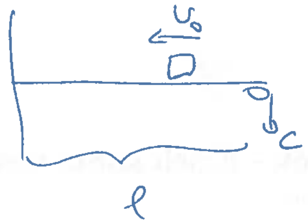
MECHANIKA – EMELT
2012. 09. 18.



↖ Manó húzza a gumiszálat

Inhomogén elsőrendű differenciálegyenlet.

$$\dot{x} = \frac{c}{\ell}x - v_0$$

$$x(t) = A e^{\lambda t} + B \qquad \lambda = \frac{c}{\ell}$$

$$B = \frac{\ell}{c} v_0$$

$$x(t) = A^{\frac{c}{\ell}t} + \frac{\ell}{c} v_0$$

$$x(0) = x_0$$

$$x_0 = A + \frac{\ell}{c} v_0 \Rightarrow A = \left(x_0 - \frac{\ell}{c} v_0\right)$$

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{\ell}{c} v_0\right) e^{\frac{c}{\ell}t} + \frac{\ell}{c} v_0}$$

I. $x_0 < \frac{\ell}{c} v_0$ $\quad x(t_\infty) = 0$ $\quad$ megmenekül

II. $x_0 > \frac{\ell}{c} v_0$ $\quad x(t'_\infty) = \ell$ $\quad$ nem menekül meg

⇑

Az első pillanatban merre indul el.

→ Kezdőfeltétel szerepe a differenciálegyenletekben.

↳ Determinisztikus világkép (Mechanisztikus)

↳ Kvantummechanika miatt véletlen is van.

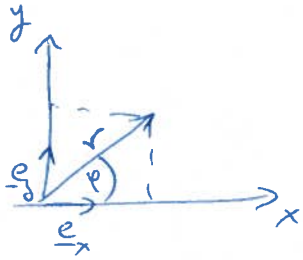
↳ Kaotikus viselkedés miatt klasszikus esetben is.

↳ A fenti egyenletben is, ha a bogár picit odébbról indul, teljesen máshol köt ki.

MECHANIKA – EMELT
2012. 09. 18.

$\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$

$\underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$



$(x,y) \Longleftrightarrow (r,\varphi)$

$x = r\cdot\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$

$y = r\cdot\sin\varphi \qquad \varphi = \text{ctg}\,\frac{x}{y}$

$\underline{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}$

$\underline{r}(t) = r(t)\cdot\underline{e}_r(t) \qquad \underline{e}_r \perp \underline{e}_\varphi$

$$\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\underline{e}}_r = \dot{r}\underline{e}_r + r\cdot\dot{\varphi}\,\underline{e}_\varphi}$$

$\dot{\underline{e}}_r = \varphi\,\underline{e}_\varphi$

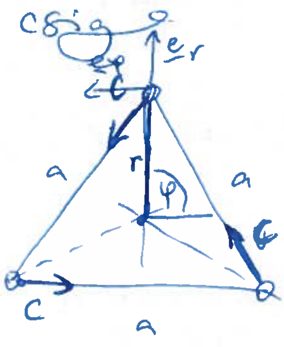
$\dot{\underline{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\underline{e}_r$

$$\underline{a}(t) = \ddot{r}\underline{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r =$$

$$= \boxed{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\underline{e}_\varphi}$$

---

3 csiga



→ polárkoordinátákban

$\underline{v} = v_r\cdot\underline{e}_r + v_\varphi\underline{e}_\varphi$

$\llcorner\; v_r = -c\cdot\cos 30^\circ = \dot{r} \Rightarrow \boxed{r(t) = r_0 - (c\cdot\cos 30^\circ)}$

$v_\varphi = c\cdot\sin 30^\circ = r\dot{\varphi}$

$\llcorner\; \dot{\varphi} = \frac{c\cdot\sin 30^\circ}{r} = \frac{c\cdot\sin 30^\circ}{r_0 - (c\cdot\cos 30^\circ)\cdot t}$

$T = \frac{r_0}{c\cdot\cos 30^\circ}$

$$\boxed{\varphi(t) = -\text{tg}\,30^\circ\cdot\ln\left(r_0 - (c\cos 30^\circ)\cdot t\right) + \varphi_0} = \boxed{\text{tg}\,30^\circ\cdot\ln\frac{r_0}{r(t)}}$$

$\varphi_0 = \text{tg}\,30^\circ\cdot\ln r_0$

⟺ logaritmikus spirál

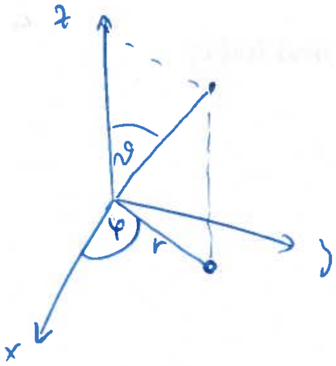
MECHANIKA – ERLELT
2012. 03. 18.

→ A szögelfordulás végtelen → fizikailag nem lehetséges

↳ Rossz kérdés, hogy mennyit fordultak el.

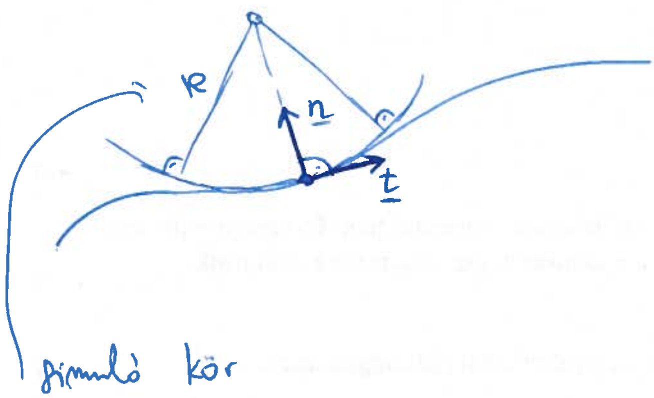
MECHANIKA - EMELT
$\overline{\text{IX}}$. 24.

Gömbkoordináták



(r, φ, ϑ)

Kísérő triéder



$$\underline{v} = v \cdot \underline{t}$$

$$\underline{a} = \dot{v}\,\underline{t} + v\,\dot{\underline{t}}$$

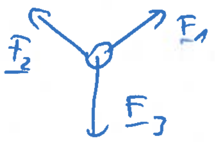
$$\dot{\underline{t}} = -\dot{\varphi} \cdot \underline{n} = -\frac{v}{R} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{a} = \dot{v}\,\underline{t} - \frac{v^2}{R} \cdot \underline{n}$$

Dinamika

Kísérletek: → $F = ma$: kiskocsival

→ Erők vektoros összeadása rugós erőmérőkkel



$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 0$$

→ Légpárnás asztalon ütközések

→ Papír kihúzás, lemezkilökés

MECHANIKA – EMELT

IX.8., 2^{h}_{00}

Newton-axiómák

I. ↳ Van ~~inerciarendszer~~

↳ mindegyik jó, egy bizonyos határig

II. ↳ $m\underline{a} = \underline{F} \Rightarrow \underline{a} = \frac{F}{m} = f(\quad)$

↳ ide mit írok be?

ez így nem jelent semmit

↳ Az állítás: A f-ban nincs $\ddddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}}, \ldots$

$$\underline{a} = f(\underline{r}, \underline{v}, t)$$

↳ A mozgást mindig egy pontosan másodrendű differenciálegyenlet írja le.

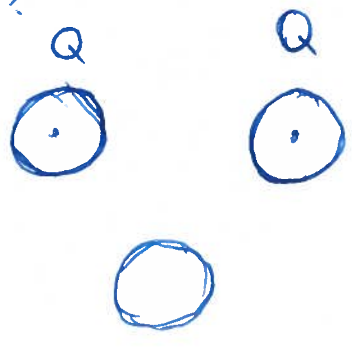
↳ Tömegpont esetén 6 paramétert én határozok meg

III. ↳ $\frac{a_1}{a_2} = \text{áll} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2$

↳ Tömeget tudok definiálni

$$m_1 \underline{a}_1 = \underline{F}_{12}(\underline{r}_1, \underline{v}_1, t) = -\underline{F}_{21}$$

Mi van ha sok test van?



↳ A szuperpozíció elve nem működik többé

MECHANIKA - EMELT

IX. 24.

Tömegpont fogalma

↳ A Newton axiómák csak pontszerű testekre igazak.

MECHANIKA – EMELT
IX. 25.

Kísérlet: Azonos irányú és frekvenciájú rezgések összeadása

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$x = x_1 + x_2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$x = A_1 \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + A_1 \sin\varphi_1 \cos\omega t + A_2 \cdot \cos\varphi_2 \sin\omega t +$$
$$+ A_2 \cdot \sin\varphi_2 \cos\omega t$$

$$x = \underbrace{\left[A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right]}_{A \cdot \cos\varphi} \sin\omega t + \underbrace{\left[A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right]}_{A \cdot \sin\varphi} \cos\omega t =$$

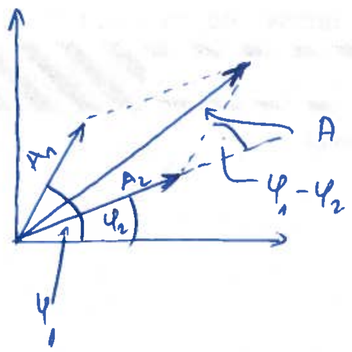
$$= A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ezt lehet-e?

I. $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

II. $$A^2 = (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2 + (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2 =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \underbrace{(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



↳ $A\cdot\sin(\omega t+\varphi) + \mathrm{Im}\left(A e^{i(\omega t+\varphi)}\right)$ $i^2=-1$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

↳ $\varphi_1=\varphi_2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$

$\varphi_1 = \varphi_2 + 180° \Rightarrow A = A_1 - A_2$

Harmonikus rezgőmozgás

$\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ $g = \frac{G}{m}$

$m\ddot{x} = -Dx + mg = -Dx + G \longrightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 \cdot x + g$

Sejtés: $x(t) = A\cdot\sin(\omega t+\varphi) + B$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$

$-\omega^2 \cdot A\sin(\omega t+\varphi) = -\omega_0^2 A\sin(\omega t+\varphi) - \omega_0^2 B + g$

$\Downarrow$

$\omega=\omega_0$

$B = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{G}{D}$

$\Downarrow$

$x(t) = A\cdot\sin(\omega_0 t+\varphi) + \frac{G}{D}$

2 db. ismeretlen

MECHANIKA - EMELT
IX. 25.

Kísérlet: Golyók glicerinben lassan lesüllyednek.

$$m\ddot{x} = G - \lambda v$$

$$\ddot{x} = g - 2\beta v \qquad 2\beta := \frac{\lambda}{m}$$

$$\boxed{\dot{v} = g - 2\beta v}$$

u.a. mint a gyorsító motor problémája

Ansatz: $v = v_0 \cdot e^{\alpha t} + v_\infty$

$$\dot{v} = v_0 \alpha e^{\alpha t} \longrightarrow v_0 \alpha e^{\alpha t} = g - 2\beta v_0 e^{\alpha t} - 2\beta v_\infty$$

$$\alpha = -2\beta$$

$$v_\infty = \frac{g}{2\beta}$$

$$v(t) = v_0 e^{-2\beta t} + \frac{g}{2\beta}$$

$$v(0) = 0 \implies v(t) = \frac{g}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

kezdőfeltétel

Ha $t \to \infty$, $v(t) \longrightarrow \frac{g}{2\beta}$ – elfelejti a kezdeti feltételt

⇓

$v \sim F$

$$\tau := \frac{1}{2\beta} \implies v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{g}{2\beta}$$

Rezgő test folyadékban

$$m\ddot{x} = -Dx - \lambda v$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$x_1(t)$ megoldás
$x_2(t)$ is megoldás $\Bigg\} \Rightarrow x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ is megoldás

Itt van a két integrációs állandó

$\Downarrow$

homogén, lineáris differenciálegyenlet
másodrendű

MECHANIKA EMELT

$\bar{X}$. 1.

