Matematikai módszerek a fizikában gyakorlófeladatok, példák

Nagy Márton

2018. május 22.

Kb. leírom a megoldásokat is. **Kérem**, hogy NE csak "elolvassuk", hanem számolással kövessük a megoldásokat! Még egyszer: **nagyon kérek** mindenkit, hogy papírral az asztalon, tollal a kezében olvassa, és kövesse!
A könnyített ZH-n könnyűek lesznek; itt leírok nehezebbeket is, hogy gyakorolhassunk!

Ortogonális koordinátarendszerek

1.) Tekintsük az x–y sík $x>0$, $y{>}0$ negyedsíkját (e feladatban a továbbiakban mindenhol). A koordináták „fizikai dimenziója" méter, m.) Ha $a>0$ egy m^2 dimenziójú állandó, akkor az $xy{=}a$ egyenletet kielégítő x, y koordinátájú pontok egy egyenlőszárú hiperbolán vannak, melynek aszimptotái az x illetve az y tengely. Legyen b szintén egy m^2) dimenziójú állandó, akár pozitív, akár negatív. Tekintsük most az olyan pontokat, amelyekre igaz, hogy $y^2{-}x^2{=}2b$ (és ugye $x{>}0$, $y{>}0$). Ezek a pontok is egy hiperbolán vannak, ami szintén egyenlőszárú, és aszimptotái az $y{=}x$, illetve az $y=-x$ egyenesek (de csak az $x{=}y$ aszimptota esik a vizsgált síknegyedbe.)

- (mielőtt továbbmennénk:) Rajzoljuk fel az x–y síkot, és néhány (mondjuk 2 db) $a{>}0$ értékre rajzoljuk fel az $xy{=}a$ egyenletű hiperbolákat, ezek után pedig két pozitív b és két negatív b értékre rajzoljuk fel az $y^2{-}x^2{=}2b$ egyenletű hiperbolákat az $x{>}0$, $y{>}0$ tartományon!
- Ha tehát adott az $a{>}0$ és a $b{\in}\mathbb{R}$ valós számok, az $x{>}0$, $y{>}0$ negyedsíkon az $xy{=}a$ és az $y^2{-}x^2{=}2b$ görbék (hiperbolák) pontosan egy (x,y) pontban metszik egymást. Ezért ezen a, b számpárt ezen pont görbevonalú koordinátáinak tekinthetjük. Fejezzük ki adott a, b esetén az általuk megadott pont x és y koordinátáit, és hozzuk egyszerű alakra a kapott képleteket!
- Írjuk fel az ívelemnégyzetet, hozzuk egyszerű alakra, és lássuk be, hogy az $a=$const és a $b=$const görbék mindig ortogonálisan metszik egymást, vagyis az a, b koordinátákból álló görbevonalú koordinátarendszer ortogonális! Tanács: amint lehet, egyszerűsítgessünk!
- Írjuk fel a h_a, h_b Lamé-féle mennyiségeket, és végül az $\mathbf{e}_{(a)}$, $\mathbf{e}_{(b)}$ egységvektorokat, melyek az a ill. a b vonalakra merőlegesek, az a, b koordináták függvényeként!

Az $x(a,b)$ és az $y(a,b)$ függvények kellenek: meg kell oldani az $xy{=}a$, $y^2{-}x^2{=}2b$ egyenletrendszert. Többféleképpen lehet, pl. egyszerűen kifejezzük mondjuk y-t a másodikból, és beírjuk az elsőbe, majd megoldjuk az x^2-re kapott másodfokú egyenletet:

$$y=\frac{a}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2}{x^2}-x^2=2b \quad\Rightarrow\quad x^4+2bx^2-a^2=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=-b\pm\sqrt{a^2{+}b^2} \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}.$$

