjuk, $\Omega_{12} = -\Omega_{21}$-t, $\Omega_{13} = -\Omega_{31}$-t, illetve $\Omega_{23} = -\Omega_{32}$-t. Hogy mi az itt megjelenő mátrixkomponensek kombinációja, ahhoz fel kell még használni az $\boldsymbol{O}$ mátrix ortogonalitására vonatkozó egyenletet. $\boldsymbol{O}$ inverzének a komponenseit az alábbi módon számolhatjuk az algebrai adjungált segítségével[2]:

$$\boldsymbol{O}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(\boldsymbol{O})}}_{=1} \cdot \mathrm{adj}\,(\boldsymbol{O}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} O_{22} & O_{23} \\ O_{32} & O_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} O_{12} & O_{13} \\ O_{32} & O_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} O_{12} & O_{13} \\ O_{22} & O_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} O_{21} & O_{23} \\ O_{31} & O_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} O_{11} & O_{13} \\ O_{31} & O_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} O_{11} & O_{13} \\ O_{21} & O_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} O_{21} & O_{22} \\ O_{31} & O_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{31} & O_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{O}^T = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{21} & O_{31} \\ O_{12} & O_{22} & O_{32} \\ O_{13} & O_{23} & O_{33} \end{pmatrix}$$

Most olvassuk ki az azonosságokat a (29). egyenletekhez!

[2]Ez az ún. Cramer-szabály, bővebben: Rózsa Pál: Lineáris Algebra és Alkalmazásai, 1.5.11-es egyenlet, vagy Wikipedia.

- Először a (29a). egyenlethez:

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{13} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{13} &\Rightarrow \quad O_{12}O_{23} - O_{13}O_{22} = O_{31} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{23} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{23} &\Rightarrow \quad -O_{11}O_{23} + O_{13}O_{21} = O_{32} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{33} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{33} &\Rightarrow \quad O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21} = O_{33},
\end{aligned}$$

  vagyis

$$\Omega_{12} = -O_{31}\omega'_x - O_{32}\omega'_y - O_{33}\omega'_z.$$

- Majd a (29b). egyenlethez:

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{12} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{12} &\Rightarrow \quad -O_{12}O_{33} + O_{13}O_{32} = O_{21} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{22} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{22} &\Rightarrow \quad O_{11}O_{33} - O_{13}O_{31} = O_{22} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{32} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{32} &\Rightarrow \quad -O_{11}O_{32} + O_{12}O_{31} = O_{23},
\end{aligned}$$

  vagyis

$$\Omega_{13} = O_{21}\omega'_x + O_{22}\omega'_y + O_{23}\omega'_z.$$

- Végül a (29c). egyenlethez:

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{11} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{11} &\Rightarrow \quad O_{22}O_{33} - O_{23}O_{32} = O_{11} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{21} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{21} &\Rightarrow \quad -O_{21}O_{33} + O_{23}O_{31} = O_{12} \\
\left(\boldsymbol{O}^{-1}\right)_{31} = \left(\boldsymbol{O}^{T}\right)_{31} &\Rightarrow \quad O_{21}O_{32} - O_{22}O_{31} = O_{13},
\end{aligned}$$

  vagyis

$$\Omega_{23} = -O_{11}\omega'_x - O_{12}\omega'_y - O_{13}\omega'_z.$$

Bevezetve az $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}'} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega}'$ jelölést, melyre

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}'} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega}' = \begin{pmatrix} O_{11}\omega'_x + O_{12}\omega'_y + O_{13}\omega'_z \\ O_{21}\omega'_x + O_{22}\omega'_y + O_{23}\omega'_z \\ O_{31}\omega'_x + O_{32}\omega'_y + O_{33}\omega'_z \end{pmatrix}$$

jelölést, láthatjuk, hogy éppen ennek a komponensei bújtak meg $\boldsymbol{\Omega}$-ban,