$ma = -Dx - \lambda v$ $\qquad 2\beta = \frac{\lambda}{m}, \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\qquad x(t) = A(t) \cdot \sin(\omega t)$

Kísérlet alapján sejtés

$\Downarrow$

Rezgő test köpüli a vizet

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = \dot{A}\sin(\omega t) + A\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{A}(t) \cdot \sin(\omega t) + 2\dot{A}\omega\cos(\omega t) - A\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\underbrace{\left[\ddot{A}(t) - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A\right]}\sin(\omega t) + \underbrace{\left[2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega\right]}\cos(\omega t) = 0$$

$$\dot{A} = -\beta A$$

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$\Downarrow$

$$\beta^2 \cancel{A_0 e^{-\beta t}} - \omega^2 \cancel{A_0 e^{-\beta t}} - 2\beta^2 \cancel{A_0 e^{-\beta t}} + \omega_0^2 \cdot \cancel{A_0 e^{-\beta t}} = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\underline{\underline{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)}}$$

$\Longrightarrow$ 2 szabad paraméter $\Rightarrow$ ez a teljes megoldás

Az $x(t) = A(t)\sin(\omega t)$ feltevés csak akkor működik,

ha $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$.

Másik feltevés: $x(t) = A_0 e^{-\alpha t}$ $\left[\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\right]$

$$\alpha^2 x(t) - 2\beta\alpha\, x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\underbrace{\left[\alpha^2 - 2\beta\alpha + \omega_0^2\right]}_{=0} x(t) = 0$$

$$\alpha^2 - 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

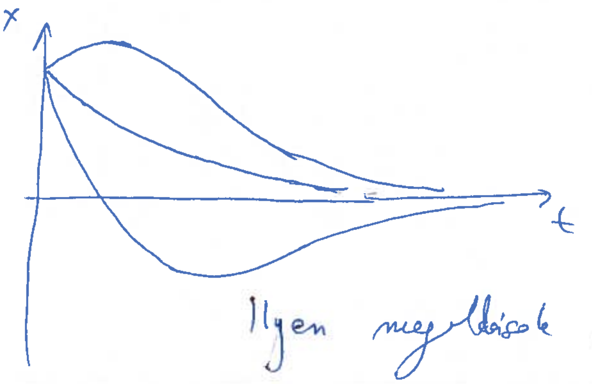
$$\alpha_{1,2} = \frac{2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Ha $\omega_0 < \beta$, akkor $\alpha_{1,2}$ valós

$\to$ $x(t) = A_1 e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)\cdot t}$ $(\omega_0 < \beta)$

Hogy néz ki a megoldás?

Hosszú távon csak az egyik tag marad



Ilyen megoldások lehetnek.

MECHANIKA EMELT

X. 1

Mi van ha $\omega_0 = \beta$?

↳ Általában csak egy paraméter van. Az nem lehet. Hol a másik?

↳ $x(t) = \underbrace{(A + Bt)}_{2 \text{ paraméter}} e^{-\beta t}$ ← Határértékként is lehet számolni.

↳ Ha $\beta < \omega_0$ miért baj az, ha az exponensben komplex szám van? Pont egymás komplex konjugáltjai.

$x(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_1^* e^{-\alpha^* t} \in \mathbb{R}$ $(\omega_0 < \beta)$

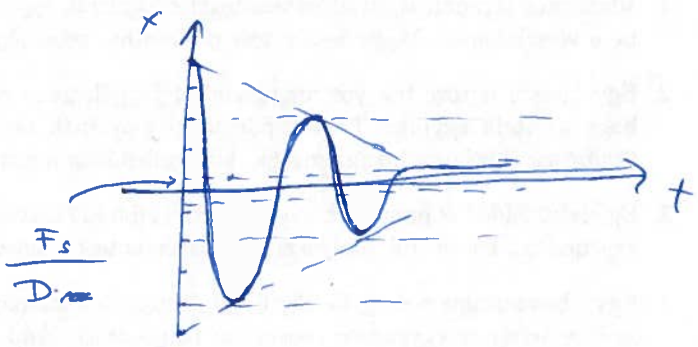
↳ ebben 2 szabad paraméter van

↳ Ez pont ua. a megoldás, mint korábban

Csillapítás csúszási súrlódással

$$ma = -Dx - F_s \frac{v}{|v|}$$

$$\left.\begin{aligned} ma &= -Dx + F_s \quad v<0 \\ ma &= -Dx - F_s \quad v>0 \end{aligned}\right\}$$



↳ Piaci kofás nénik ezt tudják

Gerjesztett rezgés – kényszerrezgés [kísérlet + Takoma-híd]

$$ma = -Dx - \lambda v + F(t) \qquad F(t+T) = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)}$$

külső paraméter

↳ Ez az egyenlet nem lineáris.

MECHANIKA EMELT

X. 2.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \end{cases}$$

$$x(t) = A\sin(\varphi)\cdot\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \omega A\cos(\varphi)\cdot\cos(\omega t) - \omega A\sin(\varphi)\cdot\sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\varphi)\cos(\omega t) - \omega^2 A\cos(\varphi)\cdot\sin(\omega t)$$

$$\left[-\omega^2\cdot\cos(\varphi) - 2\beta\omega\sin(\varphi) + \omega_0^2\cos(\varphi)\right]A\cdot\sin(\omega t) +$$

$$+\left[-\omega^2\sin(\varphi) + 2\beta\omega\cos(\varphi) + \omega_0^2\sin(\varphi)\right]\cdot A\cos(\omega t) = f_0\sin(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\varphi) - 2\beta\omega\sin(\varphi)\right]A = f_0 \\ (\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi) + 2\beta\omega\cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

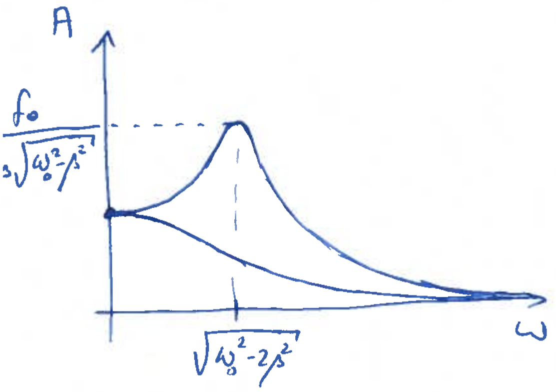
$$(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi) = -2\beta\omega\cos(\varphi) \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}}$$

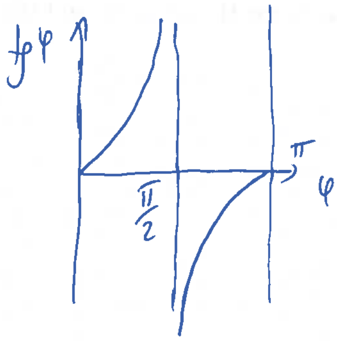
$$(\cancel{\ldots}(.)^2 = \left[(\omega_0^2-\omega^2)^2\cos^2(\varphi) + 4\beta^2\omega^2\sin^2(\varphi) - 4\beta\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]A^2 = f_0$$

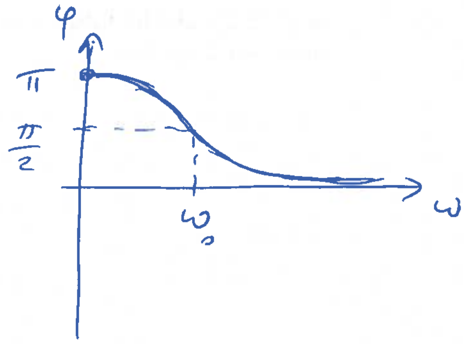
$$(.)^2 = \left[(\omega_0^2-\omega^2)^2\sin^2(\varphi) + 4\beta^2\omega^2\cos^2(\varphi) + 4\beta\omega(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]A^2 = 0$$

$$+\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]A^2 = f_0^2$$

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$$







$$\frac{d}{d\omega}A(\omega) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2\right] = -2\cdot 2\cdot(\omega_0^2-\omega^2)\,\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

$$\omega\left[2\beta^2-\omega_0^2+\omega^2\right] = 0$$

① $\omega = 0$

② $\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ (rezonancia - frekvencia)

↳ Csak akkor lesz $\omega > 0$ szélsőértéke, ha $\omega_0^2 > 2\beta^2$

$\Downarrow$

Ez volt elrontva a Tacoma-hídnál

↳ β túl kicsi volt.

Milyen magas a maximum?

$$A(\omega_r) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\beta^2)^2+4\beta^2\cdot(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Minél kisebb a β, annál nagyobb a maximális amplitúdó.

Milyen széles a csúcs?

$$A(\omega) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}} \approx$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}\, 2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2 = 2\cdot 4\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)$$

$$\omega^4-2\omega_0^2\omega^2+4\beta^2\omega^2+\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2)=0$$ ← Mekkora a két gyök távolsága?

$$\omega_1^2-\omega_2^2=\sqrt{(4\beta^2-2\omega_0^2)^2-4(\omega_0^4-8\beta^2(\omega_0^2-\beta^2))} =$$

$$=\sqrt{16\beta^4-16\beta^2\omega_0^2+\cancel{4\omega_0^4}-\cancel{4\omega_0^4}+32\beta^2\omega_0^2-32\beta^4} =$$

$$=\sqrt{16\beta^2\omega_0^2-16\beta^4} = 4\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$\omega_1^2-\omega_2^2=(\omega_1+\omega_2)(\omega_1-\omega_2)\approx 2\omega_r\cdot\Delta\omega$$

$$\Delta\omega \sim \beta \quad (\text{ha } \beta \text{ kicsi})$$

↳ Homogén egyenlet megoldása + egy partikuláris megoldás

↳ Tranziens jelenségek.

MECHANIKA EMELT

$\underline{X}$. 2.

$$m\underline{a} = \underline{F}$$

$$\underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{M}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{a} \times \underline{b}) = \mathring{\underline{a}} \times \underline{b} + \underline{a} \times \mathring{\underline{b}}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{r} \times m\underline{v}) = \underbrace{\underline{v} \times m\underline{v}}_{0} + \underline{r} \times m\underline{a}$$

$$\frac{d}{dt}(\overbrace{\underline{r} \times m\underline{v}}^{\underline{N} \,=}) = \underline{M}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

$$\underline{F}(\underline{r}) \parallel \underline{r} \implies \underline{N} = \text{áll.}$$

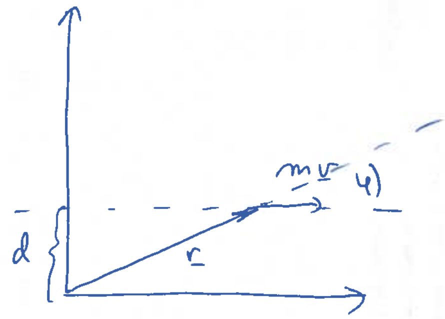
MECHANIKA - EMELT
X. 8.

$$m\underline{a} = \underline{F}$$

$$\underline{r} \times m\underline{a} = \underline{r} \times \underline{F} =: \underline{M}$$

$$\underline{N} := \underline{r} \times m\underline{v}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$$

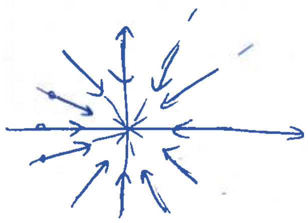


$$|\underline{N}| = |\underline{r}|\,|m\underline{v}| \cdot \sin\varphi = m\,|\underline{v}| \cdot d$$

↳ egyenes vonalú egyenletesen mozgó testre jó.