Nyilván a másodfokú egyenlet „+" jelű gyökét kellett választani, hiszen $\sqrt{a^2{+}b^2}$ pozitív, és biztosan nagyobb $|b|$-nél; ezért csak a „+" jellel kapott x^2-érték lesz pozitív. Abból viszont gyököt vonhatunk, és a pozitívat választjuk, mert kikötöttük, hogy $x{>}0$. Az y-t is kifejezhetjük, hiszen $y=a/x$ volt. Itt viszont „kötelező észrevenni", hogy mivel a nevező $\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}$, ha $\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}$-vel bővítünk, a nevezőben a nagy gyök alatt két tag négyzetének a különbsége, éppen a^2 lesz, aminek a gyöke a, (egyértelműen, mivel $a{>}0$), majd ezzel egyszerűsítünk. Így tehát tetszetős alakban kapjuk a képleteket:

$$y=\frac{a}{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}}=\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}, \quad \text{azaz} \quad \begin{aligned} x&=\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b},\\ y&=\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}.\end{aligned}$$

Ez szép egyszerű alak, tényleg $y{>}0$, $x{>}0$ (ez gyors önellenőrzés). Ha $b{>}0$, akkor $y{>}x$, ha pedig fordítva, akkor fordítva.

Fel kell írni a $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2{+}\mathrm{d}y^2$ ívelemnégyzetet, $\mathrm{d}x$-et és $\mathrm{d}y$-t ki kell fejezni $\mathrm{d}a$-val és $\mathrm{d}b$-vel. Ehhez kellenek a $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ parciális deriváltak (ahol pl. a $\frac{\partial}{\partial a}$ azt jelenti, hogy úgy deriválunk a szerint, hogy b-t állandónak tartjuk). Konkrétan kiszámolva, és egyszerűsítgetve (emlékezve, hogy hogyan egyszerűsítettük y kifejezését), az alábbiakat kapjuk, amik mondjuk kb. elég egyszerűek:

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial b}=-\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial b}=\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}.$$

Ezután összerakva, amit össze kell:

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{d}b=\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}\mathrm{d}a-\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}\mathrm{d}b, \qquad \mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{d}b=\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}\mathrm{d}a+\frac{\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}}{2\sqrt{a^2{+}b^2}}\mathrm{d}b.$$

ebből

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2{+}\mathrm{d}y^2=\dots=\frac{\mathrm{d}a^2+\mathrm{d}b^2}{2\sqrt{a^2{+}b^2}} \quad\Rightarrow\quad h_a(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{a^2{+}b^2}}, \quad h_b(a,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{a^2{+}b^2}}, \quad \text{azaz a mostani esetben} \quad h_a=h_b.$$

Közös nevezőre hozva, stb. idáig lehet egyszerűsíteni. Fontos, hogy kiesett a keresztag, a $\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b$ szorzatot tartalmazó: tényleg ortogonális a koordinátarendszer. A fenti ívelemnégyzetből leolvashattuk a Lamé-féle mennyiségekeket is.

Kiszámolva az $a(x,y)$ és a $b(x,y)$ függvény gradienseit (ezek jele $\mathbf{t}_{(a)}$, $\mathbf{t}_{(b)}$), majd átírva x és y függvényéről a, b függvényeivé:

$$a(x,y)=xy \quad\Rightarrow\quad \mathbf{t}_{(a)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial x}\\ \frac{\partial a}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}\\ \sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{t}_{(a)}|=\sqrt{2\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$b(x,y)=\frac{1}{2}\left(y^2{-}x^2\right) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{t}_{(b)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial b}{\partial x}\\ \frac{\partial b}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}-b}\\ \sqrt{\sqrt{a^2{+}b^2}+b}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{t}_{(b)}|=\sqrt{2\sqrt{a^2+b^2}},$$

ebből a normált (kétkomponensű, azaz kétdimenziós) egységvektorok:

$$\mathbf{e}_{(a)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+b}\\ \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-b}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{(b)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-b}\\ \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+b}\end{pmatrix}.$$

