2021 Matmód tételkidolgozás

Írták: a szerzők, avagy mi

2021 tavasz

Előszó

Ezt a tételkidolgozást a 2020 BSc hallgatói készítették közösen, egy embertpróbáló vizsgaidőszak során. Éppen ezért pár tétel hiányos/elkapkodott, így ez a kidolgozás meg sem próbálja az előadásokat illetve a saját jegyzetet pótolni, továbbá mindenki saját felelősségre használja ezt az irományt. Fontos megjegyezni, hogy a vizsgán általában nincsenek ezek a tételek elválasztva. Példa: Ha az ortogonális görbevonalú koordinátarendszereket húzza valaki, akkor továbbra is a tétel része az ívelemnégyzet, a metrikus tenzor, stb.
A legtöbb tétel végén fel van tüntetve ki írta, így tudni lehet, kit kell hibáztatni bukáskor.

Sok szerencsét a vizsgán!

A szerzők

Tartalomjegyzék

1. Gauss-integrálok

A Gauss görbével vagy haranggörbével modellezhető jelenségek, eloszlások mind a matematikában mind a fizikában nagyon gyakoriak,ebből kifolyólag fontosak ezen függvények integráljai is. Legegyszerűbb ilyen alakú függvény az e^{-x^2} függvény, ezért a Gauss integrálok vizsgálatát célszerű ennek az integrálásával kezdeni. Ezen függvényeket két tetszőleges határ között nem lehet zárt alakban kiintegrálni, illetve határozatlan integrálással a primitív függvény sem kereshető meg analitikus alakban. Az integrálást itt általában 0 és $+\infty$ vagy $-\infty$ illetve $-\infty$ és $+\infty$ között szokás végezni. Vizsgáljuk tehát a következő problémát:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Ennek megoldása során alkalmazni kell bizonyos trükköket és transzformációkat, ezt nem kommentálom, mindenki látja úgyis.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\, d\phi\, dr = \pi\int_0^{\infty} 2re^{-r^2}\, dr$$

Egy behelyettesítés után tovább adódik:

$$\pi\int_0^{\infty} e^{-u}\, du = \pi\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

A fentiekkel analóg módon vezethetőek le a következő összefüggések:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2a^2}}\, dx = \sqrt{2\pi}a$$

Utóbbi kifejezést a valószínűségszámításban gyakran szokás egyre normálva használni, ekkor csak egy $\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}$ szorzót kap az integrandus. Az 'a' itt egyébként a félérték szélesség, második derivált zérushelyeinek meghatározásával látható, hogy +/-a helyeken vannak az inflexiós pontok, itt a függvényérték kb $\frac{1}{\sqrt{2.7}}$.
Gauss integrálokkal foglalkozhatunk több dimenzióban is, ekkor egyszerű esetekben az integrált változónként szétbontjuk integrálok szorzatára és ezeket integráljuk. Bonyolultabb eset mikor a kitevőben egy kvadratikus alak, egy másodrendű (hiper)felület vagy görbe egyenlete van. Ekkor az integrál eredménye a következő módon számolható ki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\underline{\underline{A}}x}\, d^n x = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{detA}}$$

Ennek a levezetése egyszerű, egy főtengelytranszformáció után a kitevőben már látszik is az eredmény. Itt mivel descartes-féle rendszerből descartes-félébe transzformálunk, a Jacobi determináns 1. Ez csak akkor működik, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix pozitív definit, különben az exponenciálisok elszállnak. Bonyolultabb eset, ha a kitevőben elsőfokú tagok is vannak, ez általánosan a következőképpen néz ki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underline{x}\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\underline{x}}\, d^n x = \frac{1}{\sqrt{det\underline{\underline{A}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underline{y}^2+2\underline{p}\underline{y}}\, d^n x$$

Ezt az átalakítást úgy tettük meg, hogy kihasználtuk, hogy A mátrix pozitív definit és szimmetrikus, mely miatt $\underline{x}^\top \underline{\underline{A}}\underline{x}$ átírható $\underline{x}^\top \underline{\underline{C}}^\top \underline{\underline{C}}\underline{x}$ alakba, ahol C mátrix A-nak az a gyöke amelyik pozitív definit, és bevezetjük $\underline{\underline{C}}\underline{x} = \underline{y}$ valamint $\underline{b}\underline{x} = \underline{b}^\top \underline{\underline{B}}^\top \underline{\underline{C}}\underline{x} = 2\underline{p}\underline{y}$ jelöléseket, itt B mátrix C mátrixnak az inverze. Az $\frac{1}{\sqrt{det\underline{\underline{A}}}}$ pedig a Jacobi determinánsa ennek a transzformációnak.Ezután a kitevőben lévő kifejezést teljesn négyzetté alakítva, majd a külön változók szerinti integrálást elvégezve eredményként adódik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underline{x}\underline{\underline{A}}\underline{x}+\underline{b}\underline{x}}\, d^n x = \frac{1}{\sqrt{det\underline{\underline{A}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\underline{y}^2+2\underline{p}\underline{y}}\, d^n x = \frac{e^{\frac{\underline{b}\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}}{4}}\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{det\underline{\underline{A}}}}$$

Fontosak a következő alakú integrálok is:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\, dx$$

Ezt parciálisan integrálva a következő rekurziós formára jutunk:

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}$$

Kihasználva a már korábban megkapott integrálokat, hogy a rekurziós sorozat első pár tagját megadjuk, a páros indexű tagok a következő képlettel adhatóak meg:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Generátor függvény módszer: n dimenziós esetben használható módszer, akkor jön jól, ha a függvény többváltozós és különböző változók különböző hatványaival van megszorozva az n dimenziós Gauss függvény, melynek kitevőjében csak másodfokú tagok vannak. Ebben az esetben az exponenciális függvény kitevőjébe írunk egy $+\underline{b}\underline{x}$ tagot, az elöl lévő szorzótényezőket pedig elhagyjuk. Ennek az az értelme, hogy ezt a függvényt a b vektor azon komponensei szerint deriválva, amik azokhoz a változókhoz tartoznak a kitevőben amik szorzóként felléptek az eredeti függvényben, és annyiadik deriváltat véve ahányadik hatványon a szorzat volt éppen az eredeti függvényt kapjuk vissza. Viszonyt mivel arra az alakra hozzuk így, amikor a kitevőben $-\underline{x}\underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{b}\underline{x}$ van a generátorfüggvényben, ennek integrálját pedig már levezettük, a problémát meg tudjuk oldani. Mivel nem vagyunk matematikusok az integrál és differenciáloperátort felcserélhetjük, ekkor integrálás után a korábban kapott:

$$\frac{e^{\frac{\underline{b}\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}}{4}}\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{det\underline{\underline{A}}}}$$

függvény adódik, aminek a deriváltjait véve, majd b-t nullával egyenlővé téve a keresett integrált kapjuk.
Bene Róbert

2. Fázisáramlások. Kétváltozós fázisáramlások fixpontjainak típusai

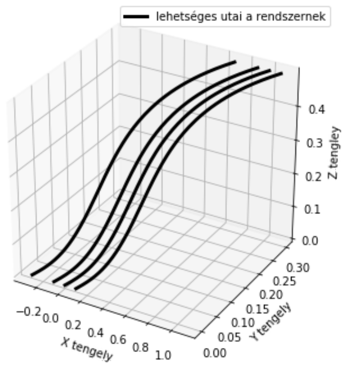
A témához kapcsolódó előadások:
1. előadás *2. előadás*

Az evolúciós rendszerek megmutatják egy adott fizikai rendszer változását az időben. A rendszernek az állapotát meghatározzák valamilyen jellemzők. Ezekből a jellemzőkből lehet alkotni egy vektort ($\underline{\mathbf{x}}$), melynek komponensei időfüggőek. Az idő folytonosan telik, ekkor az $\underline{\mathbf{x}}$ vektornak vehetjük az idő szerinti deriváltját: $\frac{\mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}}{\mathrm{dt}}$. Ha a rendszer ún. autonóm, azaz nincsen külső ráhatás, csak a belső dinamika irányítja a viselkedést. Ekkor a fejlődést a pillanatnyi állapot határozza meg:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}}{\mathrm{dt}} = \underline{\mathbf{F}}\left(\underline{\mathbf{x}}\left(t\right)\right)$$

Ahol az $\underline{\mathbf{F}}$ egy függvénye az $\underline{\mathbf{x}}$ komponenseinek (ebből következően egy ugyanannyi komponensű vektor, mint az $\underline{\mathbf{x}}$ vektor). Így kaptunk egy közönséges homogén differenciálegyenlet-rendszert.

Legyen $\underline{\mathbf{x}}$-nek N darab komponense, és ha megadunk egy kezdeti értéket, hogy $\underline{\mathbf{x}}\left(t = t_0\right) = x_0$, akkor egy N dimenziós térben tudjuk ábrázolni a rendszer fejlődését. Ekkor az $\underline{\mathbf{x}}$ vektorok egy görbén futnak végig (melyet természetesen az $\underline{\mathbf{F}}$ függvény határoz meg). Ezeket a görbéket nevezzük *fázistrajektóriának*, és azt az N dimenziós teret, amiben a rendszer adatait felírtuk *fázistérnek* hívjuk. A fázistrajektóriák nem metszhetik egymást, különben nem lenne egyértelmű a rendszer fejlődése.