$\underline{F}(\underline{r})$ – erőtér

↳ Ha centrális: $\underline{F}(\underline{r}) = \pm F(\underline{r}) \cdot \underline{r}$ $\quad \underline{F}(\underline{r}) \parallel \underline{r}$



$$\Downarrow$$

$$\underline{r} \times \underline{F} = \underline{M}(\underline{r}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\underline{N}} = 0 \Rightarrow \underline{N} = \text{áll.}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} =$$

$$\underline{r} \cdot \underline{N} = \underline{r} \cdot (\underline{r} \times m\underline{v}) = 0$$

↳ A test kénytelen az $\underline{N}$-re merőleges síkban mozogni.

síkbeli polárkoordináták

$$\underline{r} = r\underline{e}_r, \quad \underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi \Rightarrow \underline{r} \times \underline{v} = r^2\dot{\varphi}\,(\underline{e}_r \times \underline{e}_\varphi)$$

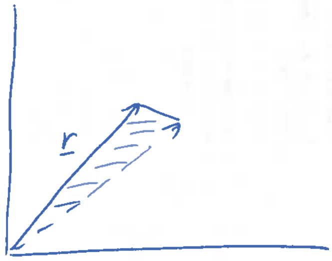
MECHANIKA – EMELT
X. 8

$$|\underline{N}| = m r^2 \cdot \underset{\omega}{\dot{\varphi}} = \text{áll.}$$

2 Kísérlet: ① Első magyar műhold

② 

Geometriai értelmezés



$$\Delta T = \frac{r^2 \Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{r^2}{2}\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \dot{T} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2} = \text{áll}$$

területi sebesség

⇓

Kepler II. törvénye (de nem csak a gravitációs erőtérben igaz)

$$m\underline{a} = \underline{F}$$

$$\underline{v}\, m\, \underline{a} = \underline{v}\,\underline{F} =: P(t) \quad \leftarrow \text{teljesítmény}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \underline{v}\, m\, \underline{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = P(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2} m v^2\right)}_{E_{kin}} dt = \int_{t_0}^{t} P(t)\, dt = W$$

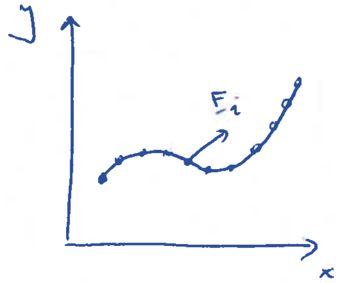
$$\underline{E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = W} \quad \leftarrow \text{munkatétel}$$

– Ha $\underline{F} \perp \underline{v}$ (pl. mágneses tér), akkor $E_{kin}(t) = \text{áll.}$

$$W = \int_{t_0}^{t} \underline{F}(\underline{r}(t))\, \underline{v}(t)\, dt$$

csak erőterekkel foglalkozunk

$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i))\, \underline{v}(t_i)\,(t_i - t_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}(t_i))\, \frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{\cancel{t_i - t_{i-1}}}\, \cancel{(t_i - t_{i-1})}$$



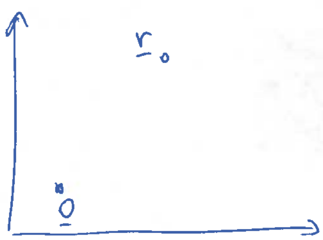
$$W \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}_i)\underbrace{(\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1})}_{\Delta \underline{r}_i}$$

$$\boxed{W = \int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}}$$

– Valójában parametrizáljuk a görbét: $\underline{r}(t)$

↳ Nem függ az útvonaltól, ha $\oint_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = 0$ bármely G-re

⇑ Konzervatív erőtér



$$\phi(\underline{r}) = -\int_{\underline{0}}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

← nem egyértelmű, mert függ $\underline{0}$ megválasztásától

Potenciális energia

$$\phi(\underline{r}_2) = -\int_{0}^{\underline{r}_1} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} - \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = \phi(\underline{r}_1) - W \Rightarrow \phi(\underline{r}_1) - \phi(\underline{r}_2) = W$$

Konzervatív erőtérben:

$$E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = W = -\phi(\underline{r}(t)) + \phi(\underline{r}_2(t_0))$$

$$E_{kin}(t) + \phi(\underline{r}(t)) = E_{kin}(t_0) + \phi(\underline{r}(t_0)) = E = \text{áll.}$$

Centrális konzervatív erőtérben megmarad
- impulzusmomentum (3 mennyiség)
- energia (1 mennyiség)

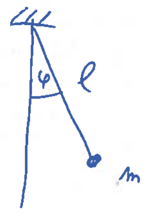
$\underline{F} = m\underline{a} \rightarrow$ 6 db. elsőfokú differenciálegyenlet

$\Downarrow$

Összesen $6-4=2$ szabad változó.

<u>Kísérlet:</u> Inga ugyanaddig lendül fel, akkor is ha van egy akadály a madzag útjában.

$\underline{G} = \text{áll.}$ $\quad \phi = Gh$



$$\frac{1}{2}mv^2 + Gh =$$

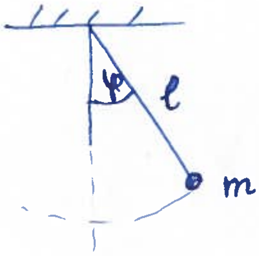
$$= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + G(1-\cos\varphi)\ell =$$

$$\underline{v} = \ell\dot{\varphi}\cdot\underline{e}_\varphi$$

$$= m\ell\left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}^2 + g(1-\cos\varphi)\right) = E$$

$$\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}^2 + g(1-\cos\varphi) = \alpha = \frac{E}{m\ell}$$

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2\frac{\alpha - g(1-\cos\varphi)}{\ell}}$$



$$E = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2 + mg(1-\cos\varphi)\, l$$

↳ 1D mozgás konzervatív erőtérben: elsőfokú diff. egy.

$(\dot{\ })$

$$0 = m l^2 \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

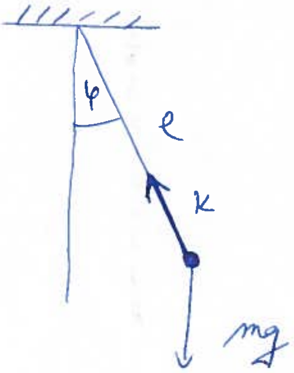
φ kicsi: $\sin\varphi \approx \varphi$

$\Downarrow$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\cdot\varphi \Rightarrow \varphi(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

A frekvencia nem függ A-tól

↳ nem egzakt



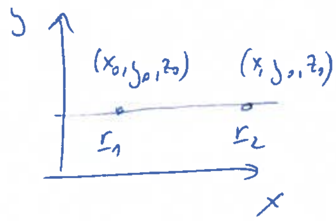
A kényszererő a megadott pályán tartja a testet és merőleges a lehetséges elmozdulásra ⇒ nem végez munkát.

$$\phi(\underline{r}) = -\int_{\underline{0}}^{\underline{r}} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

— Hogy kell ezt a képletet megfordítani:

$$\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1) = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}$$

$\underline{r}_2 - \underline{r}_1$ legyen párhuzamos x-szel:



$$\phi(x,y_0,z_0) - \phi(x_0,y_0,z_0) = -\int_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)\, dx$$

$\Downarrow$

$$F_x(x,y_0,z_0) = -\frac{d\phi(x,y_0,z_0)}{dx}$$

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\ ; \quad F_y(x,y,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\ ; \quad F_z(x,y,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\underline{F} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\underline{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = -\underline{\nabla}\phi$$

$$\phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1) = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\, d\underline{r}$$

$$\phi(\underline{r}+\underline{h}) - \phi(\underline{r}) \approx -\underline{F}\,\underline{h} = +\operatorname{grad}\phi \circ \underline{h}$$

$$\phi(\underline{r}+\underline{h}) \approx \phi(\underline{r}) + \operatorname{grad}\phi \cdot \underline{h}$$

A leggyorsabb változás irányába mutat.

$\phi =$ áll. felületek $\Rightarrow$ a grad ϕ ezekre merőleges.

Az erő mindig merőleges az ekvipotenciális felületekre.

Példa:

grad $|\underline{r}|$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{x}{|\underline{r}|}$$

$$\operatorname{grad}|\underline{r}| = \left(\frac{x}{|\underline{r}|}, \frac{y}{|\underline{r}|}, \frac{z}{|\underline{r}|}\right) = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \underline{e}_r$$

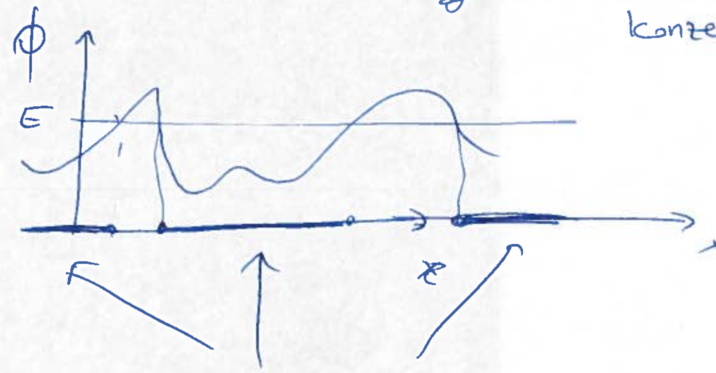
$$\boxed{\operatorname{grad} f(|\underline{r}|) = f'(|\underline{r}|)\cdot \underline{e}_r}$$

1D mozgás:

$$m\ddot{x} = F(x) \qquad -\frac{d}{dx}\phi(x) = F(x)$$

~~Mozgás~~ 1D erőtér mindig konzervatív

$$\frac{1}{2}mv^2 + \phi(x) = E$$



csak ezeben a belsejében lehet a test.

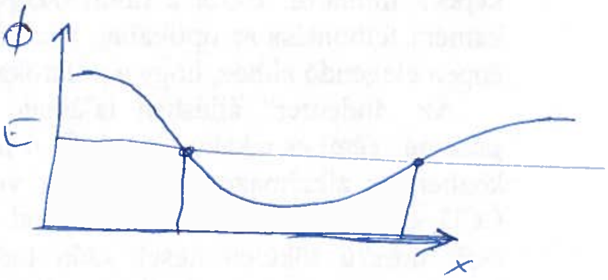
A minimum környékén ϕ parabola:

$$F(x) = -D(x-x_0) = -\frac{d\phi}{dx} \Rightarrow D = \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x_0}$$

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{D}{2}(x-x_0)^2$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \phi(x) = E$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}$$



$$1 = \frac{\dot{x}}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}\frac{dx}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}dx$$

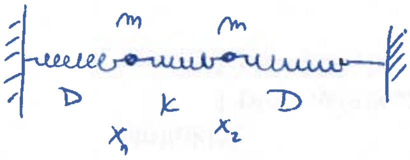
A határokat is ki kell cserélni

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-\phi(x))}}$$

Mennyi idő alatt ér x_0-ból x-be.