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(O_{31}\omega'_x + O_{32}\omega'_y + O_{33}\omega'_z\right) & O_{21}\omega'_x + O_{22}\omega'_y + O_{23}\omega'_z \\ \dots & 0 & -\left(O_{11}\omega'_x + O_{12}\omega'_y + O_{13}\omega'_z\right) \\ \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}',z} & \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}',y} \\ \dots & 0 & -\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\omega}',x} \\ \dots & \dots & 0. \end{pmatrix}$$

A.3. Rodrigues-formula

Egy koordinátatranszformáció során felmerülő forgatás $\hat{\boldsymbol{O}}$ mátrixa egyértelmű. Megadható ez, mint az x, y és z tengely körüli forgatások szögei, de fontos, hogy meg kell adni azt is, milyen sorrendben forgatunk a tengelyek körül. Van lehetőség arra is, hogy a forgatás során a tengelyeket a testhez rögzítsük, s ekkor a forgatással a tengelyek is forognak. Ekkor ha pl. egy z körüli forgatás után az új y tengely mentén forgatunk, akkor azt y' körüli forgatásnak jelöljük. Minden forgatás felírható egy mátrixszal való szorzásként, a három mátrix szorzata pedig szintén egy mátrix, amelyik az összes forgatást elvégzi. Ez a mátrix egyértelműen felírható úgy, mint egyetlen, nem feltétlen x, y vagy z, hanem egy általános $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ tengely irányába eső, θ szögű elforgatással az alábbi módon:

$$\hat{\boldsymbol{O}}(t) = \cos(\theta(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + [1 - \cos(\theta(t))] \cdot (\boldsymbol{e}(t) \circ \boldsymbol{e}(t)) + \sin(\theta(t)) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\times(t), \tag{30}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{I}}$ a 3x3-as egységmátrix, $\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}$ a diadikus szorzata a tengelyeknek, valamint

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\times = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

az a mátrix, ami épp úgy viselkedik mátrixként egy vektort balról szorozva, mint egy balról vektoriálisan szorzó $\boldsymbol{e}$. Ez a leírás a Rodrigues-formula.

Felmerülhet néhány kérdés.

1. A $\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)$ mátrixból hogyan kapható meg a pillanatnyi forgástengely, és a forgatás nagysága, azaz ω?

2. Igaz-e az alábbi egyenlőség:

$$\boldsymbol{\Omega}'(t) = \hat{\boldsymbol{O}}^T(t) \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t) = \dot{\theta}(t)\, \boldsymbol{e}_\times(t)?$$

   Ez azt jelentené, hogy a forgatási mátrixból képzett $\boldsymbol{\Omega}'$ mátrix, amiből az $\boldsymbol{\omega}'$ is előáll, megkapható, mint egy skalár időderiváltja (ezt lehetne ekkor $\dot{\theta}(t) = \omega_\theta(t)$-ként jelölni), és egy antiszimmetrikus mátrix szorzata (utóbbiból kiolvasható egy tengely). Ilyesmódon egy alábbi megfeleltetés lenne adható:

$$\boldsymbol{\Omega}'(t) = \dot{\theta}(t)\, \boldsymbol{e}_\times(t)$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{\omega}'(t) = \omega_\theta(t) \cdot \boldsymbol{e}(t)$$

3. $\boldsymbol{\omega}'$ hogyan néz ki a forgó vonatkoztatási rendszerben? Milyen irányú?

A válaszok:

1. Szorozzuk be $\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}(t)$-t jobbról $\hat{\boldsymbol{O}}^T(t)$-val, ekkor a 27. egyenlet szerint megjelenik $\boldsymbol{\Omega}(t)$, amelyből a pillanatnyi $\boldsymbol{\omega}$ felírható, ami megadja egyúttal a tengely irányát és a forgatás sebességét is.