2.) Tekintsük az x–y sík $x>0$, $y>0$ negyedsíkját (e feladatban mindenhol). Tekintsük azokat a köröket, amelyek átmennek az origón, és középpontjaik valahol az y tengely pozitív felén vannak: a középpont és az origó távolsága legyen egy adott ilyen körre a. (Ezek a körök tehát mind érintik az x tengelyt.) Tekintsük most azokat a köröket is, amelyek középpontja az x tengely mentén b távolságra van (pozitív irányban) az origótól, és átmennek az origón (azaz: az origóban érintik az y tengelyt). Két ilyen (egy a-val és egy adott b-vel jellemzett) kör az $x>0$, $y>0$ negyedsíkon az origón kívül pontosan egy pontban metszi egymást; az ilyen a-t és b-t tehát ezen pont görbevonalú koordinátáinak tekinthetjük. Feladatok, mint előbb:

- Rajzoljuk fel ezeket a kör-seregeket!
- Írjuk fel először az adott a-jú egyik fajta, ill. az adott b-jű másik fajta kör egyenletét, majd fejezzük ki adott x, y pont esetén az a és b mennyiségeket, és az x és y koordinátákat is, mint a és b függvényeit!
- Írjuk fel az ívelemnégyzetet, hozzuk egyszerű alakra, és lássuk be, hogy az a =const és a b =const körök mindig ortogonálisan metszik egymást.
- Írjuk fel a h_a, h_b Lamé-féle mennyiségeket, és az $\mathbf{e}_{(a)}$, $\mathbf{e}_{(b)}$ egységvektorokat az a, b koordináták függvényeként!

Most csak az eredményeket írom le. A körök egyenletei, ezekből (egyszerűsítve) az átszámítási képletek a, b-ről x, y-ra:

$$\begin{matrix} x^2+(y-a)^2=a^2 & \Leftrightarrow & x^2+y^2=2ay, \quad \text{ill.} \\ (x-b)^2+y^2=b^2 & \Leftrightarrow & x^2+y^2=2bx. \end{matrix}, \quad \text{ezekből} \quad \begin{matrix} a(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2y}, \\ b(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x}, \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x(a,b)=\frac{2ab}{a^2+b^2}a, \\ y(a,b)=\frac{2ab}{a^2+b^2}b. \end{matrix}$$

A deriváltakat kiszámítjuk, majd felírjuk az ívelemnégyzetet, amiből itt is kiesik a kereszttag (vagyis: tényleg ortogonális a koordinátarendszer, azaz a kör-seregek merőlegesen metszik egymást mindenhol), és leolvashatjuk a Lamé-féle mennyiségeket is:

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{4ab^3}{(a^2+b^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{2b^2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial b}=\frac{2a^2(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial b}=\frac{4a^3b}{(a^2+b^2)^2} \quad \Rightarrow \quad ds^2=dx^2+dy^2=$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{d}b\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{d}a+\frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{d}b\right)^2=\dots=\left(\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2\mathrm{d}a^2+\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)^2\mathrm{d}b^2, \quad \text{azaz} \quad h_a(a,b)=\frac{2b^2}{a^2+b^2}, \quad h_b(a,b)=\frac{2a^2}{a^2+b^2}.$$

Az a és b mennyiségek gradiensvektorai, azok normái, illetve ezekből a normált egységvektorok:

$$\mathbf{t}_{(a)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial x}\\ \frac{\partial a}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{y}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{b}\\ \frac{b^2-a^2}{2b^2}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{t}_{(a)}|=\frac{a^2+b^2}{2b^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{(a)}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}2ab\\ b^2-a^2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t}_{(b)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial b}{\partial x}\\ \frac{\partial b}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\\ \frac{y}{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2-b^2}{2a^2}\\ \frac{b}{a}\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{t}_{(b)}|=\frac{a^2+b^2}{2a^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{(a)}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a^2-b^2\\ 2ab\end{pmatrix}.$$

Fourier-transzformációk, sorok

1.) Számítsuk ki a következő $f(x)$ függvények Fourier-transzformáltját (az x változóban)!