Kísérlet: csatolt ingák

Csatolt rezgések



$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + k(x_2-x_1) \qquad \omega_0^2 := \frac{D}{m}$$

$$m\ddot{x}_2 = -Dx_2 - k(x_2-x_1) \qquad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 + \Omega^2(x_2-x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - \Omega^2(x_2-x_1)$$

Először nézzük amikor együtt mozognak az ingák vagy éppen egymással szemben:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t) \qquad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$-\omega^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 + \Omega^2(A_2 - A_1)$$

$$-\omega^2 A_2 = -\omega_0^2 A_2 - \Omega^2(A_2 - A_1)$$

$$(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)A_1 = \Omega^2 A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2}A_1$$

$$(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)A_2 = \Omega^2 A_1$$

$$(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 A_1 = \Omega^4 A_1$$

$$\left((\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 - \Omega^4\right) A_1 = 0$$

vagy $A_1 = 0$ vagy $\underbrace{\left((\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 - \Omega^4\right)} = 0$

Megoldások:

I. $A_1 = A_2 = 0$

II. $A_1 = A_2$, $\omega^2 = \omega_0^2$

III. $A_1 = -A_2$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$

2db nemtriviális megoldás

$$(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2 = \Omega^4$$

$$\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2 = \pm\Omega^2$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \to A_2 = \frac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega_0^2}{\Omega^2}A_1 = A_1$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 \to A_2 = \frac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega_0^2-2\Omega^2}{\Omega^2}A_1 = -$$

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ sajátérték probléma

[kísérlet: különböző frekvenciájú rezgések összeadása – lebegés]

$$x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Mi az $A = B$ esetet vizsgáljuk...

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$x_1(t) = A\left(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right) = 2A \cdot \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$$

$\Uparrow$

lassan változó amplitúdójú rezgés

[kísérlet: egymásra merőleges rezgések összetétele
Mikola eszköz + oszcilloszkóp]

$$x = A_1 \sin(\omega t)$$

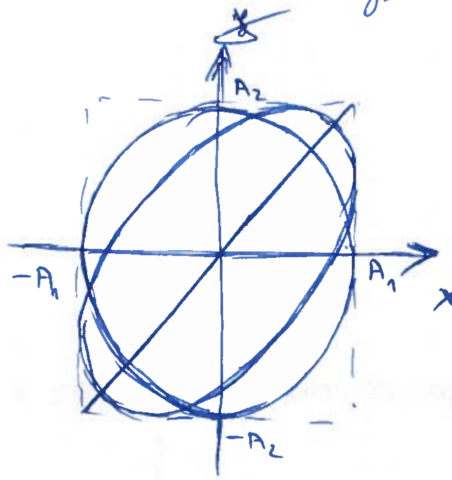
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi) = A_2 \left[\cos\varphi \cdot \sin(\omega t) + \sin\varphi \cos(\omega t)\right]$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos\varphi + \sin\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2}$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos\varphi \frac{x}{A_1}\right)^2 = \sin^2\varphi \left(1 - \left(\frac{x}{A_1}\right)^2\right) \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - 2\cos\varphi \frac{xy}{A_1 A_2} = \sin^2\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

↳ Ez vagy parabola, vagy hiperbola vagy ellipszis.



$$\varphi = 0: \quad \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$$

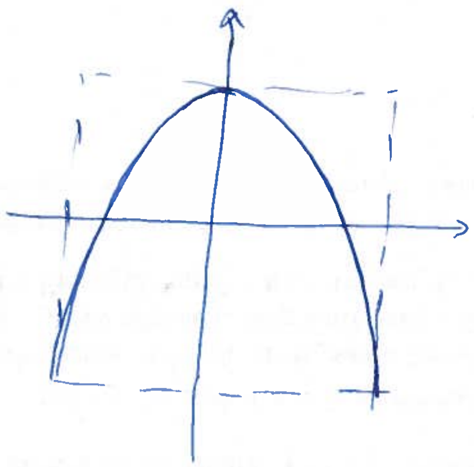
$$\varphi = 90^\circ \quad \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1$$

$$x = A_1 \sin(\omega t)$$

$$y = A_2 \cos(2\omega t) = A_2\left(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\right) = A_2\left(1 - 2\sin^2(\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{A_2} = 1 - 2\left(\frac{x}{A_1}\right)^2$$

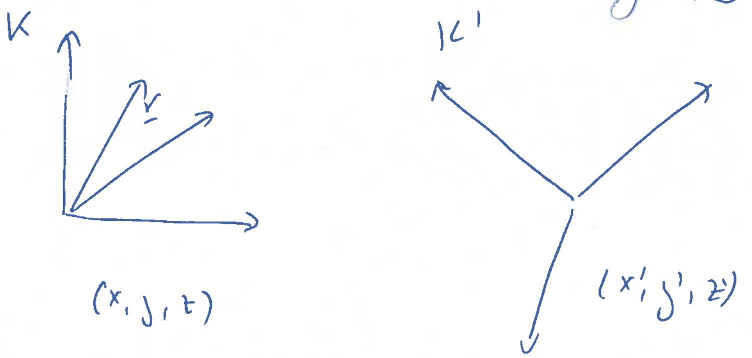
↑
parabola



MECHANIKA - EMELT

XI. 6.

Kísérletek: gyorsuló kocsin kis kocsi, Forgó sínen kocsi, elhangzódó gyufik



$$\underline{r} = \hat{O}\,\underline{r}'$$

$$\underline{r}(t) = \hat{O}(t)\,\underline{r}'(t)$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\hat{O}}(t)\cdot\underline{r}' + \hat{O}\,\dot{\underline{r}}' \quad /\tilde{\hat{O}}\cdot$$

$$\underline{v}' = \underbrace{\tilde{\hat{O}}\dot{\hat{O}}}_{\hat{\Omega}}\,\underline{r}' + \cancel{1}\,\frac{d\underline{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\underline{r}'}{dt} = \tilde{\hat{O}}\cdot\underline{v}$$

$$\tilde{\hat{O}}\hat{O} = 1$$

$$\dot{\tilde{\hat{O}}}\hat{O} + \tilde{\hat{O}}\dot{\hat{O}} = 0$$

$$\widetilde{\tilde{\hat{O}}\dot{\hat{O}}} + \tilde{\hat{O}}\dot{\hat{O}} = 0 \longrightarrow \tilde{\hat{\Omega}} = -\hat{\Omega}$$

$\hat{\Omega}$ egy antiszimmetrikus tenzor

$\Updownarrow$

3 db. független komponense van. $\to \underline{\omega}$

$\Downarrow$

$$\underline{v}' = \underline{\omega}\times\underline{r}' + \cancel{1}\,\frac{d\underline{r}'}{dt}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\underline{A}\right)' = \underline{\omega}\times\underline{A} + \frac{d}{dt} \qquad \frac{d}{dt}' = \underline{\omega}\times + \frac{d}{dt}$$

$$\underline{a}' = \left(\underline{\omega}\times + \frac{d}{dt}\right)\left(\underline{\omega}\times\underline{r}' + \frac{d\underline{r}'}{dt}\right) =$$

$$= \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2\,\underline{\omega}\times\frac{d\underline{r}'}{dt} + \underline{\beta}\times\underline{r}' + \frac{d^2\underline{r}'}{dt^2}$$

$$\underline{F}' = m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + 2m\,\underline{\omega}\times\frac{d\underline{r}'}{dt} + m\underline{\beta}\times\underline{r}' + m\frac{d^2\underline{r}'}{dt^2}$$

Lehagyom a '-kat, mert már minden a '-s koordinátarendszerben van:

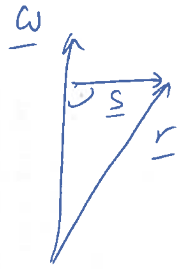
$$\underline{F} = m\underline{a} + m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) + 2m\,\underline{\omega}\times\underline{v} + m\underline{\beta}\times\underline{r}$$

$$m\underline{a} = \underline{F} - m\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) + 2m\,\underline{v}\times\underline{\omega} + m\,\underline{r}\times\underline{\beta} - m\underline{a}_0$$

ha még gyorsul is a K' k.r.

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\,\underline{c})\,\underline{b} - (\underline{a}\,\underline{b})\,\underline{c}$$

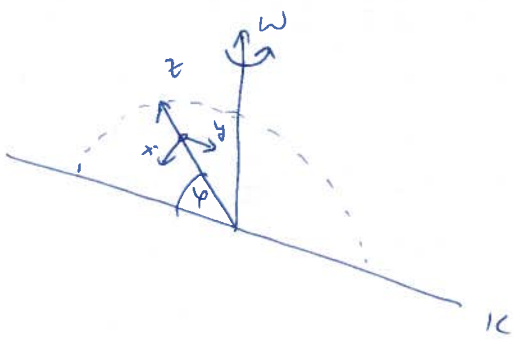
$$-\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = -(\underline{\omega}\,\underline{r})\underline{\omega} + |\underline{\omega}|^2\underline{r} = \omega^2\underline{s}$$



Kísérlet: Foucault-inga kiállítás

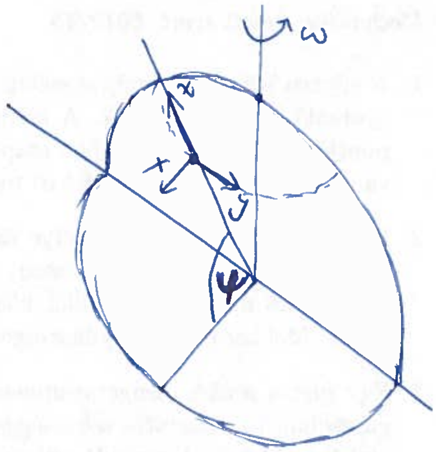
Fucault inga kiszámítása
↓
csak a Coriolis-erő számít.

$$\boxed{\underline{a} = \underline{g} + 2\underline{v}\times\underline{\omega}}$$



MECHANIKA – EMELT

XI. 12.



$$\underline{a} = \underline{g} + 2\underline{v} \times \underline{\omega}$$

$$\underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

$$\underline{g} = (0, 0, -g)$$

$$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\underline{\omega} = (-\omega \cos\psi, 0, \omega \sin\psi)$$

$$\underline{v} \times \underline{\omega} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\omega\cos\psi & 0 & \omega\sin\psi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}\omega \cdot \sin\psi \\ -\dot{z}\omega\cos\psi - \dot{x}\omega\sin\psi \\ \dot{y}\omega\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y}\omega\sin\psi \\ \ddot{y} &= -2\omega(\dot{z}\cos\psi + \dot{x}\sin\psi) \\ \ddot{z} &= 2\dot{y}\omega\cos\psi - g \end{aligned}}$$

→ x, y, z nem szerepel benne

↳ elsőrendű egyenletek

$$\dddot{y} = -2\omega(\ddot{z}\cos\psi + \ddot{x}\sin\psi) = -2\omega\left(2\dot{y}\omega\cos^2\psi - g\cos\psi + 2\dot{y}\omega\sin^2\psi\right) =$$

$$= -4\omega^2\dot{y} + 2\omega g\cos\psi$$

$$\ddot{v}_y = -4\omega^2 v_y + 2g\omega\cos\psi \Rightarrow v_y(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + B$$

$$-\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = -4\omega^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi) - 4\omega^2 B + 2g\omega\cos\psi$$

$$\omega_0 = 2\omega; \quad B = \frac{g \cdot \cos\psi}{\ldots}$$

$$v_y(t) = A \sin(2\omega t + \varphi) + \frac{g \cdot \cos\varphi}{2\omega}$$

↳ Kezdeti feltételek?
↳ látszólag 3 db kell.

↳ De $\ddot{y}(0) = -2\omega(\dot{z}(0)\cos\varphi + \dot{x}(0)\sin\varphi) = 0$

↳ $v(0) = 0$

$$a_y(t) = A \cdot 2\omega \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$$

↳ $a_y(0) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

⇓

$$\boxed{v_y(t) = A \cdot \cos(2\omega t) + \frac{g \cdot \cos\varphi}{2\omega}} =$$

$v_y(0) = 0 \longrightarrow$ $$= \boxed{\frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)}$$

!

Az eredeti egyenletben ω^2-es tagok le lettek hagyva és $g = \text{const} \Rightarrow$ A mo. csak akkor jó, ha $\omega t \ll 1$.