1. ábra. *Egy rendszer lehetséges fejlődései, mindegyik vonal egy állapotváltozást jelent. Megvalósulásuk a kezdőfeltételektől függ.*

Mielőtt rátérünk a két dimenziós rendszerek vizsgálatára, tekintsünk meg egy egy szabadsági fokú evolúciós rendszert. Ekkor az $\underline{\mathbf{x}}(\mathrm{t})$ vektorból $\mathbf{x}(\mathrm{t})$ lesz. Felírhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{f}\left(\mathbf{x}\right) \tag{1}$$

A 1 egyenlet egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelyet átalakítva megkapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{f}\left(\mathbf{x}\right)} = \mathrm{dt} \longrightarrow \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{f}\left(\mathbf{x}\right)} = \mathrm{t} - \mathrm{t}_0$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{f}\left(\mathbf{x}\right)} = \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{t} - \mathrm{t}_0 \longrightarrow \mathrm{x}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$$

A rendszer időbeli transzlációra invariáns (időben eltolható), éppen ezért a t_0 integrációs állandó csak az időbeli invarianciát fejezi ki.
Nézzük meg egy speciális esetet, mikor $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = c \cdot x$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = c \cdot x \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \int c\mathrm{dt} \Longrightarrow \mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{c(t-t_0)}} \tag{2}$$

Egy két dimeziós esetre példa:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = f(x, y) \tag{3}$$
$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = g(x, y)$$

Ilyenkor, mikor több változónk van felírhatjuk mátrixos alakban is a differenciál-egyenletrendszert, ha lineárisak a kapcsolatok. Ekkor a változókból egy n komponensű oszlopvektor lesz (dim = n esetén), ebből következően a deriváltak és változók közti kapcsolat egy $n \times n$ mátrix lesz.
Az órákon leginkább 2 dimeziós problémákkal foglalkoztunk, így a következőekben a téma kifejtéséhez is 2 dimeziós eseteket fogunk vizsgálni.

Ha van egy differenciál-egyenletrendszer, ami felírható ilyen formában:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Akkor a megoldást kereshetjük a következő alakban:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{\underline{\underline{A}}})_{11} & (e^{\underline{\underline{A}}})_{12} \\ (e^{\underline{\underline{A}}})_{21} & (e^{\underline{\underline{A}}})_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Az eredeti $\underline{\underline{\mathrm{A}}}$ mátrixnak vannak sajátvektorai($\underline{u}^{(1)}; \underline{u}^{(2)}$), melyek bázist alkotnak, ekkor a $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ felírható azon a bázison:

$$\underline{r}(t) = \alpha(t)\underline{u}^{(1)} + \beta(t)\underline{u}^{(2)} \tag{5}$$

$$\underline{v}^{(1)}\underline{r}(t) = \alpha(t)$$
$$\underline{v}^{(2)}\underline{r}(t) = \beta(t)$$

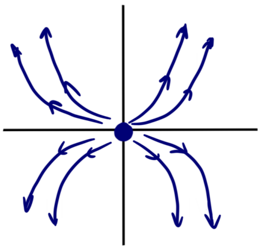
$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{\underline{A}}\underline{r} = \dot{\alpha}(t)\underline{u}^{(1)} + \dot{\beta}(t)\underline{u}^{(2)} = \underline{\underline{A}}\left(\underline{r}(t) = \alpha(t)\underline{u}^{(1)} + \beta(t)\underline{u}^{(2)}\right) = \underline{\underline{A}}\left(\alpha(t)\underline{u}^{(1)}\right) + \underline{\underline{A}}\left(\beta(t)\underline{u}^{(2)}\right) \tag{6}$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \alpha(t)\underline{\underline{A}}\underline{u}^{(1)} + \beta(t)\underline{\underline{A}}\underline{u}^{(2)} = \alpha(t)\lambda_1\underline{u}^{(1)} + \beta(t)\lambda_2\underline{u}^{(2)}$$

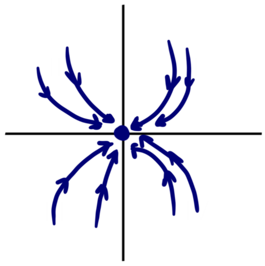
$$\underline{r}(t) = \alpha_0 e^{\lambda_1 t}\underline{u}^{(1)} + \beta_0 e^{\lambda_2 t}\underline{u}^{(2)} \tag{7}$$

Ekkor a fázisáramlások több féle képet vehetnek fel a sajátértékektől függően:

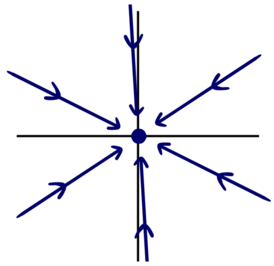
- $\lambda_1\lambda_2 > 0$ és $\lambda_k > 0$, akkor a centrum taszító; ábra: (2a.)
- $\lambda_1\lambda_2 > 0$ és $\lambda_k < 0$, akkor a centrum vonzzó; ábra: (2b.)
- $\lambda_1 = \lambda_2$ esetén a fázisáramlások lineárisan mennek befelé. ; ábra: (2c.)
- $\lambda_1\lambda_2 < 0$ esetben attraktor és repellor görbéink lesznek, melyeken hiperbolikus fixpontok lesznek; ábra: (3) és (4)



(a) A centrum taszító, az áramlások tőle elfele mennek...

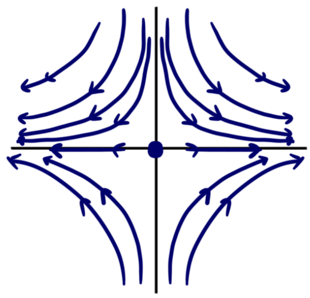


(b) A centrum vonzó

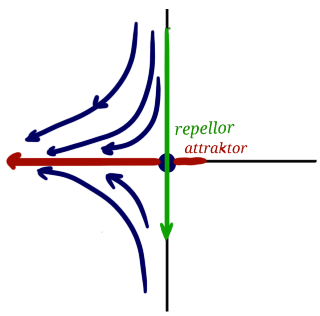


(c) Ha a sajátértékek egyenlőek akkor szép egyenesen mennek ki a centrumból. Persze, ez egy nagyon speciális eset, a valóságban nem nagyon fordul elő teljesen egyenlő sajátérték.

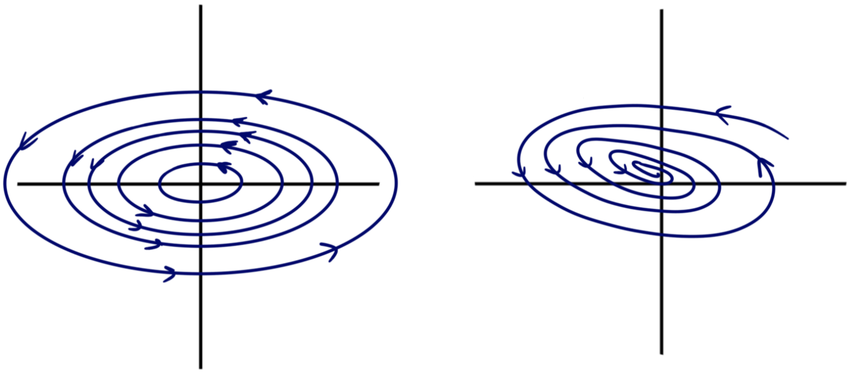
2. ábra. A különböző esetek. A fázisramlások alakja és viselkedése a sajátértékektől függ.



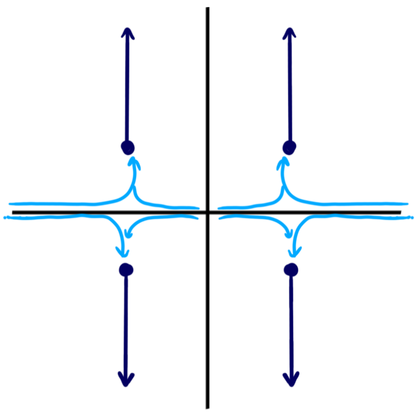
3. ábra. A fázisáramlás alakja egy hiperbolához hasonlít, vagy kontrétan az. Ha pldául a két sajátérék -2 és 1, akkor az áramlás az $y = \dfrac{1}{x^2}$ függvény szerű alakot ölt.



4. ábra. A hiperbolikus esetben megkülönböztetünk attraktor és repellor görbéket. Az attraktor görbe nevéből is kiolvashatóan vonzza az áramlásokat, míg a repellor taszítja.



5. ábra. Ha komplexek a sajátértékek akkor egy ellipszist hoznak létre. Ennek is három féle esete van. Egyik, mikor az ellipszisek bezáródnak, a másik két esetben viszont ki- vagy bespiráloznak a fixpontba. (Ennek speciális esete a kör...). A fenti ábrának jobb oldalán az látható, hogy bespiráloznak. Érdekes megfigyelni, hogy bármely két spirál vagy ellipszis közé mindig befér még egy, és a rendszer fejlődése a kezdőfeltételektől függ, hogy melyik trajektórián fog végighaladni.



6. ábra. A sajátértékek közül az egyik nulla eset. Ilyen a valóságban nem nagyon fordul elő, valószínűbb, hogy csak nagyon kicsi. Ilyen esetkeben csak nagyon megközelíti a nulla esetet , ezt jelzik a kék vonalak.

