MATEMATIKAI MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN

Javító- és utóvizsga-zh 2012. 01. 06.

Név	EHA-kód	email-cím	megcélzott jegy

Munkaidő 3 óra. Használható: Bronstein, saját órai jegyzet, zsebszámológép.

1. Számítsuk ki a következő PERIODIKUS $f(t)$ függvény Fourier-együtthatóit (ábra!!!):

$$f(t)=\begin{cases} \sin 2\Omega t, & \text{ha} \quad 0<t<T/2 \\ -\sin 2\Omega t, & \text{ha} \quad T/2<t<T \end{cases}$$

, ahol $T=2\pi/\Omega$, a függvény T periódussal ismétlődik.

2. Számítsuk ki a következő NEM PERIODIKUS $f(t)$ függvény $F(\omega)$ Fourier-transzformáltját (ábra!!!):

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t<0 \\ e^{-\beta t}\sin\Omega t, & \text{ha} \quad 0<t<T \\ 0, & \text{ha} \quad T<t \end{cases}$$

, ahol $T=2\pi/\Omega$

Ábrázoljuk az $F(\omega)$ függvény valós részét a valós ω frekvencia függvényében!

3. Egy m tömegű síelő mozog egy függőleges tengelyű forgási paraboloid alakú hegy oldalán, $V(z)=mgz$ potenciálú homogén gravitációs térben. (A hegy felületének egyenlete: $x^2+y^2=2p\,(H-z)$, ahol H a hegy magassága, p pedig egy hosszúság dimenziójú paraméter.) Tárgyaljuk a problémát Lagrange feltételes variációs módszerével! (Másképp is tárgyalható, de nem kapsz rá pontot.) Vezessük le a megfelelően választott általános koordinátákra vonatkozó mozgásegyenletet, és a kényszererő nagyságát meghatározó egyenletet! Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a síelő zérus kezdősebességgel indul a hegy csúcsáról, és végig az xz síkban mozog! Súrlódás nincs. Határozzuk meg, mekkora nagyságú és milyen irányú erővel nyomja a síelő a havat, amikor a csúcshoz képest h mélységbe ereszkedett! (Tanács: használjuk fel az energia megmaradásának tételét is!)

4. Viszkózus folyadék stacionárius áramlását vizsgáljuk két koncentrikus, R és $3R$ sugarú henger közötti térben. A sebességmezőnek csak a tangenciális komponense különbözik nullától, és ez csak a tengelytől mért r távolságtól függ: $v_\varphi(r)$. Fizikai okból tudjuk, hogy a sebességmező kielégíti a Laplace-egyenletet: $\Delta\mathbf{v}(\mathbf{r})=0$. Az áramlás a szilárd testek határfelületénél együtt mozog a fallal, a relatív sebesség nulla. Esetünkben a belső és a külső henger állandó, egyforma nagyságú, de ellentétes irányú szögsebességgel forog. Határozzuk meg a $v_\varphi(r)$ függvényt! Használjuk a vektoriális Laplace-operátor előadáson felírt hengerkoordinátarendszer-beli alakját!

5. Számítsuk ki a következő integrált a reziduumtétel segítségével:

$$I(t,a,b)=\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-a^2-b^2+2ib\omega},$$

ahol a és b rögzített valós, pozitív paraméterek, a t időparaméter pedig valós, de lehet negatív és pozitív is. Óvatosan diszkutáljuk a feladatot a t változó előjelének figyelembevételével! (Tanács: parciális törtekre bontás.)

6. (*Csak javítóknak! Utóvizsgázóknak nem kell megcsinálni!*) Keressük meg a következő inhomogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet Green-függvényét: $u''(x)-a^2\,u(x)=f(x)$! A képletben a rögzített valós, pozitív paraméter, $u(x)$ a keresett függvény, $f(x)$ a tetszőleges forrásfüggvény. Használjuk fel a Fourier- és a Green-módszerek közti kapcsolatot és a reziduum-tételt!

dávidgyula