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, ha x kicsi

↳

$$v_y(t) = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(1 - 1 + \cancel{8}\, 2\omega^2 t^2\right) = g\omega \cdot \cos\varphi \cdot t^2$$

$$y(t) = g\omega\cos\varphi \cdot \frac{t^3}{3}$$

$\ddot{z} \approx \cancel{g} - g$ (A következő tag w^2-es)

$z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$

$\ddot{x}(t) \approx 0$ (csak w^2-es tagok vannak)

$x(t) = 0$

L $h = 100$ m esetén $y = 1,5$ cm.

Kísérlet : Foucault - ~~...~~ inga

L A kötelezőt ~~hozzá~~ kell venni az egyenletekhez.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y}\,\omega \sin\varphi + \lambda x \\ \ddot{y} = -2\omega(\dot{z}\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi) + \lambda y \\ \ddot{z} = 2\dot{y}\omega\cos\varphi - g + \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{\ell^2 - x^2 - y^2} = \pm \ell\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{\ell^2}} \approx -\ell \end{cases}$$

$\Downarrow$

$g \approx \lambda z \Rightarrow \lambda = -\frac{g}{\ell}$

$\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi - \frac{g}{\ell}x$

$\ddot{y} = -2\dot{x}\omega\sin\varphi - \frac{g}{\ell}y$

$\omega_1 := \omega \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{I.} & \ddot{x} = 2\dot{y}\omega_1 - \frac{g}{\ell}x \\ \mathrm{II.} & \ddot{y} = -2\dot{x}\omega_1 - \frac{g}{\ell}y \end{array}}$$

$\tilde{z} := x + iy$

$I + i \cdot II$: $$\boxed{\ddot{z} = -2i\omega_1 \dot{z} - \frac{g}{\ell} z}$$

$z(t) = A e^{i\alpha t}$

$$(i\alpha)^2 \cdot z(t) = 2\omega_1 \alpha \, z(t) - \frac{g}{\ell} z(t)$$

$$-\alpha^2 = 2\omega_1 \alpha - \frac{g}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\omega_1 \alpha - \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-2\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 + 4\frac{g}{\ell}}}{2} = -\omega_1 \pm \sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}$$

$$z(t) = A_1 \cdot e^{-i\left(\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}\right) \cdot t} + A_2 e^{-i\left(\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}\right) t}$$

Kezdeti feltételek: $x(0) = a$; $\dot{x}(0) = 0$

$y(0) = 0$ $\quad \dot{y}(0) = 0$

$\Downarrow$

$z(0) = a$

$\dot{z}(0) = 0$

$\underline{A_1 + A_2 = a}$

$$\dot{z}(t) = -i A_1 \left(\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}\right) e^{-\cdots} - i A_2 \left(\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}\right) e^{-\cdots}$$

$$\dot{z}(0) = -i(A_1 + A_2)\omega_1 - i(A_1 - A_2)\sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2} = -i a \omega_1 - i(A_1 - A_2)\sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2} = 0$$

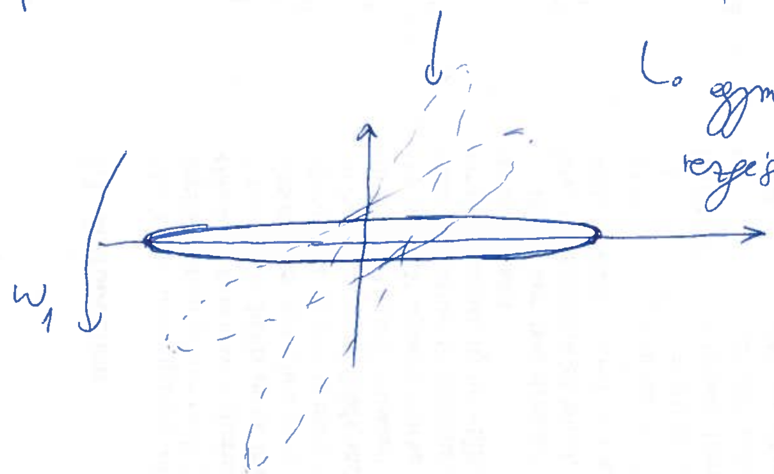
$$A_1 - A_2 = -\frac{a\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{\ell} + \omega_1^2}}$$

$$z(t) = e^{-i\omega_1 t} \cdot \left(A_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}+\omega_1^2}\cdot t} + A_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}+\omega_1^2}\cdot t} \right) =$$

$$= e^{-i\omega_1 t} \left((A_1 + A_2) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\omega_1^2}\cdot t\right) + i(A_2 - A_1) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\omega_1^2}\, t\right) \right) =$$

$$= e^{-i\omega_1 t} \left(a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\cancel{\omega_1^2}}\cdot t\right) + i \frac{\omega_1 a}{\sqrt{\frac{g}{l}+\cancel{\omega_1^2}}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\cancel{\omega_1^2}}\cdot t\right) \right) =$$

$$= e^{-i\omega_1 t} \left(a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) + i \frac{\omega_1 a}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \right)$$



↳ egymásra merőleges rezgések összetétele

MECHANIKA – EMELT
XI. 13.

[Videó: Eötvös-mérleg]

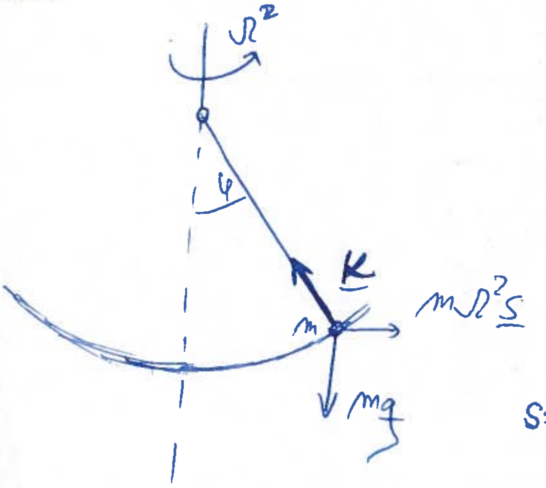
$$\underline{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\underline{r}}{r} \qquad \underline{F} = m\underline{a}$$

└ súlyos és tehetetlen tömeg ekvivalenciája

Eötvös-inga

$$\underline{F} = m_s g + m_t \omega^2 \underline{s}$$

[Kilendülő fizikai inga – kísérlet]



$s = \ell \cdot \sin\varphi$

$$m a_\varphi = m l \ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + m\Omega^2 l \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi\cos\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin\varphi + \Omega^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi =: f(\varphi)$$

Egyensúlyi helyzet: $\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \sin\varphi\left(\Omega^2\cos\varphi - \omega_0^2\right) = 0$

I $\quad \sin\varphi_e = 0 \Rightarrow \varphi_{e,1} = 0$

II $\quad \Omega^2\cos\varphi_e - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_{e,2} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$ $\quad$ Nincs mo. ha $\Omega < \omega_0$

MECHANIKA – EMELT

XI. 13.

$$f(\varphi_0+\Delta\varphi) = \cancel{f(\varphi_0)} + \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}\Delta\varphi$$

$$\ddot\varphi = (\varphi_0+\Delta\varphi)^{\cdot\cdot} = \Delta\ddot\varphi = \boxed{\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi_0}}\Delta\varphi$$

$-\omega^2$

↳ Lineáris stabilitás analízis

$$f'(\varphi) = -\omega_0^2\cos\varphi + \Omega^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = -\omega_0^2\cos\varphi + \Omega^2(2\cos^2\varphi - 1)$$

$$f'(0) = -\omega_0^2 + \Omega^2 = \Omega^2 - \omega_0^2$$

$-\omega^2$

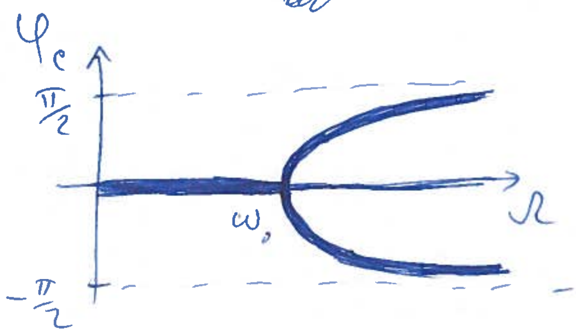
Ha $\Omega < \omega_0$ $\quad f'(0) < 0$ stabil

Ha $\Omega > \omega_0$ $\quad f'(0) > 0$ instabil

$$f'(\varphi_{e1,2}) = -\omega_0^2\cdot\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} + \Omega^2\left(2\frac{\omega_0^4}{\Omega^4} - 1\right) = -\frac{\omega_0^4}{\Omega^2} + \frac{2\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2} =$$

$$= \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{\Omega^2} < 0$$ (amikor létezik ez az egyensúlyi helyzet)

$-\omega^2$



Sok tömegpontból álló rendszer

→ Szuperpozíció elve

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \underline{K}_{ij} \qquad \underline{K}_{ii} = 0$$

↳ molekula dinamika

$$\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i + \cancel{\sum_{i,j} \underline{K}_{ij}}$$

$$\sum_{i,j} \underline{K}_{ij} \overset{NIII.}{=} -\sum_{ij} \underline{K}_{ji} \overset{\text{átjelölés}}{=} -\sum_{ij} \underline{K}_{ij} = 0$$

$$\boxed{\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_i \underline{F}_i}$$

$$M := \sum_i m_i$$

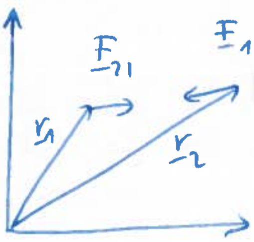
$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{M} \quad \leftarrow \text{tömegközéppont}$$

$$\dot{\underline{r}}_0 = \underline{v}_0 = \frac{\sum_i m_i \underline{v}_i}{M} = \frac{\sum_i \underline{p}_i}{M} \Rightarrow M \underline{v}_0 = \sum_i \underline{p}_i$$

$$\ddot{\underline{r}}_0 = \dot{\underline{v}}_0 = \underline{a}_0 = \frac{\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i}{M}$$

$$M \underline{a}_0 = \sum_i \underline{F}_i \qquad \frac{d}{dt}\left(\sum_i \underline{p}_i\right) = \sum_i \underline{F}_i$$

↳ Az összimpulzust csak a külső erők eredője változtathatja meg.



$\underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$

↑ direkt $\underline{r}$ függés nincs.

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= -\underline{F}_{12}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \end{aligned}\right\} \quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = M \ddot{\underline{r}}_0 = 0$$

MECHANIKA – EMELT
XI. 19.

$$\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\underline{F}_{12}\,(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} \qquad \left(m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)$$

↳ redukált tömeg

$$m^* \cdot \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}\,(\underline{r})$$

$$\underline{r} := \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

↳ relatív koordináta

Kísérlet: légpárnás asztalon két rugóval összekötött, azonos tömegű test.

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12}\,(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$
$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{F}_{12}\,(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$

$$\Rightarrow \quad M\ddot{\underline{r}}_0 = 0, \qquad m^* \ddot{\underline{r}} = \underline{F}_{12}\,(\underline{r})$$

2 új kvázirészecske

Gravitációs erőtér:

$$m^* \cdot \ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\underline{r}}{r}$$

$$\ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

Korábban:

$$\ddot{\underline{r}} = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

↳ Az ellipszis pályája egzakt eredmény, akkor is az lesz, ha a Nap mozog

↳ elektron kering a proton körül – pici különbség az energiában a redukált tömeg körül

↳ [illegible]

MECHANIKA – EMELT
XI. 19.