- λ_1 vagy λ_2 egyenlő nullával; ábra: (6)
- A sajátértékek komplexek; ábra: (5)

Természetesen nem csak lineáris diffegyenlet rendszerek vannak, hanem általánosan kedvtől, kialvatlanságtól és mazochizmustól függően bármilyen ortopéd problémák kitalálhatóak, vagy felfedezhetőek a természetben.
Általánosan a diffegyenlet rendszerben több fixpont van, ahol a deriváltak nullák.

$$\dot{x} = f(x,y) \Longrightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{f(x,y)dt} \tag{8}$$
$$\dot{y} = g(x,y) \Longrightarrow \mathrm{dy} = \mathrm{g(x,y)dt}$$

Ekkor egy adott pontban a függvény meredeksége:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = h(x,y) \tag{9}$$

Ezt a h(x,y) mezőt nevezzük a diffegyneletrendszer iránymezejének, ami minden pontban megadja a görbe irányát.
Ebben a mezőben az érdekességek a fixpontok körül vannak, mert máshol közel párhuzamosnak tekinthetőek megfelelően hatalmas nagyítással az irányok.

$$\dot{x} = f(x,y) \Longrightarrow \mathrm{dx} = \mathrm{f(x,y)dt} \tag{10}$$
$$\dot{y} = g(x,y) \Longrightarrow \mathrm{dy} = \mathrm{g(x,y)dt}$$
$$f(x,y) = g(x,y) = 0 \Longrightarrow x = x_0 \quad y = y_0 \quad \text{lesz a fixpont}$$

Ekkor a fixpontok körül nézzük meg lesz, ha kicsit arréb megyünk.

$$x = x_0 + \xi \Longrightarrow \dot{x} = \dot{\xi} = f(x_0+\xi, y_0+\eta)$$

$$y = y_0 + \eta \Longrightarrow \dot{y} = \dot{\eta} = g(x_0+\xi, y_0+\eta)$$

Fejtsük sorba a fentebb megkapottakat:

$$f(x_0+\xi, y_0+\eta) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0} \cdot \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0,y_0} \cdot \eta = \tag{11}$$
$$= f(x_0,y_0) + \alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi + \beta\eta$$

A fenti g-re ugyanúgy eljátszható, és mivel g és f is az $x_0; y_0$ helyeken nullát vesz fel, így a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{12}$$

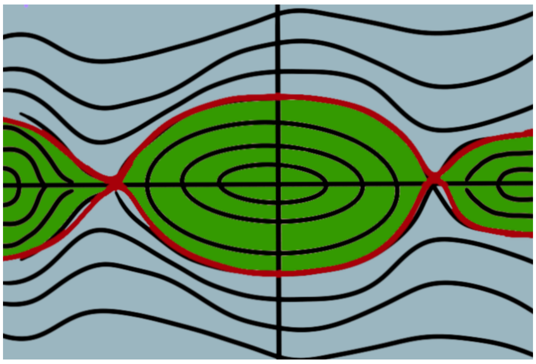
Tehát láthatóan nagyon ügyesen visszavezettük a bonyolultabb eseteinket is a fentebb tárgyalt egyszerűbbekre. Minden fixpontnál a sorbafejtés, és a körülvizsgálódás működik, és megállapítható vele a fixpont kiléte és a körülötte lévő fázisáramlás viselkedése.

Vannak esetek amikor az eliptikus esetek és a valós sajátrétékűek egyszerre fordulnak elő, ekkor lesz egy görbe, ami elválasztja a magukba záródóakat a végtelenbe elfutóaktól, ez lesz a szeparátrix: (7)

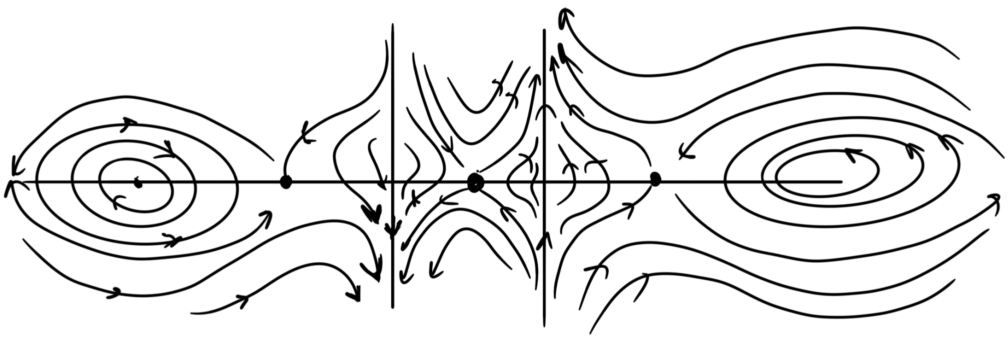
Csak szemléltetésnek, egy szép, órán felrajzolt fázisáramlás: Ábra (8)

Megjegyzések

A képek az órai jegyzeteimből készültek, elnézést hogy a szép plotok helyett ilyenek vannak.
Sok sikert a vizsgához!
Tibiássy Adalbert



7. ábra. A szeparátrix vörössel van jelölve az ábrán. A két különféle színnel jelzett tartományokat választja el egymástól. A zöld belső, láthatóan spirális részt a külsőtől. Ehhez hasonló fázisáramlási képpel jellemezhető az inga is ha egy bizonyos erővel meglökjük, akkor a kilengés olyan nagy lesz, hogy nem fog visszalengeni, ekkor kilép a belső elliptikus rsézről.



8. ábra. Egy szép fázisáramlás:)

3. Többváltozós függvények szélsőértékei

A témához kapcsolódó előadások:
3. előadás

Az egyváltozós függvények szélsőértékeinek deriváltak segítségével történő meghatározását mindenki tanulta középiskolában, ezt a módszert általánosítva bármilyen n számú változóval rendelkező függvény szélsőértékeit is meghatározhatjuk.

Mielőtt hozzálátunk, be kell vezetnünk néhány fogalmat. Egy mátrixot pozitív definitnek nevezünk, ha minden sajátértéke pozitív, és negatív definitnek ha minden sajátértéke negatív. Emellett megkülönböztethetünk még pozitív és negatív szemidefinit mátrixokat is, ezek annyiban különböznek a korábbiaktól, hogy a sajátértékeik között van nulla is. Az olyan mátrixokat amiknek pozitív és negatív sajátértékei is vannak indefinitnek nevezzük.
Vegyünk egy $\underline{r}_0$ n dimenziós helyvektort, és egy $\Phi(\underline{r})$ n dimenziós vektortérben értelmezett függvényt, és határozzuk meg a Φ függvény szélsőértékeit!
A függvénynek akkor lesz potenciális szélsőértéke az $\underline{r_0}$ pontban, ha bármely változó szerinti első deriváltja nulla. Az az a potenciális szélsőértékhelyek azok, amikre teljesül, hogy:

$$\underline{\nabla}\Phi(\underline{r}) = 0$$

Ahogy egyváltozós függvényeknél is tapasztaltuk, ez csak szükséges, de nem elégséges feltétel, a függvény második deriváltját is meg kell vizsgálnunk, a több változó miatt viszont ez itt nem egy függvény lesz, hanem egy mátrix. Jelöljük a második deriváltak mátrixát A-val, az A mátrix elemei indexesen felírva: $A_{kl} = \partial_k \partial_l \Phi(\underline{r})$
Az egyváltozós esethez hasonlóan akkor lesz a függvénynek maximuma egy pontban ha a második deriváltja negatív, vagyis A negatív definit. Minimuma pedig, akkor lesz ha A pozitív definit.

Ennek a vizualizálásához írjuk fel a függvény Taylor-sorát az $\underline{r_0}$ pont körül, kis $\underline{a}$ eltérésekre az első két deriváltig:

$$\Phi(\underline{r}_0 + \underline{a}) \approx \Phi(\underline{r}_0) + \partial_k \Phi(\underline{r}_0) \cdot a_k + \frac{1}{2!} \partial_k \partial_l \Phi(\underline{r}_0) a_k a_l$$

Ha $\underline{r_0}$ potenciális szélsőérték pont, akkor $\underline{\nabla}\Phi(\underline{r_0}) = 0$, vagyis $\partial_k \Phi(\underline{r_0}) = 0$ minden k-ra. Így ez a tag kiesik a Taylor sorból és azt kapjuk, hogy:

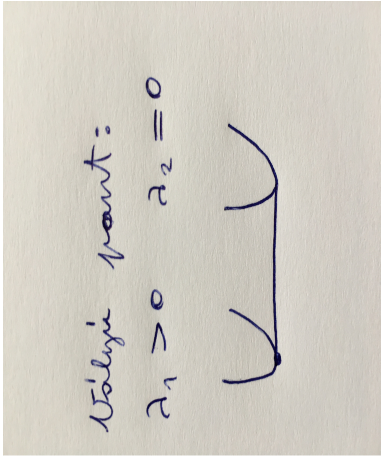
$$\Phi(\underline{r}_0 + \underline{a}) \approx \Phi(\underline{r}_0) + \frac{1}{2!} \partial_k \partial_l \Phi(\underline{r}_0) a_k a_l = \Phi(\underline{r}_0) + \frac{1}{2} A_{kl} a_k a_l$$

Írjuk diagonális alakban az A mátrixot(a főátlóban a sajátértékeivel), akkor láthatjuk hogy a második tag minden k nem egyenlő l-re nulla. Így a képletet átírhatjuk az alábbi formára:

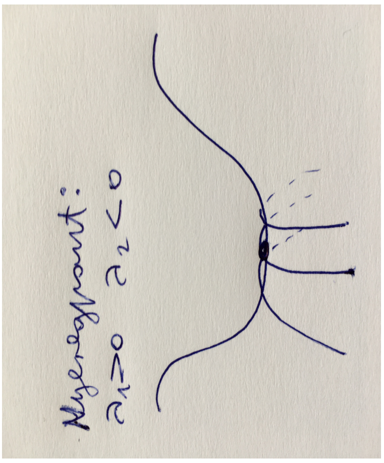
$$\Phi(\underline{r}_0 + \underline{a}) \approx \Phi(\underline{r}_0) + \frac{1}{2} A_{kk} (a_k)^2$$

Ebben a formában már látható, hogy ha A pozitív definit, akkor minden $A_{kk} > 0$, így bármilyen $\underline{a}$ irányba mozdulunk el, a függvény értéke nőni fog, vagyis $\underline{r}_0$ minimum pont. Ehhez hasonlóan ha A negatív definit, akkor pedig maximum van.