2. Bebizonyítjuk, hogy igaz, ha $\boldsymbol{O}$ tengelye állandó, azaz $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{e} =$ konst.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{O}} &= \cos(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + [1 - \cos(\theta)] \cdot (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) + \sin(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\times \\
\hat{\boldsymbol{O}}^T &= \cos(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{I}}^T + [1 - \cos(\theta)] \cdot (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})^T + \sin(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\times^T \\
&= \cos(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + [1 - \cos(\theta)] \cdot (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) - \sin(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\times \\
\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}} &= -\sin(\theta)\,\dot{\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + \sin(\theta)\,\dot{\theta} \cdot (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) + \cos(\theta)\,\dot{\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\times
\end{aligned}$$

Mielőtt elvégezzük a $\hat{\boldsymbol{O}}^T \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}$ mátrixszorzást, vegyük észre, hogy

$$(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})\,\hat{\boldsymbol{e}}_\times = \begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

illetve

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_\times \hat{\boldsymbol{e}}_\times = &\begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -e_2^2 - e_3^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & -e_1^2 - e_3^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & -e_2^2 - e_3^2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{I}e^2 = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{I},
\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{gathered}
(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) \\
\Updownarrow \\
[(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})]\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{a})))) = (\boldsymbol{e}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{e}\underbrace{(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e})}_{1} = \boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{e}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{a} \quad \forall \boldsymbol{a}
\end{gathered}$$

Tehát

$$(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})\,\hat{\boldsymbol{e}}_\times = 0 \tag{31}$$
$$\hat{\boldsymbol{e}}_\times \hat{\boldsymbol{e}}_\times = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{I} \tag{32}$$
$$(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e} \circ \boldsymbol{e})\,. \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

Most elvégezve a szorzást:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{O}}^T \frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}} = & -\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta}\cdot\boldsymbol{I} + \sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta}\cdot(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e}) + \cos^2\left(\dot{\theta}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\times \\
& -(1-\cos(\theta))\sin(\theta)\,\dot{\theta}\cdot(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e}) + (1-\cos(\theta))\sin(\theta)\,\dot{\theta}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e})}_{(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e})} + \boldsymbol{0} \\
& + \sin^2(\theta)\,\dot{\theta}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\times - \sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta}\underbrace{[(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e})-\boldsymbol{I}]}_{(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e})\hat{\boldsymbol{e}}_\times} \\
= & \left[\cos^2(\theta)\,\dot{\theta} + \sin^2(\theta)\,\dot{\theta}\right]\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\times \\
& + \left[-\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta} + \sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right]\cdot\boldsymbol{I} \\
& + \left[\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta} - (1-\cos(\theta))\sin(\theta)\,\dot{\theta}\right](\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e}) \\
& \quad + \left[-\sin(\theta)\cos(\theta)\,\dot{\theta} + (1-\cos(\theta))\sin(\theta)\,\dot{\theta}\right](\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e}) \\
= & \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\times + 0\cdot\boldsymbol{I} + 0\cdot(\boldsymbol{e}\circ\boldsymbol{e}) = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\times.
\end{aligned}$$

Ekkor valóban igaz, hogy $\dot{\theta} = \omega'$, illetve $\boldsymbol{\omega}'$ iránya épp a forgási tengely iránya. Vegyük észre, hogy $\left(\frac{d}{dt}\hat{\boldsymbol{O}}\right)\hat{\boldsymbol{O}}^T = \boldsymbol{\Omega}$-ra ugyanaz az eredmény jönne ki, mert 31 összefüggések bal oldalának operátorai felcserélhetőek. Tehát $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\times$. Ekkor

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\times = \boldsymbol{\Omega}' \Rightarrow \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{O}\boldsymbol{\omega},$$

vagyis az $\boldsymbol{\omega}$ ekkor sajátvektora az $\boldsymbol{O}$-nak 1 sajátértékkel. Akárcsak az $\boldsymbol{O}^T$-nek, hisz a két mátrix ugyanaz, és $\boldsymbol{\omega}'$ ugyanolyan sajátvektor.

3. Nem tudom, várom az okos észrevételeket.