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i + \sum_j \underline{K}_{ij} \qquad / \underline{r}_i \times$$

$$\underbrace{\underline{r}_i \times m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{} = \underbrace{\underline{r}_i \times \underline{F}_i}_{} + \sum_j \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}$$

$$\frac{d\underline{N}_i}{dt} = \underline{M}_i + \sum_j \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij} \qquad / \sum_i$$

$$\dot{\underline{N}} = \sum_i \underline{M}_i + \sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij} \overset{\text{VIII}}{=} -\sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ji} = -\sum_{i,j} \underline{r}_j \times \underline{K}_{ij}$$

$$\sum_{i,j} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{K}_{ij} - \sum_{ij} \underline{r}_j \times \underline{K}_{ij}\right] = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \times \underline{K}_{ij} =$$

Centrális belső erők: $\underline{K}_{ij} \parallel \underline{r}_i - \underline{r}_j$

$= 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M} = \sum_i \underline{M}_i}$$

(Ha eltolom a koordinátarendszer kezdőpontját, megváltoznak az egyenletben szereplő mennyiségek.

MECHANIKA – EMELT
XI. 20

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i \qquad \underline{N} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times m\underline{v}_i$$

$$\underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\rho}_i \qquad \underline{v}_i = \underline{v}_0 + \dot{\underline{\rho}}_i$$

$$\underline{N} = \sum_i (\underline{r}_0 + \underline{\rho}_i) \times m_i(\underline{v}_0 + \dot{\underline{\rho}}_i) = \underline{r}_0 \times M\underline{v}_0 + \cancel{\left(\sum m_i \underline{\rho}_i\right)} \times \underline{v}_0 +$$

$$+ \underline{r}_0 \times \cancel{\left(\sum_i m_i \dot{\underline{\rho}}_i\right)} + \sum_i \underline{\rho}_i \times (m_i \dot{\underline{\rho}}_i)$$

A TKP sebessége a TKP-i rendszerben nulla

$$\underline{N} = \underline{r}_0 \times M\underline{v}_0 + \sum_i \underline{\rho}_i \times (m_i \dot{\underline{\rho}}_i) = \underline{r}_0 \times M\underline{v}_0 + \underline{N}_S$$

saját impulzusmomentum – $\underline{N}_s$

pálya impulzusmomentum.

A másik oldal:

$$\sum_i \underline{M}_i = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_i (\underline{r}_0 + \underline{\rho}_i) \times \underline{F}_i =$$

$$= \underline{r}_0 \times \left(\sum_i \underline{F}_i\right) + \underbrace{\sum_i \underline{\rho}_i \times \underline{F}_i}_{\underline{M}_i'}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \cancel{\underline{v}_0 \times M\underline{v}_0} + \underline{r}_0 \times M\ddot{\underline{r}}_0 + \frac{d\underline{N}_S}{dt} = \underline{r}_0 \times \left(\sum_i \underline{F}_i\right) + \sum_i \underline{M}_i'$$

$$\boxed{\frac{d\underline{N}_S}{dt} = \sum_i \underline{M}_i'}$$

← Meglepő, mert a TKP-i rendszer nem inerciarendszer.

MECHANIKA – EMELT

XI. 20.

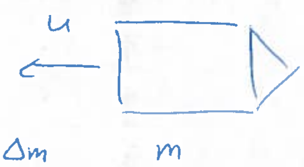
$$m_i \ddot{r}_i = F_i + \sum_{j=1}^{N} K_{ij}$$

$$m_i v_i \cdot a_i = v_i F_i + \sum_{j=1}^{N} v_i K_{ij} = P_i + \sum_{j=1}^{N} v_i K_{ij}$$

$$\Delta E^{i}_{kin} = W_i^{k} + \sum_{j=1}^{N} W_{ij}^{b}$$

Ha csak kényszererők vannak, akkor $\sum_{ij} W_{ij}^{b} = 0$

Kísérlet: rakétakísérletek



$$m\Delta v - \Delta m u = 0$$

de a Δm negatív, mert Δm a rakéta tömegének megváltozását jelöli

A rakéta koordinátarendszerében $\rightarrow$ $m\Delta v + \Delta m u = 0$ $(\Delta m < 0)$

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}$$

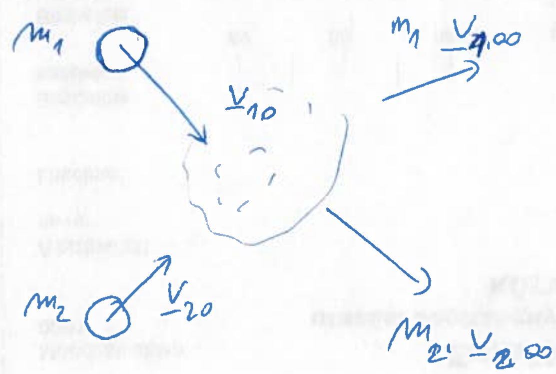
$$\int_{m_0}^{m} \frac{dv}{dm}\, dm = -\int_{m_0}^{m} \frac{u}{m}\, dm$$

$$v - v_0 = -u \cdot \ln\frac{m}{m_0} = u \ln\frac{m_0}{m}$$

$$v(m) = v_0 + u \cdot \ln\frac{m_0}{m}$$

$\hookrightarrow$ Az idő implicit módon, az m-en keresztül jelenik meg

Ütközések



6 adatot szeretnénk kiszámolni

3 – impulzusm.

1 – energiamegm.

↳ 2 mennyiség fog függeni a kölcsönhatástól.

TKP-i rendszer:

$$\mathring{\underline{v}}_1 = \underline{v}_1 - \frac{m_1 \underline{v}_{10} + m_2 \underline{v}_{20}}{m_1 + m_2} = \underline{v}_1 - \frac{m_1 \underline{v}_1 + m_2 \underline{v}_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{\underline{v}_1 - \underline{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

$$\mathring{\underline{v}}_2 = \underline{v}_2 - \frac{m_1 \underline{v}_{10} + m_2 \underline{v}_{20}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 \mathring{\underline{v}}_1 &= m^*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \\ m_2 \mathring{\underline{v}}_2 &= -m^*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \end{aligned}\right\}$$

A TKP-i rendszerben a 2 test összimpulzusa nulla.

MECHANIKA - EMELT

XI. 26.

$$\dot{\underline{\rho}}_1 = \underline{v}_1 - \frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

$$\dot{\underline{\rho}}_2 = \underline{v}_2 - \frac{m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)$$

$$m_1\dot{\underline{\rho}}_1 = m^*(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = p_1^t$$

$$m_2\dot{\underline{\rho}}_2 = m^*(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = p_2^t = -p_1^t$$

Energia: $\frac{m}{2}v^2 = \frac{1}{2m}p^2$

$$\underbrace{\frac{1}{2m_1}p_{01}^{t\,2} + \frac{1}{2m_2}p_{02}^{t\,2}}_{} = \frac{1}{2m_1}p_{\infty 1}^{t\,2} + \frac{1}{2m_2}p_{\infty 2}^{t\,2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_{01}^{t\,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_{\infty 1}^{t\,2}$$

$$\frac{1}{2m^*}p_{01}^{t\,2} = \frac{1}{2m^*}p_{\infty 1}^{t\,2}$$

$$\Downarrow \quad |p_{\infty 1}^t| = |p_{01}^t|$$

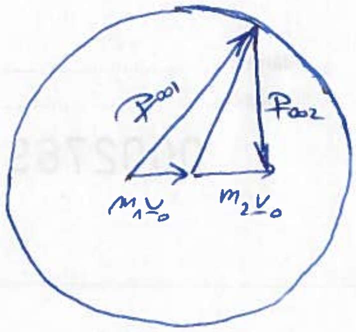
$$p_{01}^t = m^*(\underline{v}_{01} - \underline{v}_{02})$$

$$p_{\infty 1}^t = m^* |\underline{v}_{01} - \underline{v}_{02}| \; \underline{n}$$

2 szabad paraméter az ütközési paraméter

$$P_{\infty 1} = m^* |\underline{v}_{01} - \underline{v}_{02}| \underline{n} + m_1 \frac{m_1 \underline{v}_{01} + m_2 \underline{v}_{02}}{m_1 + m_2}$$

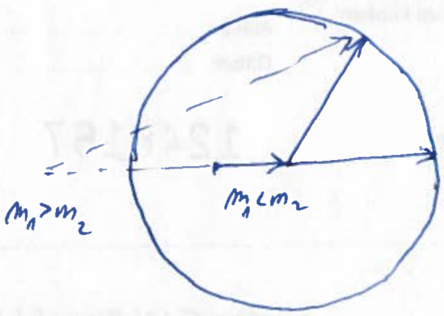
$$P_{\infty 2} = -m^* |\underline{v}_{01} - \underline{v}_{02}| \underline{n} + m_2 \underbrace{\frac{m_1 \underline{v}_{01} + m_2 \underline{v}_{02}}{m_1 + m_2}}_{\underline{v}_0}$$



$$\underline{\underline{v}_{02} = 0} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_0 = \frac{m_1 \underline{v}_{01}}{m_1 + m_2}$$

$$m_2 \underline{v}_0 = m^* \underline{v}_{01}$$

$$\Downarrow$$

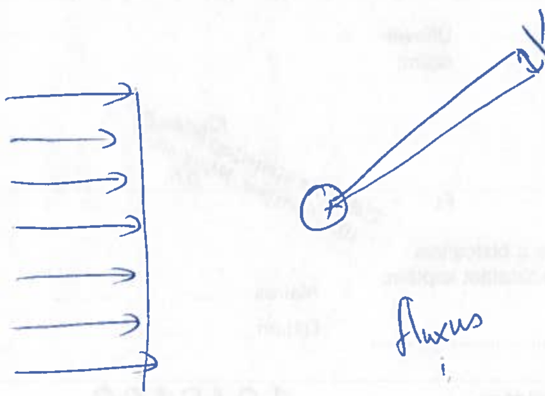


$m_1 < m_2$: körön belül

$m_1 > m_2$: körön kívül → van határszög

$m_1 = m_2$: körön → derékszögű

Hatáskeresztmetszet



└ Δn - egységnyi idő alatt detektált részecskék száma

$[\Delta n] = \frac{1}{s}$

n_0 - egységnyi felületen egységnyi idő alatt kijött részecskék $[n_0] = \frac{1}{m^2 s}$

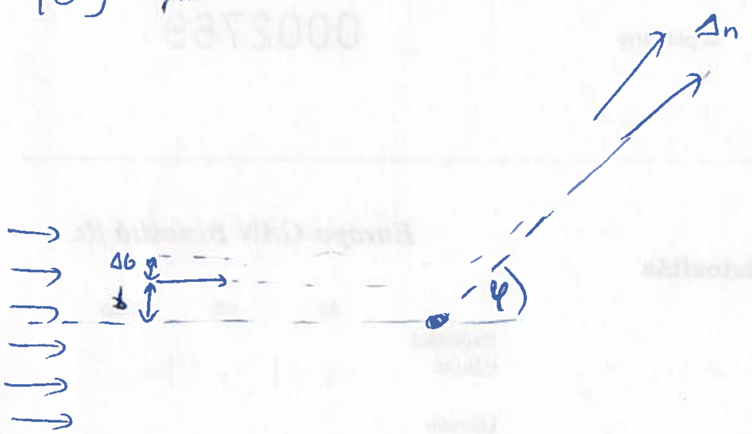
MECHANIKA – EMELT
XI. 26.

$\Delta\sigma = \frac{\Delta n}{n_0}$ – differenciális hatáskeresztmetszet $[\Delta\sigma] = m^2$

$\{\sigma\}$ = teljes hatáskeresztmetszet

↳ Az szórodott részecskék aránya.