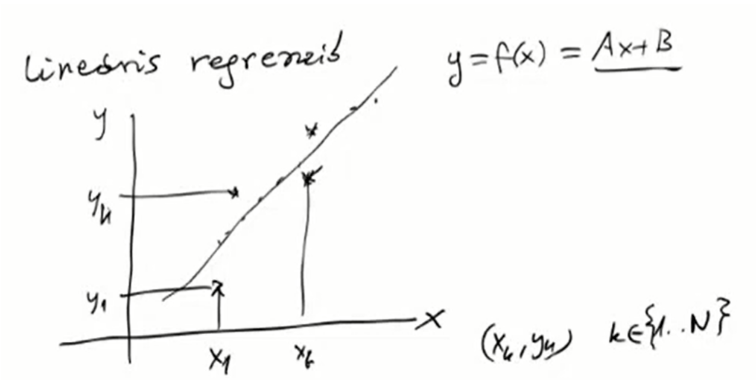
Ha az A mátrix szemidefinit vagy indefinit, akkor érdekes alakzatok tudnak kialakulni, órán az ilyen esetek közül a kétváltozós függvényeknél vizsgáltuk a vályú és a nyeregpontokat.



9. ábra. *2 változós függvény vályúpontja*



10. ábra. *2 változós függvény nyeregpontja*



11. ábra. *A lineáris regresszió*

Lineáris regresszió:

A többváltozós függvények szélsőértékének egyik leggyakoribb fizikai felhasználása a lineáris regressziónál történik. Itt egy mérés adatpontjaira illesztünk egyenest, úgy, hogy a pontok egyenestől vett távolságnégyzeteinek összegére felírunk egy többváltozós függvényt, és ennek a minimumát meghatározva kapjuk a legjobban illeszkedő egyenest.
Karácsonyi Máté

4. Feltételes szélsőérték-problémák

A témához kapcsolódó előadások:
3. előadás *4. előadás*

Adott $z = \Phi(x,y)$ kétváltozós függvény. Például a hegy szintvonalai. Adott egy turistaút a hegyen, amelyről tilos letérni. Kérdés: hol leszünk a túra során a legmagasabban?
Feltétel megadása általában: implicit egyenlet (nincs kifejezve az egyik változó a másikból).
Pl. $g(x,y)! = 0$
Alkalmazásai: gazdaság (profit számolása), fizika
Megoldási stratégiák:

- Oldjuk meg az egyenletet valamilyen y-ra.

Ez nagyon ritkán szokott sikerülni, esetleg grafikusan oldható meg.

$$y = f(x)$$

$$z = \Phi(x,y) = \Phi(x, f(x)) = F(x)$$

Ennek keresem a maximumát:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\Phi(x, y = f(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f'(x)! = 0$$

Visszavezettük a problémát az egyváltozós függvények differenciálására.

- Milyen jó lenne, ha ki tudnám fejezni.

Keresem $\Phi(x,y)$ szélsőértékét, feltétel: $g(x,y)! = 0$.
Tegyük fel, hogy $y = f(x)$ sikerül kifejezni. Mennyi $f(x)$ deriváltja?
Trükk: $g(y,x) = c$ skalármezőként tekintünk rá. Ezek a konstans szintvonalak, az egyik a nullás szintvonal, amit keresünk. Menjünk kicsit odébb egy adott x,y pontból. Hogy változik a g?

$$\delta g = \nabla g * \delta r = \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y! = 0$$

A $g(x,y)$ mindig legyen nulla, tehát a megváltozása is legyen 0. Tehát mindig az adott görbe érintője mentén mozdulok el.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = H(x,y)$$

Keresem a $F(x) = \Phi(x, y = f(x))$ függvény szélsőértékét:

$$F'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f'(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial g} & \frac{\partial g}{\partial g} \end{vmatrix}}{\frac{\partial g}{\partial y}}! = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial g} & \frac{\partial g}{\partial g} \end{vmatrix} = D(x,y)! = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

Ebből a két egyenletből meghatározható x és y.
Lagrange-féle multiplikátor Átalakítás több változóra, nem rontja el a szimmetriát. Adott

$C = f(x,y)$ célfüggvény, aminek keresem a szélsőérétkét és $K = g(x,y)! = 0$ kényszerfeltétel. Vezessünk be egy új paramétert: λ. Vezessünk be egy új, háromváltozós függvényt: $G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$. Ha teljesül a kényszer, nem változik semmi. Állítás: G szélsőértékproblémája kényszer nélkül ugyanarra az egyenletrendszerre vezet, mint az eredeti probléma.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}! = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}! = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = g(x,y)! = 0$$

Ebből a három egyenletből x,y,λ meghatározható.

3 változó, 2 kényszer Adott $C = f(x,y,z)$ és két kényszerfeltétel: $K_1 = g(x,y,z) = 0$, $K_2 = h(x,y,z)$.
Hagyományos módon: Fel kéne írni az x-ek szerinti deriváltakat, dy-t és dz-t kifejezni dx-ekkel. Ezt az egyenletrenszert kell megoldani:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy \\ dz \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix} dx$$

Ezután invertálni kell a mátrixot, majd megoldani az egyenleteket, ami nem olyan egyszerű, elméletben lehetséges.
Lagrange-módszerrel: Bevezetjük λ-t és μ-t (mindig annyi multiplikátor, ahány kényszer).
Öt változós függvény bevezetése:

$$G(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

Az öt megoldandó egyenlet:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} + \mu \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} + \mu \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = g(x,y,z)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = h(x,y,z)$$

Elméletben megoldható.

n változó, 2 kényszer A függvény: $f(x_1...x_n)$, a kényszerfeltételek (ebből is lehet több): $g(x_1...x_n)$ és $h(x_1...x_n)$.

$$G = f + \lambda g + \mu h$$

n+2 darab egyenlet:

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial h}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = g = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial \mu} = h = 0$$

μ és λ kiszámítása, lineáris egyenletrendszerből:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

λ-t és μ-t visszahelyettesítve megoldhatjuk az egyenleteket.
Karnitscher Trixi

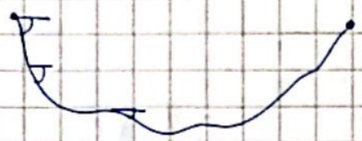
5. Funkcionálok szélsőértéke. Variációs probléma

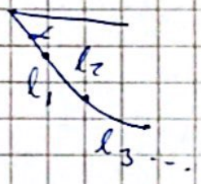
A képek közé felteszem a papíron kidolgozott változatát, ha nem olvasható írjatok és próbálok időt szakítani hogy átírjam Latexba. Bene Róbert

5. TÉTEL

Variációszámítás, funkcionálok szélső értéke:

1. Példa: (Lógó kötél probléma)





$\frac{l_1}{2}\sin\alpha \Rightarrow V_1 = -m_1 \cdot g \frac{l_1}{2}\sin\alpha_1$

$V_2 = -m_2 g\left(l_1\sin\alpha_1 + \frac{l_2}{2}\sin\alpha_2\right)$

$\vdots$

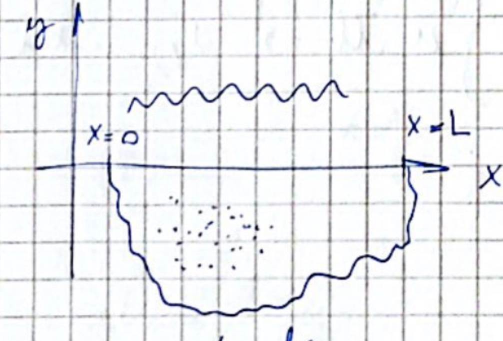
Célfüggvény: $\Rightarrow \sum_k V_k = V = V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Mellékfeltétel:

$l_1 \cdot \cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + \dots + l_n\cos\alpha_n \overset{!}{=} D$

Azt keressük, V mikor lesz minimális?

