

Matematikai módszerek a fizikában vizsga zh (2016)

1. feladat (10 p)

Egy komplex változós függvény $w = f(z) = z^*$, $z = x + iy$. Differenciálható-e ez a függvény? Válaszodat indokold. Ha differenciálható, számítsd ki a deriváltját.

2. feladat (30 p)

Egy komplex változós függvény $w = f(z) = tg(z)$, $z = x + iy$. Írd fel a valós és képzetes részét! Kielégíti-e a Laplace-feltételt és a Cauchy-feltételt?

3. feladat (70 p)

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^4 + 29x^2 + 100} dx$$

, ahol $t \in \mathbb{R}$. Számold ki az integrált $t < 0$ és $t > 0$ esetekre. Ábrázold $I(t)$ -t.

4. feladat (70 p)

Egy görbevonali koordináta-rendszerben

$$u = xy; v = \frac{x^2 - y^2}{z}; z = z; x > 0; y > 0$$

- (a) Fejezd ki x -et és y -t!
- (b) Mutasd meg, hogy a rendszer ortogonális!
- (c) Rajzold fel a koordináta-vonalakat!
- (d) Add meg az ívelemnégyzetet és a Lamé-együtthatókat!
- (e) Lamé-együtthatók segítségével add meg a *div* operátort!

5. feladat (70 p)

Az origóban rögzített Q töltésű atommag körül egy $-q$ töltésű m tömegű elektron mozog. A rendszer egy z irányba mutató, homogén elektromos térben helyezkedik el (potenciál: $V(\mathbf{r}) = -Ez$).

- (a) Írd fel a Lagrange-függvényt térbeli polárkoordinátákkal. Írd fel az Euler-Lagrange-féle egyenletet!
- (b) Írd fel a ciklikus koordinátákat és a megmaradási tételeket. A Beltrami-tétel segítségével írd fel az energiamegmaradást! (A mozgás nem csak az x - y síkban történik, ezt ne használd fel közelítésnek.)

6. feladat (30 p)

Írd fel a $f(t) = |\cos\Omega t|$ függvény Fourier-együtthatóit.

7. feladat (20 p)

Adott függvény.: $f = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq -T \\ e^{-|t|/T}, & \text{ha } -T < t < T \\ 0, & \text{ha } t \geq T \end{cases}$ Írd fel a Fourier-transzformáltját, majd add meg $F(\omega)$ valós és képzetes részét és ábrázold.