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}, \qquad f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}, \qquad f(x)=\frac{1}{x^4+1},$$

$$f(x)=\frac{x}{x^4+1}, \qquad f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}, \qquad f(x)=\frac{1}{x^6+1}.$$

Válasz: Most a Fourier-transzformációt úgy definiálom, hogy $\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)e^{-i\omega x}$. A kijelölt feladatoknál mindnél ugyanúgy kell eljárni: felírni az $e^{-i\omega x}$-szel szorzott $f(x)$ integrálját $-\infty$-től ∞-ig, ezt pedig a reziduumtétellel kiszámítani. Meg kell keresni a nevezők pólusait, és attól függően, hogy $\omega>0$ vagy $\omega<0$, a komplex x síkon az alsó vagy a felső félsíkon vett nagy körrel kell bezárni a kontúrt. Vigyázat: a reziduumtételben pozitív körüljárás esetére igaz a képlet, negatív körüljárásnál -1-es szorzó van! A végén egységesen le lehet írni az $\omega>0$ és $\omega<0$ eseteket. Vigyázzunk az abszolútértékekkel! Az $e^z=\cos z+i\sin z$ képletet teljesen rutinszerűen ki-be írogatom időnként. A végeredmények:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=\frac{\pm i}{2}e^{-|\omega|}. \quad \text{(Itt + az előjel, ha } \omega>0\text{, és } -\text{, ha } \omega<0.)$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=e^{-|\omega|}e^{i\omega}.$$

$$f(x)=\frac{1}{x^4+1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}}\left(\sin\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}+\cos\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}\right).$$

$$f(x)=\frac{x}{x^4+1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=-\frac{i}{2}e^{-\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

$$f(x)=\frac{x^2}{x^4+1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}-\sin\frac{|\omega|}{\sqrt{2}}\right).$$

$$f(x)=\frac{1}{x^6+1} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\omega)=\frac{1}{6}\left\{e^{-|\omega|}+e^{-\frac{|\omega|}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|\right)\right]\right\}.$$

Variációszámítás: itt a legbonyolultabb nem is mindig az, hogy konkrétan felírjuk az egyenletet, hanem, hogy „megtaláljuk", hogy mit is akarunk kiszámolni. Segítséget is adok majd, a ZH-ban ennél többet is, mint most.

1.) Egy m_0 tömegű űrhajóban a benne működő fúziós reaktor a rendelkezésre álló üzemanyagból E_0 energiát tud előállítani, amit arra fordíthatunk, hogy az $M_0 - m_0$ tömegű hajtóanyagot az űrhajóhoz képest gyorsítjuk (kilőjük), így hajtjuk az űrhajónkat. (Tehát M_0 az eredeti, űrhajó+hajtóanyag menetkész tömege.) Mi választhatjuk meg, hogy mikor (azaz a még meglévő E energia függvényében) milyen sebességgel lőjük ki a hajtóanyagot; a feladat, hogy a lehető legnagyobb végsebessége legyen az m_0 tömegű űrhajónknak!

Válasz: A hajtás során fogy a maradék energia, E_0-tól 0-ig, és fogy az űrhajó tömege is, M_0-tól m_0-ig. Gondoljuk először végig: ha pl. az üzemanyag fogyása során mindig egyenletes sebességgel lőjük ki a hajtóanyagot, akkor elérünk valami végsebességet, de jobban megéri valószínűleg, ha eleinte több anyagot kilövünk kisebb sebességre gyorsítva azt (hogy már kevés energia elfogyasztásával is gyorsabban lecsökkenjen az űrhajó össztömege, és a végén már csak ezt a kisebb össztömeget kelljen tovább gyorsítani). Valószínűleg van tehát egy optimális $M(E)$ függvény: az út elején $M(E{=}E_0) = M_0$, a végén pedig $M(E{=}0) = m_0$. Meg kéne ezt találni.