2. Példa: (Didó királynő)



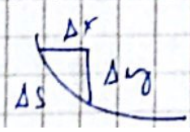
Terület maximális legyen!

↳ adott hosszúság mellett!

(L is adott)

$A = \int_0^L f(x)\,dx = A[f]$ ("Függvénytől függő függvény", "funkcionál")

Görbe hossza:



$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta s^2 = \Delta x^2 \left(1 + f'(x)^2\right) \Rightarrow \Delta s = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$S = \int ds = \int_0^L dx \sqrt{1 + f'(x)^2} \overset{!}{=} H \quad (H \geq L, \text{ hogy értelmes legyen})$$

$S[f]$

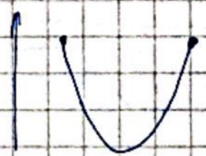
↳ Kényszerfeltétel

$$\left.\begin{array}{ll} C: A[f] & \text{Célfunkcionál} \\ K: S[f] - H \overset{!}{=} 0 & \text{Kényszerfunkcionál} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\text{-et keressük}$$

("Végtelen sok szabadsági fokú rendszer", mert végülis ez is egy egyenlet rendszer, folytonosan végtelen sok egyenletből)

(Ha a max terület félkör alakúnál lesz, a lógó kötélnél a kötél alakja $y = a \cdot ch\,\frac{x}{a} + b$ alakú lesz.)

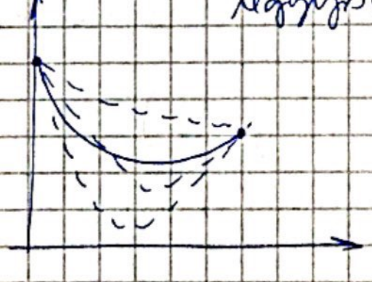
$\Downarrow$



$V[f]$

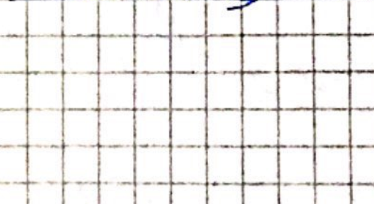
③ Példa: Melyik a leggyorsabb út a két pont között?

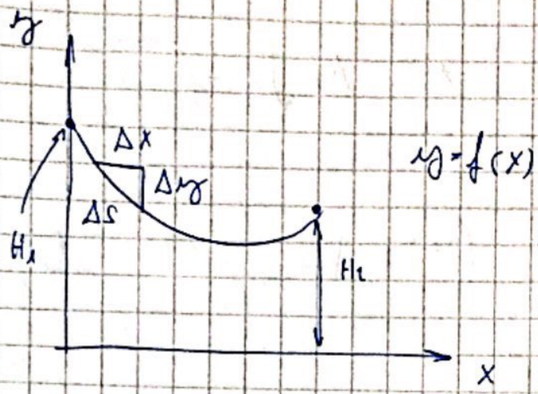
(Ciklois alakú a megoldás)



$T[f] \Rightarrow$ Idő a pálya alakjának a függvénye

Ciklois:





$y = f(x)$

$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v \qquad dt = \frac{ds}{v}$

$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx}{v(x)}$ $\qquad v(x) = ?$ Energiamegmaradásból

$E = \frac{m}{2}v^2 + mg\,y(x) = mgH \qquad v^2 = 2g(H - f(x)) \Rightarrow$

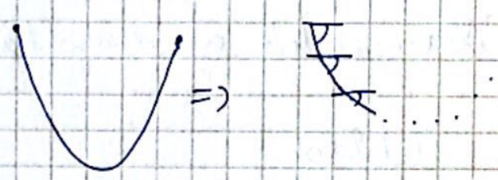
$\Rightarrow v = \sqrt{2g(H - f(x))}$

$\Downarrow$

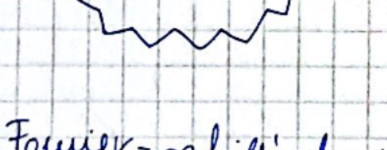
$dt = \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2g(H-f(x))}}\, dx \Rightarrow T = \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^L dx \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2g(H-f(x))}} = T[f]$

Lényegében ezek sok (végtelen) változós problémák:



$\Rightarrow \dots \Rightarrow V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$



$A[f] \rightarrow A(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$

(Fourier-sorfejtéssel is lehet számokat rendelni hozzá, Ritz-féle eljárás)

$$f(x)=\sum_k c_k \varphi_k(x) \rightarrow F[f] \Rightarrow \phi(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$$

(Ritz)

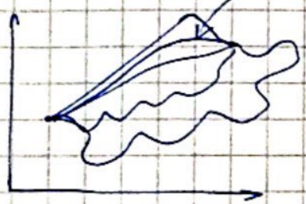
(Ezek a variációszámítás direkt módszerei)

Funkcionál szélsőértéke:

Sima szélsőérték: $f(x) \Rightarrow f'(x) \Rightarrow f'(x)=0$

Funkcionál:

$T[f_1] \Rightarrow T[f_1+\delta f] - T[f_1]$



Megvariáljuk a függvényt

$T[f_2+\delta f] - T[f_2]$

$\vdots$

$T[f_3+\delta f] - T[f_3] \approx 0$

$\Uparrow$

Ezt keressük

Eljárás:

$T[f] \rightarrow$ egyenlet $\rightarrow f_0(x)$

(diffegy stb.) (Az output egy függvény)

$\Uparrow$

Euler-Lagrange-féle egyenletek

A probléma:

$q(x)$ függvény $= ?$ $\quad L(q, q')$ $\quad S = \int_x dx\, L(q, q') = S[q]$

$\hookrightarrow$ Lagrange függvény

$\delta S = 0$ ($q(x)$ kicsi megváltoztatásaira S ne változzon)

$\Rightarrow q(x) + \delta q$ -ra, ezt a $q(x)$ függvényt keressük

(Sokszor van mellékfeltétel is)

6. A variációs feladat Euler-Lagrange differenciálegyenletei

A probléma:

- Keressük $f(x)$ függvényt
- Lagrange-függvény: $L(f, f', x)$
- Ennek integrálja adja f funkcionálját: $C[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(f, f', x)\mathrm{d}x$
- Határfeltételek: $f(x_1) = f_1$ és $f(x_2) = f_2$

Általánosítási lehetőségek:

- $\int L(x, f, f', f'', f''', \ldots)\mathrm{d}x = C[f]$ (A fizikában nem fordulnak elő elsőnél magasabb rendű deriváltak a Lagrange-függvényben, ezért ezzel az altaklánosítással nem élünk.)
- $\int L(f(x), g(x), h(x), \ldots)\mathrm{d}x = C[f, g, h, \ldots]$ (A későbbiekben ezzel fogunk dolgozni.)
- $\int \mathcal{L}\left(f(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, x, y, z\right) \mathrm{d}^3\underline{r} = C[f]$

Változtassuk meg a keresett $f_a(x)$ függvényeket egy kicsiny $\delta f_a = \varepsilon\ \eta_a(x)$-szel. Jegyezzük meg, hogy $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, valamint $\eta_a(x_1) = \eta_a(x_2) = 0$.

A funkcionál értéke ezen a variált függvényen:

$$C[f + \varepsilon\ \eta] = \int_{x_1}^{x_2} L\left(f_a(x) + \varepsilon\ \eta_a(x), f_a'(x) + \varepsilon\ \eta_a'(x), x\right)\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \int_{x_1}^{x_2} \left(L(f_a, f_a', x) + \sum_a^n \frac{\partial L}{\partial f_a}\varepsilon\ \eta_a + \sum_a^n \frac{\partial L}{\partial f_a'}\varepsilon\ \eta_a'\right)\mathrm{d}x$$

Az utolsó lépés során Taylor-sorfejtést végeztünk.
Vegyük észre, hogy $\int_{x_1}^{x_2} L(f_a, f_a', x) = C[f_a]$, így a funkcionál értékének változása a függvény variálása hatására:

$$\delta C = C[f + \varepsilon\ \eta_a] - C[f] = \varepsilon \sum_a^n \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f_a}\eta_a + \frac{\partial L}{\partial f_a'}\eta_a'\right)\mathrm{d}x$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$Q_a(f, f', x) = \frac{\partial L}{\partial f_a} \quad \text{és} \quad P_a(f, f', x) = \frac{\partial L}{\partial f_a'}$$

Így az előző:

$$\delta C = \varepsilon \sum_a^n \int_{x_1}^{x_2} (Q_a\eta_a + P_a\eta_a')$$

Használjuk föl a $P_a\eta_a' = (P_a\eta_a)' - P_a'\eta_a$ összefüggést:

$$\delta C = \varepsilon \sum_a^n \int_{x_1}^{x_2} \left[Q_a\eta_a + (P_a\eta_a)' - P_a'\eta_a\right]\mathrm{d}x = \varepsilon \sum_a^n [P_a\eta_a]_{x_1}^{x_2} + \varepsilon \sum_a^n \int_{x_1}^{x_2} (Q_a - P_a')\eta_a\mathrm{d}x$$

Mivel kikötöttük, hogy az $\eta_a(x)$ függvény x_1 és x_2 helyen 0 értéket vesz föl, ezért $[P_a\eta_a]_{x_1}^{x_2} = 0$, így:

$$\delta C = \varepsilon \sum_a^n \int_{x_1}^{x_2} (Q_a - P'_a)\eta_a \mathrm{d}x$$

A variációs feladat során olyan $f(x)$ függvényt keresünk, melyre a meghatározott funkcionálnak szélsőértéke van, tehát $\delta C = 0$ minden $\eta_a(x)$-re. Ez csak akkor lehetséges, ha:

$$\begin{aligned} Q_a - P'_a &= 0 \\ Q_a &= P'_a \\ \frac{\partial L}{\partial f_a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial f'_a} \end{aligned}$$

Ezek az **Euler-Lagrange differenciálegyenletek**. Ez n darab egyenlet, melyek általában másodrendűek.

