Matematikai módszerek a fizikában I.

Vizsga zárthelyi 2011.12.22.
Munkaidő 3 óra. Használható: Bronstein, saját órai jegyzet, zsebszámológép

1. Számítsuk ki a következő **periodikus** $f(t)$ függvény Fourier-együtthatóit (ábra!!!):

$$f(t) = \begin{cases} \sin \Omega t & 0 < t < \frac{T}{4}, \\ -\sin \Omega t & \frac{T}{4} < t < \frac{3T}{4}, \\ \sin \Omega t & \frac{3T}{4} < t < T, \end{cases}$$

ahol $T = \frac{4\pi}{\Omega}$, a függvény T periódussal ismétlődik.

2. Számítsuk ki a következő **nem periodikus** $f(t)$ függvény $F(\omega)$ Fourier-transzformáltját (ábra!!!).

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \sin \Omega t & 0 < t < \frac{3T}{4}, \\ 0 & \frac{3T}{4} < t, \end{cases}$$

ahol $T = \frac{4\pi}{\Omega}$. Ábrázoljuk az $F(\omega)$ függvényt a valós ω frekvencia függvényében! Vizsgáljuk meg gondosan az $F(\omega)$ függvény menetét az $\omega = \Omega$ pont környezetében.

3. Egy m tömegű test mozog $V(z) = mgz$ potenciálú homogén gravitációs térben. Korlátozzuk a mozgását úgy, hogy egy vízszintes tengelyű, R sugarú henger palástja felső részének külsején legyen kénytelen mozogni! Tárgyaljuk a problémát Lagrange feltételes variációs módszerével! (Másképp is tárgyalható, de nem kapsz rá pontot.) Vezessük le a megfelelően választott általános koordinátákra vonatkozó mozgásegyenletet, és a kényszererő nagyságát meghatározó egyenletet! Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a test zérus kezdősebességgel indul a henger legfelső pontjáról! Súrlódás nincs. Hol hagyja el a test a hengerfelületet? (Tanács: használjuk fel az energia megmaradásának tételét is!)

4. Viszkózus folyadék stacionárius áramlását vizsgáljuk két koncentrikus R és $2R$ sugarú henger közötti térben. A sebességmezőnek csak a tangenciális komponense különbözik nullától, és ez csak a tengelytől mért r távolságtól függ: $v_\varphi(r)$. Fizikai okokból tudjuk, hogy a sebességmező kielégíti a Laplace-egyenletet: $\triangle \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$. Az áramlás a szilárd testek határfelületénél együtt mozog a fallal, a relatív sebesség nulla. Esetünkben a külső henger áll, a belső állandó szögsebességgel forog. Határozzuk meg a $v_\varphi(r)$ függvényt! Használjuk a grad, div, rot differenciáloperátorok hengerkoordinátarendszerben felírt alakját. (lásd Bronstein vagy előadás-jegyzet), de ne használjuk fel közvetlenül a Laplace-operátor előadáson megadott alakját.

5. Számítsuk ki a következő integrált a reziduumtétel segítségével (más módszerre nem kapsz pontot):

$$I(t,a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 + a^2},$$

ahol a rögzített valós, pozitív paraméter, a t időparaméter pedig valós, de lehet negatív és pozitív is. Óvatosan diszkutáljuk a feladatot a t változó előjelének figyelembevételével! Írjuk fel az eredményt kapcsos zárójel helyett egyetlen képlettel! (Tanács: parciális törtekre bontás.)

6. (Ötösre ácsingózók feltétlenül próbálkozzanak meg ezzel a feladattal!) Keressük meg a következő inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet kauzális Green-függvényét: $\dot{u}(t) + au(t) = f(t)$! A képletben a rögzített valós, pozitív paraméter, $u(t)$ a keresett függvény, $f(t)$ a tetszőleges gerjesztő függvény.

(A) Először próbálkozzunk fizikai megfontolásokkal, és építsünk a Dirac-delta tulajdonságaira! (Vigyázat a keresett Green-függvény nem feltétlenül folytonos!)

(B) Használjuk fel a Fourier- és a Green-módszerek közti kapcsolatot és a reziduumtételt!