$[\sigma] = m^2$



$$\Delta n = 2\pi b \Delta b \cdot n_0$$

$$\Delta\sigma = 2\pi b \Delta b$$

$$b(\varphi) \qquad \Delta b = \frac{db}{d\varphi} \cdot \Delta\varphi$$

$$\Delta\sigma = 2\pi b(\varphi) \frac{db}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{b(\varphi)\frac{db}{d\varphi}}{\sin\varphi} \Delta\Omega$$

térszög $\Delta\Omega = 2\pi \sin\varphi \, \Delta\varphi$

↳ Rutherford kísérletben a $b(\varphi)$-t kimérték és ez az $1/r$-es kölcsönhatásra volt jellemző

↳ csak véletlen, hogy az $1/r$-re a klasszikus és a kvantumos szórásszámolás ugyanazt az eredményt adja.

Merev test

Tetszőleges 2 pontjának nem változik meg a távolsága. – Ez egy közelítés.

MECHANIKA – EMELT
XI. 26.

Hány adattal lehet jellemezni egy merev test mozgását?

3 pont (9 adat) biztosan elég

De a 3 távolság fix: $3 \times 3 - 3 = 6$ független adat

$$M \ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \quad ; \quad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

3 egy. + 3 egy. $\Rightarrow$ 6 egyenlet elegendő

$$\Delta \underline{r} = \Delta \underline{r}_0 + \Delta \underline{\varphi} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$\frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \underline{r}_0}{\Delta t} + \frac{\Delta \underline{\varphi}}{\Delta t} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$$

$$\boxed{\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)}$$

mozgás = transzláció + rotáció

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i$$

Ha ezt a tömegközéppontra írjuk fel.

$$\dot{\underline{\varrho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i$$

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{\varrho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i)$$

↳ $\underline{N}_s$ lineáris fv-e az $\underline{\omega}$-nak.

$$\underline{N}_s = \hat{\Theta} \, \underline{\omega}$$ ← $\underline{N}_s$ és $\underline{\omega}$ nem feltétlenül egyirányú.

↳ tehetetlenségi nyomaték tenzor.

MECHANIKA - ÉTELT
XI. 27.

$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$

$\dot{\underline{\varrho}}_i = \underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i$

$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i =$

$= \sum_{i=1}^{N} \underline{\varrho}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i) = \hat{\Theta} \underline{\omega}$

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\underline{b})\underline{c}$

$$\underline{N}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\underbrace{(\underline{\varrho}_i \underline{\varrho}_i)\underline{\omega}}_{(\underline{\varrho}_i\underline{\varrho}_i)\hat{\underline{I}}\underline{\omega}} - \underbrace{(\underline{\varrho}_i \underline{\omega})\underline{\varrho}_i}_{(\underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i)\underline{\omega}} \Big) = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left((\underline{\varrho}_i \underline{\varrho}_i)\hat{\underline{I}} - \underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i \right) \right]}_{\hat{\Theta}} \underline{\omega}$$

$\underline{\varrho}_i =: (x_i, y_i, z_i)$

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

↳ szimmetrikus mátrix ⇒ sajátértékei valósak

$\underline{A} \hat{\Theta} \underline{A} \geq 0$ ← pozitív definit

---

$\underline{N}_s = \hat{\Theta} \underline{\omega}$

MECHANIKA - EMELT
XI. 27.

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\Theta}\,\underline{\omega}\right) = \frac{d}{dt}\hat{\Theta}\cdot\underline{\omega} + \hat{\Theta}\cdot\frac{d}{dt}\underline{\omega}$$

$$\frac{d\underline{N}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'$$

most a TKP.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{v}_0 + \underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\left(\underline{v}_0 + \underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right) = \Big| \underline{v}_i = \underline{v}_0 + \underline{\omega}\times\underline{\rho}_i$$

$$= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_0\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right) =$$

$$\sum_i m_i \underline{\rho}_i = 0 \qquad \underline{c}\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right) = \underline{\omega}\left(\underline{\rho}_i\times\underline{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \underline{\omega}\left(\underline{\rho}_i\times\left(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_i\right)\right) = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{N}_s = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\hat{\Theta}\underline{\omega}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{N}_s = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\underline{\omega}\hat{\Theta}\underline{\omega}}$$

>0, mert $\hat{\Theta}$ pozitív definit

forgási energia

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i' \qquad \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i'$$

← Ha az összegek ugyanazok, akkor a test ugyanúgy fog mozogni.

↳ Az erő a hatásvonala mentén eltolható.

↳ Mikor lehet egy erőrendszert egy erővel helyettesíteni?

MECHANIKA – EMELT

XI. 27.

$\sum_i \underline{F}_i \quad \perp \sum_i \underline{M}_i$

$\underline{F} \,, \quad \underline{r} \times \underline{F}$

↳ $\underline{F}(\underline{r}\times\underline{F}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_i \underline{F}_i\right)\left(\sum_i \underline{M}_i\right) = 0$ ez ~~ezz~~ nem feltétlenül igaz.

Testek gravitációs erőtérben

$$\underline{F} = M\underline{g}$$

$$\underline{M} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times (m_i \underline{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i\right)}_{M\underline{r}_0} \times \underline{g} = \underline{r}_0 \times M\underline{g}$$

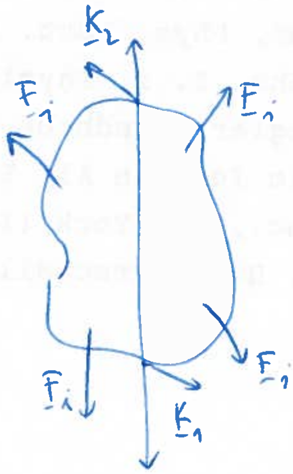
Ha nem homogén az erőtér, akkor ez a levezetés nem jó.

↳ súlypont ≠ töm

↳ kísérletek: egyszerű gépek

– erő erőpár hatása testre

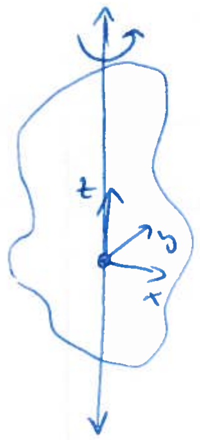
Rögzített tengely körüli forgás



3 + 3 egyenlet, de csak 1 szabadsági fok.

↳ A forgatónyomaték tengelyirányú komponenseiben nem szerepelnek a kényszererők.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_z}$$



$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

$$\boxed{\frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}}$$

$$\left(\underline{N}_S = \hat{\Theta}\underline{\omega} \qquad \underline{N}_S = \sum_{i=1}^{N} \underline{\rho}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{\rho}_i) \right)$$

Ne a TKP-re írjuk fel, hogy $\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \underline{r}_0)$, hanem a tengely egy pontjára:

$$\underline{v} = \cancel{\underline{v}_0} + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \cancel{\underline{r}_0}) = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\underline{N} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r}_i \times (m_i \underline{\omega} \times \underline{r}_i) = \hat{\Theta}^* \underline{\omega} \qquad \underline{\omega} = (0, 0, \omega) \Rightarrow N_z = \Theta^*_{zz}\omega$$

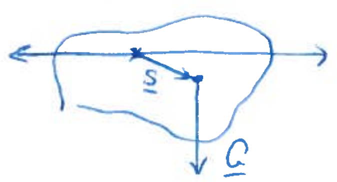
$$\Theta^*_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{(x_i^2 + y_i^2)}_{\ell_i^2}$$ ← ez állandó az időben

Így $\Theta^*_{zz} = \text{áll.}$

$$\frac{dN_z}{dt} = \Theta^*_{zz}\frac{d\omega}{dt} = \Theta^*_{zz}\beta = \Theta^*_{zz}\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}$$

Fizikai inga

$$M_z = -s \cdot G \cdot \sin\varphi$$

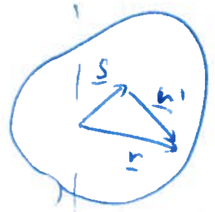


z most vízszintes

$$\Theta^*_{zz}\ddot{\varphi} = -sG\sin\varphi \approx -sG\varphi$$

(Kísérlet: alapkísérlet + belső fizikai inga) $\omega_0^2 = \frac{sG}{\Theta^*} = \frac{sMg}{\Theta^*}$

Steiner - tétel



$$\underline{r} = \underline{s} + \underline{r}'$$

$$\Theta_{zz}^{*} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[(x_i' + s_1)^2 + (y_i' + s_2)^2 \right] =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2\right)}_{\Theta_{zz}} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \underbrace{\left(s_1^2 + s_2^2\right)}_{\ell^2} + \underbrace{\cancel{2\left(\sum_{i=1}^{N} m_i x_i'\right)}}_{0} s_1 + \dots$$

$$\Theta_{zz}^{*} = \Theta_{zz} + M\ell^2$$

$$\Theta_{zz} = \underline{n}\,\hat{\Theta}\,\underline{n}$$

└ z irányú

[kísérlet: forgózsámolyos kísérletek]

Merev test síkmozgása

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_i \underline{M}_i$$

└ 3 db. szabadsági fok.

Van 3 egyenlet, melyben a kényszererő nem jelenik meg

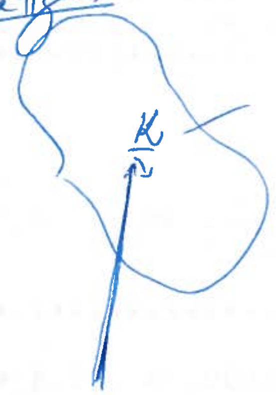
$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i \Big|_{x,y} \qquad \frac{dN_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{iz}$$

$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega) \longrightarrow N_z^s = \Theta_{zz}\,\omega \qquad \left\{ \quad \frac{dN_z^s}{dt} = \Theta_{zz}\,\beta = \sum M_{iz} \right.$$

A forgatónyomatékokat a TKP-ra kell felírni.

[kísérlet: leguruló henger + abroncs, lejtőre felguruló test, láncugratás

Pörgettyű



[kísérlet: súlytalan pörgettyű]

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \qquad \frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

3 szabadsági fok van.

$$\underline{v} = \underline{r}_0 \cancel{v_0} + \underline{\omega} \times (\underline{r} - \cancel{r_0}) \qquad \underline{N} = \hat{\Theta}^* \underline{\omega}$$

ez függ az időtől

$$\underline{N}(t) = \hat{\Theta}^*(t) \cdot \underline{\omega}(t)$$

Testhez rögzített koordinátarendszer

$$\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{d'\underline{A}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{A}$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \frac{d'\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \sum_i \underline{M}_i$$

MECHANIKA - EMELT
XII. 4.

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

$$\underline{N} = \hat{\Theta}\underline{\omega}$$

mindkettő időfügg.

Forgó koordinátarendszerben: $\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{d'\underline{A}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{A}$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{N} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i$$

$$\underline{N} = \hat{\Theta}\underline{\omega}$$

ez már nem függ az időtől.