Mendei Barna

7. A variációs feladat integráljai. Ciklikus változók. Beltrami-tétel

Egy variációszámítási problémát csupán az Euler-Lagrange egyenletből megoldani sok esetben nagyon nehéz feladat. Van viszont két fontos módszer, ami néhány különleges differenciálegyenletet (vagy egyenletrendszert) segíthet megoldani.

Ciklikus változók:

Vegyük azt a speciális esetet, hogy a Lagrange-függvényünk nem függ valamelyik függvénytől (pl.: $f_1(x)$-től). Ez(eke)t hívjuk *ciklikus változó(k)nak*. Ekkor az 1-es Euler-Lagrange egyenlet:

$$L(f_1, f_2, f_1', f_2', x) \qquad Q_1 = \frac{\partial L}{\partial f_1} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} P_1 = Q_1 = 0$$

Ez azt jelenti, hogy $P_1(f, f', x) = K_1 =$ **áll.**. Ez egy megmaradási tétel, melynek sokszor örülünk. Értékét általában a kezdőfeltételek segítségével határozzuk meg. Nyilván ha több mindentől nem függ a Lagrange-függvény, több ilyen egyenletem lesz.
Ezzel a másodrendű egyenletet (lásd: előző tétel) redukáltuk egy elsőrendűre, tehát egyszerűen leintegráltuk egyszer a differenciálegyeneletet.

Jusson eszünkbe a „pöttymegmaradási-tétel”! Eszerint annyiszor kell integrálni egy differenciálegyenletet (annyi integrációs konstansunk lesz), ahány pötty szerepel benne. Az előzőek alapján már érthető ez a tétel. A másodrendű egyenletből egy elsőrendűt csináltunk (integráltunk), de cserébe keletkezett egy K_1 integrációs állandó. Így a tétel:

Egy differenciálegyenletben a pöttyök és az integrációs konstansok számának összege állandó.
(Éspedig $2 \cdot n$, ha n-ed rendű a differenciálegyenlet.)

Beltrami-tétel:

Vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$B = \sum_a P_a f_a' - L(f_a, f_a', x)$$

Ennek x-szerinti teljes deriváltja:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = \sum_a \left(P_a' f_a' + P_a f_a''\right) - \frac{\partial L}{\partial x} - \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial f_a} f_a' + \frac{\partial L}{\partial f_a'} f_a''\right) =$$

$$= \sum_a f_a'' \left(P_a - \frac{\partial L}{\partial f_a'}\right) + \sum_a f_a' \left(P_a' - \frac{\partial L}{\partial f_a}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} =$$

$$= \sum_a f_a' \left(P_a' - Q_a\right) - \frac{\partial L}{\partial x}$$

Felhasználtuk a szorzatfüggvény differenciálási szabályát, a parciális deriváltak összegére bontottuk a teljes deriváltat, ezután a közvetett függvény diff.szabályát használtuk fel. Ezek elvégzése során ráismertünk az eddig használt P_a és Q_a mennyiségeinkre. Látjuk, hogy ha teljesül a Euler-Lagrange-egyenlőség (az egyes P_a-k teljes deriváltjai megegyeznek a hozzájuk tartozó Q_a-kkal), akkor:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial L}{\partial x}$$

Ez a **Beltrami-tétel**, Eugenio Beltrami olasz matematikusról elnevezve. Vegyük észre, hogy ha L **nem függ** x**-től**, a független változótól, akkor B egy megmaradó mennyiség, amire igazak az integrációs konstansról előbb említettek. Ilyen típusú variációszámítási problémával általában akkor találkozunk, ha valamilyen szimmetriája van a rendszernek, amit leírunk. (Például szögfüggetlen, eltolási invarianciája van, stb.)

Tehát $K = const$ jelöléssel:

$$\sum_a P_a f_a' - L(f_a, f_a', x) = K$$

Mendei Barna
Hamar Dávid

8. Feltételes variációs problémák, Lagrange-multiplikátor. Globális és lokális feltételek

A témához kapcsolódó előadás:
7. előadás

Továbbá a variációszámításhoz a fizikában(inkább érdekes kis olvasmánynak, mintsem tanulni belőle):Feynman Mai fizika, 6. kötet, 72.fejezet

A variácószámítással meg tudunk könnyedén oldani olyan problémákat, mint például egy ágyúgolyó pályája, ha ismerjük annak kezdő és végpontját. Azonban gyakran találkozhatunk olyan problémákkal, amikor egyébb feltételek is szembe jönnek, ilyen pl amikor egy kötelet kifeszítünk A és B pont között, s ilyenkor a kötél alakját maga a kötél hossza is befolyásolja, azaz van egy kényszerünk. A feladat egy bonyolultabb esete, amikor a kötél mondjuk egy felületre fölfeküdve lóg le, ilyenkor egy további kényszer jön be. A kérdés, hogyan oldjuk meg ezeket a problémákat, a varázsszó pedig a paramétere.., ja mégsem, mármint a másik varázsszó, azaz a Lagrange-multiplikátor.

Nézzük meg az első példát: Megadjuk a kötél potenciális energiáját leíró funkcionált.

$$V[f] = \int_{x_1}^{x_2} \rho g f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

A kényszerünk a következő, van egy H hosszúságu kötelünk, aminek keressük az alakját. Jelen esetben egy globális feltételről van szó, a kötél hossza nem függ attól, hogy a kötél, hogyan áll egy adott pontban, a globális feltételeket integrális feltételnek is nevezik. jelen esetben a kénnyszer:(innen azonnal szembe tűnik miért is integrális)

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx - H = 0$$

Hasonló módon mint,a szélsőértékfeladatok esetén, a kényszert most is megszorozva a Lagrange-multiplikátorral hozzáadjuk az eredeti funkcionálunkhoz.

$$C[f] = V[f] + \lambda S[f] = \int_{x_1}^{x_2} \rho g f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \;+ \lambda\rho g\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Megjegyzés: H azért nem került bele, mivel a deriválásoknál úgy is kiesik, $\lambda\rho$ azért került bele, hogy egyszerűsíthessünk vele. Jelen esetben $C[f]$ funkcionálja és $C(\lambda)$ függvénye.
Mivel L nem függ x-től érdemes a Beltrami-tételt alkalmazni.

$$Const = \frac{-1(f+\lambda)}{\sqrt{1+f'^2}}$$

Az egyenletet helyetesítéses integrállal megoldjuk, megkapjuk, hogy a görbe függvénye koszinuszhiperbolikusz és a multiplikátor mint függőleges irányú eltolás jelent meg a megoldásban.

A második példában, melyben a görbének fel kell feküdnie egy felületre a függvényünknek minden egyes pontban teljesítenie kell egy feltételt, mégpedig, hogy az adott pontban érintkezik a felülettel. Ezt a kényszert hívjuk lokális, más néven differenciális feltételnek.
Nézzűk meg hogy néz ez ki a jelen esetben.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

$$V = \rho g \int_{x_1}^{x_2} z(x)\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\, dx$$

Továbbá ki kell elégítenünk 2 feltételt:

K_1(globális):$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\, dx - H = 0$

K_2(lokális):$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

A továbbiakban ugyan úgy járunk el, mint eddig, hozzáadjuk a kényszereinket a az eredeti Lagrangehoz.Most azonban a lokális feltétel multiplikátora egy függvény lesz,
nevezzük $\mu(x)$-nek.

$$L = z(x)\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}$$

$$L' = z(x)\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} + \frac{\mu(x)}{2}(x^2 + y(x)^2 + z(x)^2 - R^2 = 0)$$

$$L'' = z(x)\sqrt{1 + y'(x)^2 + z(x)'^2} + \frac{\mu(x)}{2}(x^2 + y(x)^2 + z(x)^2 - R^2) + \lambda\sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}$$

Ha megnézzük $L''(x, y, z, y', z', \mu)$ függvénye míg a λ egy paraméter az egyenletekben.
A továbbiakban 3 darab E-L egyenletet írunk fel y-ra, z-re és μ-re.

$$P_\mu = \frac{\partial L''}{\partial \mu'} = 0$$

(mivel L'' nem függ μ'-től)
Azt kaptuk, hogy a kényszer maga is mint Euler-Lagrange egyenlet jelenik meg.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L''}{\partial \mu'} = \frac{\partial L''}{\partial \mu}$$

$$0 = \frac{1}{2}(x^2 + y(x)^2 + z(x)^2 - R^2)$$

A három egyenlet együttesen meghatározza a $\mu(x)$-et,a $z(x)$-et és $y(x)$-et egy lineáris egyenletrendszerben. Innen ki lehet fejezni $z''(x) = F(x, y, z, y', z', \mu, \lambda)$-et és
a $y''(x) = G(x, y, z, y', z', \mu, \lambda)$-et.
A probléma megoldásához ki kell ejtenem μ-t a fenti egyenletekből. Ehez kétszer le kell deriválni a kényszert.

$$K_2'' = 1 + y'^2 + z'^2 + yy'' + zz'' = 0$$

Ha y'' helyére beírjuk G-t és z'' helyére F-t, kapunk egy egyenletet amiből ki tudjuk fejezni μ-t. MIkor már megvan a $\mu(y, y', z, z'x, \lambda)$ függvény, ezt vissza helyetesíthejük F-beés G-be, így megkapjuk az $y''(x) = g(x, y, z, y', z', \lambda)$,$z''(x) = f(x, y, z, y', z', \lambda)$ függvényeket.Ezekben az explicit diffegyenletekben nem szerepel már fölösleges változó, kezdőfeltételekkel programok meg tudják oldani.
A μ fizikai jelentése az az erő, amivel a gömb hatott a testre. A multiplikátorok geometriai, fizikai jelentése általában csak akkor derül ki, mikor már végigszámoltuk a feladatot.
A fizika azon ága, mely a kényszererőkkel foglalkozik a kinetosztatika.
Összefoglalva:

- a globális(integrális) kényszer szabad paraméterként jelenik meg.