Ha dE-t csökken az energia, akkor az űrhajó tömege $dM = \frac{dM}{dE}dE$-t csökken, és ezt a dM tömeget tudjuk tehát dE energiával felgyorsítani. Mekkora v sebességre? Nyilván (ugye, nyilván?!) $v = \sqrt{\frac{2\,dE}{dM}}$ sebességre, azaz a kilőtt impulzus $dp = \sqrt{2 \cdot dM \cdot dE}$, tehát az űrhajó sebességnövekménye: $dU = \frac{1}{M}dp = \frac{1}{M}\sqrt{2\,dE\,dM} = \frac{1}{M}\sqrt{2\frac{dM}{dE}}dE$. Az összes sebességnövekedés tehát $U = \int_{m_0}^{M} dM\,\frac{dU}{dM} = \int_0^{E_0} dE\,\frac{\sqrt{\frac{dM}{dE}}}{M}$. Fixáltuk tehát a problémát: keressük azt az $M(E)$ függvényt, amire:

$$M(E) = ?, \qquad \text{amire} \quad \int_0^{E_0} \frac{dE}{M(E)}\sqrt{2\frac{dM(E)}{dE}} = \text{max.}, \quad \text{úgy, hogy} \quad M(0) = m_0, \quad M(E_0) = M_0.$$

Innentől tehát egyszerű Lagrange-féle variációszámítási problémánk van: az ismeretlen függvény $M(E)$, deriváltját most $\frac{dM}{dE} \equiv M'(E)$ módon jelölve, beazonosíthatjuk a Lagrange-függvényt:

$$L(M, M') = \frac{\sqrt{2M'}}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dE}\left(\frac{\partial L}{\partial M'}\right) = \frac{\partial L}{\partial M} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dE}\left(\frac{1}{M(E)\sqrt{2\frac{dM}{dE}}}\right) = -\frac{1}{[M(E)]^2}\sqrt{2\frac{dM}{dE}}.$$

Az $M(E)$ függvényre vonatkozó ezen differenciálegyenlet megoldása adja a probléma megoldását.

***

Ezen egyenlet felírásáig tartott a feladat „variációszámításos része"; aki akarja, meg is oldhatja ezt az egyenletet, nem olyan nagyon nehéz; az adódik, hogy a görbealak, és az elérhető max. U sebesség:

$$2M'^2 = M''M \quad \Rightarrow \quad \frac{2M'}{M} = \frac{M''}{M'} \quad \Rightarrow \quad \left(\ln(M^2)\right)' = \left(\ln M'\right)' \quad \Rightarrow \quad M' = KM^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{M}\right)' + K = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{M(E)} = C - KE \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{M(E)} = \frac{1}{m_0} - \left(\frac{1}{m_0} - \frac{1}{M_0}\right)\frac{E}{E_0} \quad \Rightarrow \quad M(E) = \frac{M_0 m_0}{M_0 - (M_0 - m_0)\frac{E}{E_0}}.$$

Közben beazonosítottuk az előkerült C, K állandókat, hogy a kezdő– és a végfeltételhez illeszkedjen a megoldás. A max. sebesség:

$$U = \int_0^{E_0} \frac{dE}{M(E)}\sqrt{2\frac{dM(E)}{dE}} = \dots = \sqrt{\frac{2(M_0 - m_0)}{M_0 m_0}E_0}.$$

Megjegyzés: ha pl. úgy gyorsítottunk volna, hogy állandó a kilőtt hajtóanyag sebessége, akkor ez az $M(E) = M_0 - \left(1 - \frac{E}{E_0}\right)(M_0 - m_0)$ függvénynek felelne meg (minden dM ugyanannyi dE energiát kap), és a végsebesség (kiszámolva) csak $\overline{U} = \sqrt{\frac{2E_0}{M_0 - m_0}}\ln\frac{M_0}{m_0}$ lett volna, amiről meggyőződhetünk, hogy kevesebb, mint amit legjobb esetnek kaptunk. Sokat lehet még ezt a feladatot diszkutálni...