Olyan koordinátarendszert választok, melyben Θ diagonális

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dN_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = M_1 \qquad \Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = M_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = M_2 \qquad \Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = M_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = M_3 \qquad \Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2(\Theta_2 - \Theta_1) = M_3$$

$\Downarrow$

ω-ban nemlineáris egyenletek,
nagyon bonyolult

Erőmentes pörgettyű: $\underline{M}=0$

$$\frac{d\underline{N}}{dt}=0 \qquad \underline{N}=\text{áll.} \Leftarrow \text{Az inerciarendszerben.}$$

és
$$\Theta_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\omega_3(\Theta_3-\Theta_2)=0$$
$$\Theta_2\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\omega_3(\Theta_1-\Theta_3)=0$$
$$\Theta_3\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_1\omega_2(\Theta_2-\Theta_1)=0$$

↳ szimmetrikus pörgettyű: 2 Θ megegyezik: $\Theta_1=\Theta_2$

↳ $$\frac{d\omega_3}{dt}=0 \Rightarrow \omega_3=\text{áll.}$$

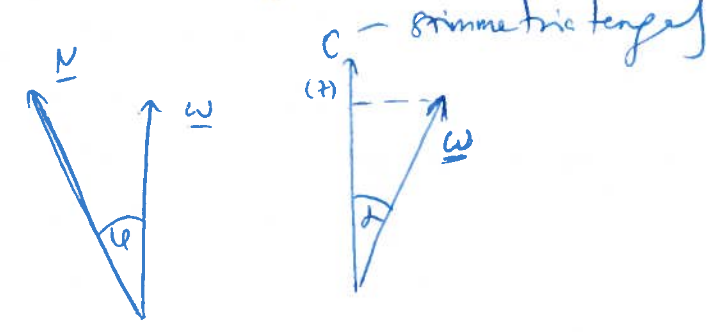
↳
$$\Theta_1\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_3-\Theta_1)=0$$
$$\Theta_1\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_1\omega_2\omega_3(\Theta_1-\Theta_3)=0$$

$$\Theta_1\left(\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}\right)=0$$

$$\frac{\Theta_1}{2}\frac{d}{dt}(\omega_1^2+\omega_2^2)=0 \Rightarrow \omega_1^2+\omega_2^2=\text{áll.}$$

↳ A forgás nem tud lelassulni vagy felgyorsulni $|\underline{\omega}|=\text{áll.}$

$$E_{kin}=\frac{\underline{\omega}\,\underline{N}}{2}=\text{áll}$$



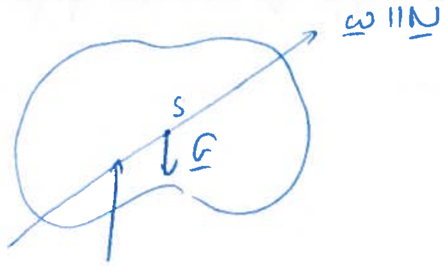
[kísérlet: fixes pörgettyűk]

Fixes pörgettyű

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M} \rightarrow \frac{dN_z}{dt} = 0$$

$$\downarrow$$

$$N_z = \text{áll.}$$

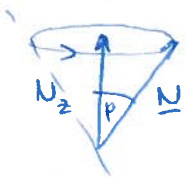


$$\underline{N}\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{N}\,\underline{M}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(N^2\right) = \underline{N}\,\underline{M}$$

— és a forgástengely körül pörgettem meg

Ha gyorsan forog $\underline{\omega} \parallel \underline{N}$, $\underline{M} \perp \underline{N} \Rightarrow |\underline{N}| = \text{áll.}$



[kísérletek: vicces pörgettyűk + szabad tengely stabilitása]

MECHANIKA - ELMÉLET
XII. 10.

$$\Theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

$$\Theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\Theta_2 - \Theta_3) = 0$$

$\underline{\omega}_0 = (0, 0, \omega_3)$ $\leftarrow$ egy mo.

Kis perturbáció $\underline{\omega} = (\delta\omega_1, \delta\omega_2, \omega_0 + \delta\omega_3)$

$$\Theta_1 \frac{d\,\delta\omega_1}{dt} + \delta\omega_2 \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) = 0$$

$$\Theta_2 \frac{d\,\delta\omega_2}{dt} + \delta\omega_1 \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) = 0$$

$$\cancel{\Theta_3 \frac{d\,\delta\omega_3}{dt} + 0 (\Theta_2 - \Theta_3) = 0} \Rightarrow \delta\omega_3 = \text{const}$$

$$\begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Theta_1 \delta\omega_1 \\ \Theta_2 \delta\omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda \begin{pmatrix} \Theta_1 \delta\omega_1 \\ \Theta_2 \delta\omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = 0$$ $\rightarrow$ sajátérték egyenlet

$$\begin{pmatrix} \lambda\Theta_1 & \omega_0 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ \omega_0 (\Theta_1 - \Theta_3) & \lambda\Theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 \Theta_1 \Theta_2 = \omega_0^2 (\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_1 - \Theta_3)$$

Ha $\omega_0^2(\Theta_3-\Theta_2)(\Theta_1-\Theta_3)\leq 0 \Rightarrow \lambda$ tisztán képzetes

↳ stabil

↳ Ez mikor lehet?:

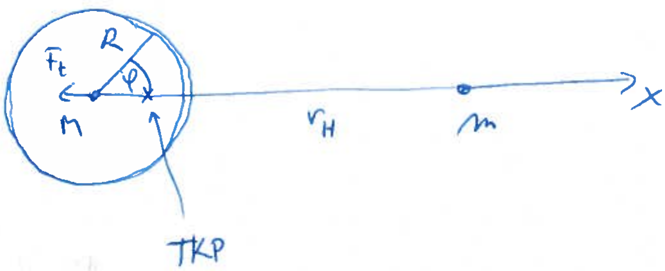
→ Ha Θ_3 a legnagyobb.

→ Ha Θ_3 a legkisebb.

[kísérlet: a középső Θ instabil - ~~kísérletezés~~ téglatest feldobva]

[lineáris stabilitás analízis

Árapály



↳ Földhöz rögzített koordinátarendszer.

$$F_t = \gamma \frac{m \cancel{M} m_p}{|r_H|^2} \qquad V_t = \gamma \frac{m \cancel{M} m_p}{r_H^2} x = \gamma \frac{m \cancel{M} m_p}{r_H^2} R \cdot \cos\varphi$$

próbatest

tehetetlenségi erő

$$V_g = -\gamma \frac{M m_p}{R} - \gamma \frac{m m_p}{\sqrt{R^2 + r_H^2 - 2 R r_H \cos\varphi}}$$

MECHANIKA – EMELT
XII. 10.

$$V(R,\varphi) = \gamma \frac{m m_p}{r_H^2} R\cos\varphi - \gamma \frac{M m_p}{R} - \gamma \frac{m\, m_p}{\sqrt{R^2 + r_H^2 - 2Rr_H\cos\varphi}}$$

!

$r_H > R$

$$-\gamma \frac{m m_p}{r_H} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{r_H^2} - 2\frac{R}{r_H}\cos\varphi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

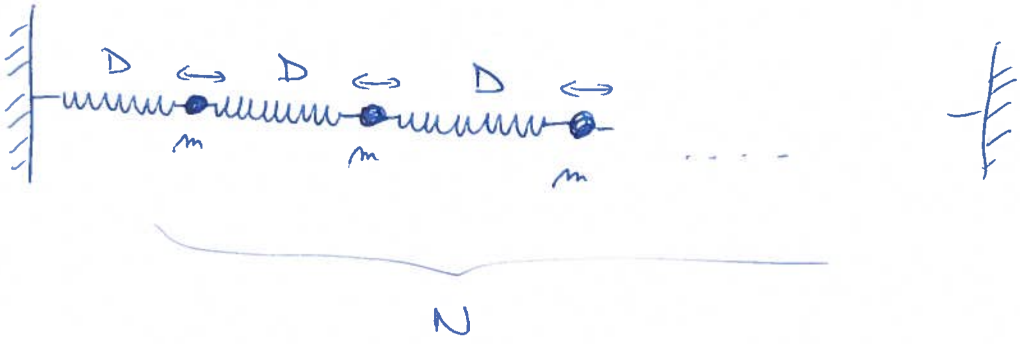
$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{r_H^2} - 2\frac{R}{r_H}\cos\varphi}} \approx 1 - \frac{R^2}{2r_H^2} + \frac{R}{r_H}\cos\varphi + \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{r_H^2} - 2\frac{R}{r_H}\cos\varphi\right)^2$$

$$V(R,\varphi) = \cancel{\gamma \frac{m m_p}{r_H^2} R\cos\varphi} - \gamma \frac{M m_p}{R} - \gamma \frac{m m_p}{r_H} + \gamma \frac{m m_p}{r_H} \cdot \frac{R^2}{2r_H^2} \cancel{- \gamma \frac{m m_p}{r_H} \cdot \frac{R}{r_H}\cos\varphi} -$$

$$\underbrace{- \gamma \frac{m m_p}{r_H} \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{r_H^2} - 2\frac{R}{r_H}\cos\varphi\right)^2}_{\text{ebben van a } \varphi}$$

$$V(R,\varphi) = V_0(R) - \gamma \frac{m m_p}{r_H} \frac{3}{8}\, 4 \frac{R^2}{r_H^2} \cos^2\varphi$$

Lineáris lánc



1. mozgásegyenlet:

$$m\ddot{u}_i = D(u_{i+1}-u_i) + D(u_{i-1}-u_i)$$

$$\boxed{\ddot{u}_i = \omega_0^2\left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right)} \qquad j^2=-1$$

$$u_i(t) = A_i e^{j\omega t}$$

$$-\omega^2 A_i \cancel{e^{j\omega t}} = \omega_0^2 \cancel{e^{j\omega t}}\left(A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}\right)$$

$$-\omega^2 A_i = \omega_0^2\left(A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}\right)$$

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} \cdot \omega_0^2$$

periodikus határfeltétel.

$$A_i = A_0 e^{jiq}$$

$$-\omega^2 A_0 e^{jiq} = \omega_0^2 A_0\left(e^{j(i+1)q} - 2e^{jiq} + e^{j(i-1)q}\right) =$$

$$= \omega_0^2 A_0\left(e^{jq} - 2 + e^{-jq}\right) e^{jiq}$$

$$-\omega^2 = \omega_0^2\left(e^{jq} + e^{-jq} - 2\right) = -\omega_0^2 2\left(1-\cos q\right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 \cdot 2\left(1-\cos q\right)}$$ ← diszperziós reláció.

$$\Downarrow \quad u_i(t) = A_0 e^{j(\omega t + iq)}$$

$$u_i(t) = |A_0| \cdot \cos\left(\omega t + iq + \varphi_0\right)$$

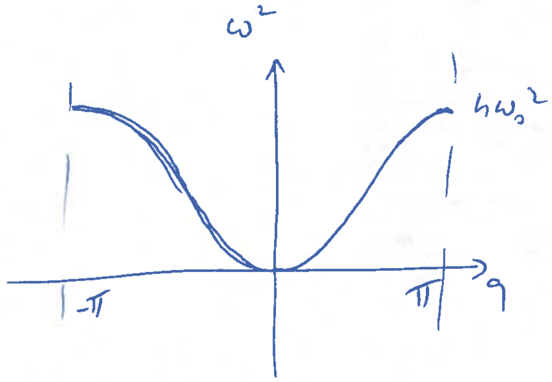
hullám.

$$v_0(t) = A_0 e^{j\omega t} = A_0 e^{j(\omega t + Nq)}$$

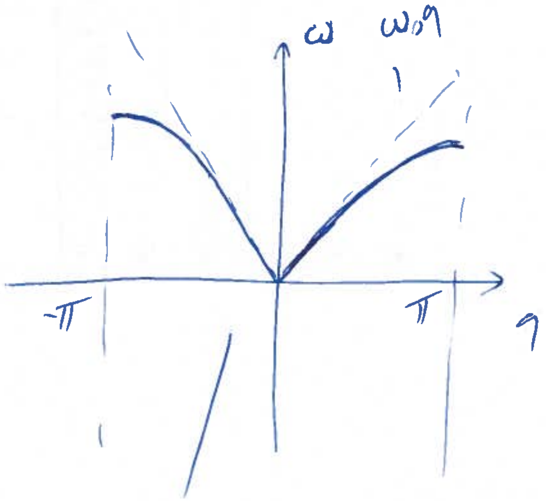
$$e^{jNq} = 1 \Rightarrow Nq = n2\pi$$

$$q = n\frac{2\pi}{N} \qquad 0 \le n < N$$

$$1 - \cos q \approx \frac{q^2}{2}$$



$\Rightarrow$



0 tömegű bozon