- a lokális(differenciális) kényszer egy pontról pontra változó Lagrange multiplikátor, + 1 változóként jelenik meg az egyenletekben, a kényszert le kell deriválni, és így ki lehet fejezni a multiplikátort.

Ha több feltételt kell egyszerre teljesíteni, mindegyiket egy multiplikátorral megszorozva hozzáadjuk az eredeti Lagrange függvényhez, és az előbb bemutatott módon végigszámoljuk.

Hollósy Péter

9. Ortogonális görbevonalú koordinátarendszerek

A témához kapcsolódó előadások:
10. előadás *11. előadás*

Ortogonális: A lokális bázisvektorok ortogonálisak. Bár vannak koordinátarendszerek, melyben nem azok, a fizikában azok kevésbé fordulnak elő.
Görbevonalú: A paramétervonalak görbék. Míg pl. a Descartes-ben egyenesek, a polárban vannak görbék is.
Koordinátarendszerek: Ugyan azt a halmazt több féle képpen is felparaméterezhetjük. Ezek között a felparaméterezések között ismertek összefüggések, így egy koordinátarendszerről áttérhetünk egy másikra. Ennek az egésznek az a lényege, hogy egy másik koordinátarendszerben egy fizikai problémát esetleg egyszerűbben fel tudunk írni. Tehát így pár oldalnyi szenvedéssel a koordinátarendszerekkel megspórolhatunk 20 oldalnyi számolás után 10 oldalnyi számolást.

(Órán ennél a résznél sokat beszéltünk ismét a térképekről, atlaszokról, ilyesmikről. Ezekről itt annyit nem írok, hiszen ezek kellettek már vektorszámításból is.)

Az eredeti koordinátákat $x, y ... x_\mathrm{k}$-kal jelöljük, az újakat nagy $U, V ... U_\mathrm{K}$-kal. Ezek a koordináták egymásból megadhatók úgy, hogy minden ponthoz egyértelműen rendelünk pontpárt, méghozzá folytonosan. (=Azok a pontok, amik az egyik rendszerben közel voltak egymáshoz, a másikban is közel lesznek.)

$$U_\mathrm{K}(x_\mathrm{l}) \iff x_\mathrm{l}(U_\mathrm{K})$$

Fontos, hogy az egyes koordináták a másik rendszer összes koordinátájától is függhet. (Sőt, általában ez így van.) Ezeknek a függvényeknek minden pontban egyértelműeknek kell lennie. Levezetés nélkül állítjuk, hogy ez akkor teljesülhet, ha a következő mátrix létezik:

$$A_\mathrm{Kl} = \frac{\partial U_\mathrm{K}}{\partial x_\mathrm{l}}$$

És érvényes rá a következő feltétel:

$$\det \underline{\underline{A}} \neq 0$$

sehol! Hiszen $\underline{\underline{A}}$ nem konstans mátrix. Ha egy pontban ez az egyenlőtlenség nem élne, akkor abban a pontban nem lenne egyértelmű ez a leképezés, nem lehetne invertálni. Érezhető, hogy ez egy nem konstans mátrixnál egy nehezen teljesíthető megkötés.

Létezik visszamátrix is:

$$B_\mathrm{lK} = \frac{\partial x_\mathrm{l}}{\partial U_\mathrm{k}}$$

Ennél is fenn kell állnia annak, hogy $\det \underline{\underline{B}} \neq 0$. Ez következik az $\underline{\underline{A}}$-ra kiszabott feltételből. Továbbá

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}$$

(Megjegyzés: dgy azt mondta, hogy ezt az összefüggést be is fogjuk látni, de ezt a levezetést én nem találtam meg. Ha valaki tudja, hogy hol van, légyszi szóljon, és akkor kiegészítem ezt a részt.)

Nézzünk egy példát:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

ekkor a mennyiségeink:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \quad U_1 = r \\ x_2 &= y \quad U_2 = \varphi \end{aligned}$$

Nézzük meg a deriváltjainkat:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial x}{\partial r} &= \cos\varphi \qquad \tfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \\ \tfrac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r\sin\varphi \quad \tfrac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi \end{aligned}$$

$\underline{\underline{A}}$ mátrixunk így:

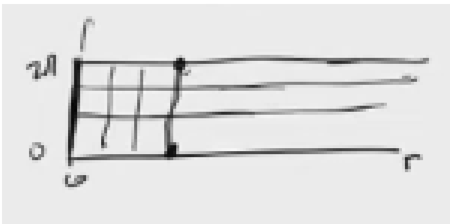
$$\underline{\underline{A}} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}$$

A számlálóban ugye az új, a nevezőben a régi mennyiségek szerepelnek. Tudjuk, hogy $\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}$. Tehát

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\partial x}{\partial U} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Látható, hogy $\det \underline{\underline{B}} = r$. De akkor ha $r = 0$, akkor a determináns nulla. Ez azt jelenti, hogy ez a mátrix abban a pontban nem invertálható. Ez a koordináta rendszer nem más volt, mint az egyszerű polár koordináta rendszer. Tehát az egyik leggyakrabban használt koordinátarendszer nem tisztességes. Szerencsére "egy pont az nem pont".
Ha nagyon meg szeretnénk oldani ezt a problémát, megoldható úgy, hogy egy második térképet is készítünk, melynél nem abban a pontban van szingularitás.

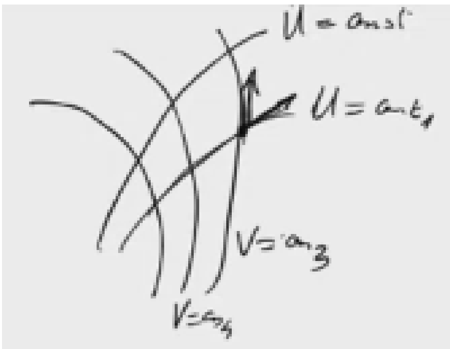
A polár koordinátarendszer esetében még fontos kiemelni a következőt:



12. ábra. Polár koordinátarendszer paramétersíkja.

A 12. ábrán látható, hogy a $\varphi =$ konstans vonalak csak 0-tól 2π-ig mennek. Ezért ilyenkor nekünk külön meg kell adnunk, hogy a 2π-s egyenesen lévő pontok ugyan azok, mint amik a 0-ás egyenesen vannak. Továbbá itt látható, hogy az összes $r = 0$ pont az ugyan az!

Görbevonalú koordinátarendszereknél a feladat, hogy a tér minden egyes pontjában fel kell venni egy lokális bázist. Fontos gondolat, hogy itt egyszerre paraméterezzük fel a teret, és alkotjuk meg a lokális bázisainkat. Ha ezt megtettük, akkor a tér összes pontjában lesz egy lokális bázisunk, melyeken értelmezhetünk mindenféle mezőket. Ezt fogjuk megnézni, hogyan



13. ábra. Egy koordinátarendszer szemléltetése.

kell.

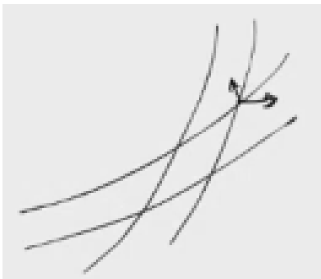
Az ábrán látható egy görbevonalú koordinátarendszer. Akkor lesz ortogonális, ha az $U =$ konstans és a $V =$ konstans vonalak mindenhol merőlegesek egymásra. Természetesen e nélkül a tulajdonság nélkül is lehet értelmezni egy koordinátarendszert, de általában az ortogonálisak sokkal kényelmesebbek. Ami kötelező, hogy azonos tengelyű koordinátavonalak ne metszék egymás. (Pont ezért van probléma a polár koordinátánál $r = 0$-ban, mert ott az összes $\varphi =$ konstans vonal metszi egymást.)
Fontos kitétel még, hogy két különböző koordinátavonal nem lehet egymás érintője, ugyanis akkor a bázisvektorok nem lennének lineárisan függetlenek.

Néhány probléma:
Egyrészt a bázisvektoroknak a hossza nem egyértelmű, azt csak mi tudjuk megadni.
Továbbá nagyon egyszerű volt felírni a következőt:

$$x(U) \iff U(x)$$

Viszont (zh-kon is tapasztaltuk) hogy ezt kiszámolni már nem olyan egyszerű, sőt, van amikor nem lehet. Pl: $x = u \cdot v - \sin \frac{u}{v}$. Ebből nem lehet kifejezni sem u-t, sem v-t.

Meg lehet tenni a következőt:



14. ábra. Einstein féle négyláb, avagy vierbein.

A 14. ábrán azt csináljuk, hogy egy pontban nem a koordinátavonalak által kifeszített bázist használjuk, hanem ott mi kézzel megadunk egyet. Ezt meg lehet csinálni, olykor érdemes. Einstein-féle négylábaknak szokás hívni. (Mert ő 4 dimenzióban csinált ilyeneket.)

Kadlecsik Ádám

10. Ívelemnégyzet, metrikus tenzor, Lamé-féle mennyiségek, Jacobi-determináns

A témához kapcsolódó előadások:
10. előadás *11. előadás*

Vegyünk egy sokaságot, melyet reprezentálunk, majd paraméterezés segítségével folytonosan leképezünk. Ekkor az eredeti (reprezentált) koordinátákról egy új koordinátatrendszerre térünk át, X_k-ról áttérünk U_k-kra. A leképezésnek egyértelműnek kell lennie, így $X_k\left(U_l\right) \Longleftrightarrow U_l\left(X_k\right)$. Mindebből következően:

$$A_{kl} = \frac{\partial U_k}{\partial X_l} \tag{15}$$

$$det\left(\underline{\underline{A}}\right) \neq 0$$

$$B_{lk} = \frac{\partial X_l}{\partial U_k} \tag{16}$$

$$det\left(\underline{\underline{B}}\right) \neq 0$$

Természetesen valamikor nem megy az invertálás analitkusan. (*Példa*)
Legyen egy Descartes-féle koordináta rendszer, melyeben az $\underline{r}$ vektort megadják $x; y; z$ koordináták. Térjünk most át egy másik koordinátarendszerbe, ekkor az $\underline{r}$ vektort meghatározhatjuk $U_1; U_2; U_3$ függvényeként is. Ha vesszük $U_2 = konst$ és $U_3 = konst$ vonalakat, akkor görbének az érintővektora az alábbi módon fog alakulni:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial U_1} = \underline{t}^{(1)}(U_1; U_2; U_3) \tag{17}$$

Általánosan:

$$\underline{t}^{(k)} = \frac{\partial \underline{r}(U_k)}{\partial U_k} \tag{18}$$

Az egy koordinátához tartozó vonalak érintővektorai vektormezőt alkotnak. A $\underline{t}^{(k)}$ vektoroknak lineárisan függetlennek kell leniük, mivel bázis alkotnak, ebből következően a vegyesszorzatuk nem adhat nullát.

$$\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial U_1}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial U_2}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial U_3}\right) = \left(\underline{t}^{(1)}; \underline{t}^{(2)}; \underline{t}^{(3)}\right) \neq 0 \tag{19}$$

Példának az egyik legegyszerűbb eset, mikor Descartes-féle koordinátarendszerből térünk át polárkoodinátákra. Ebben az esetben:

$$X_1 = x = r \cdot cos(\varphi); \quad X_2 = y = r \cdot sin(\varphi); \quad U_1 = r; \quad U_2 = \varphi \tag{20}$$

Felírhatjuk két dimenzióban a $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrixot:

$$B_{lk} = \frac{\partial X_l}{\partial U_k} = \frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) \\ -r \cdot sin(\varphi) & r \cdot cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{21}$$

És ekkor a $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ determinánsa nem lesz, és nem is lehet nulla, hiszen invertálhatónak kell lennie, mivel a különböző koordinátarendszerek közti átszámítás lehetséges. A $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ mátrix determinánsát

nevezzük Jacobi-determinánsnak.
Ugyanez három dimenzióban, általánosan:

$$\underline{\underline{J}} = \left|\frac{\partial(\underline{r})}{\partial \underline{u}}\right| = \left|\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(U_1;U_2;U_3}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U_1} & \frac{\partial x}{\partial U_2} & \frac{\partial x}{\partial U_3} \\ \frac{\partial y}{\partial U_1} & \frac{\partial y}{\partial U_2} & \frac{\partial y}{\partial U_3} \\ \frac{\partial z}{\partial U_1} & \frac{\partial z}{\partial U_2} & \frac{\partial z}{\partial U_3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{22}$$

A Jacobi-determináns n dimenzióban:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial U_1} & \frac{\partial X_1}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial U_n} \\ \frac{\partial x}{\partial U_1} & \frac{\partial x}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial U_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial U_1} & \frac{\partial X_n}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial U_n} \end{vmatrix} \tag{23}$$

Ha a $\underline{t}^{(k)}$ vektorokat kiírjuk a komponensek szerint, akkor észrevehetjük, hogy szintén a Jacobi determinánst kapjuk. így felírhatjuk
Vegyünk fel a téren minden pontban egy bázist, de úgy, hogy a bázisvektorok a koordinátarendszer által meghatározott konstans vonalak érintővektorai legyenek . Ezt nevezzük lokális bázisnak. Vektormezők esetében a vekorok attól is függnek, hogy hol vannak, a lokális bázison kell őket felbontani.
Nézzük meg, hogy hogyan néz ki a síkbeli polárkoordinátarendszer lokális bázisa:

$$\underline{t}^{(r)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\underline{t}^{(\varphi)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \cdot sin(\varphi) \\ r \cdot cos(\varphi) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Ha ellenőrizzük, hogy ortogonálisak-e egymásra a $\underline{t}^{(k)}$ vektorok, akkor kiderül, hogy igen.

$$\underline{t}^{(r)}\underline{t}^{(\varphi)} = 0$$

Felírhatjuk az ívelem négyzetét is, hogy az $x; y; z$ irányú kis megváltozások négyzetösszege:

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + dz^2 \tag{26}$$

Azonban másik koordinátarendszerben x_k-k mind felírhatóak a másik változók szerint is:

- $x(U; V; W)$
- $y(U; V; W)$
- $z(U; V; W)$

Így megkapjuk a következőt:

$$\mathrm{dx} = \mathrm{x}\left(\mathrm{U} + \mathrm{dU}; \mathrm{V} + \mathrm{dV}; \mathrm{W} + \mathrm{dW}\right) - \mathrm{x}(\mathrm{U}; \mathrm{V}; \mathrm{W}) \tag{27}$$

Majd (27)-et sorbafejtve:

$$\mathrm{dx} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{U}}\mathrm{dU} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{V}}\mathrm{dV} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{W}}\mathrm{dW} \tag{28}$$

A fentiek y-ra és z-re hasonlóképpen felírhatóak.
Tehát általánosan:

$$\mathrm{dx_k} = \frac{\partial \mathrm{x_k}}{\partial \mathrm{U_L}}\mathrm{dU_L} \tag{29}$$

A (18) összefüggés alapján azonban tudjuk, hogy $\underline{t}^{(k)} = \dfrac{\partial \underline{r}(U_k)}{\partial U_k}$, így a (29) felírható következőképpen is:

$$\mathrm{d\underline{r}} = \mathrm{\underline{t}^{(L)}dU_L} \tag{30}$$

Ekkor az ívelemnégyzet:

$$\mathrm{ds^2} = |\mathrm{d\underline{r}}|^2 = \mathrm{d\underline{r}} \cdot \mathrm{d\underline{r}} = \left(\mathrm{\underline{t}^{(L)}dU_L}\right) \cdot \left(\mathrm{\underline{t}^{(M)}dU_M}\right) = \left(\mathrm{\underline{t}^{(L)}\underline{t}^{(M)}}\right) \cdot \mathrm{dU_L dU_M} \tag{31}$$

A $\left(\underline{t}^{(L)}\underline{t}^{(M)}\right)$ kifejezés egy tenzor, melyet elnevezünk g_{LM}-nek. Ez a metrikus tenzor.
Így tehát az ívelemnégyzet:

$$\mathrm{ds^2} = \mathrm{g_{LM} dU_L dU_M} \tag{32}$$

Mivel ds^2 egy négyzet, ezért a metrikus tenzornak pozitív definitnek kell lennie.
Ha megnézzük egy esetre a g tenzort, a síkbeli polárkoordináta rendszerre, akkor megállapíthatjuk, hogy valóban igaz a pozitív definit:

$$\underline{\underline{g}}^{\text{polár}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ds^2} = \begin{pmatrix} \mathrm{dr} & \mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{dr} \\ \mathrm{d}\varphi \end{pmatrix} = \mathrm{dr^2 + r^2 d}\varphi^2$$

Ortogonális koordinátarendszer esetében a metrikus tenzor diagonális. Pozitív definit tulajdonságára alapozva a nem nulla komponenseket felírhatjuk számok négyzeteként. Ekkor ki fog derülni az alábbi:

$$g = \begin{pmatrix} h_1^2 & & \\ & h_2^2 & \\ & & h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{(1)}^2 & & \\ & t_{(2)}^2 & \\ & & t_{(3)}^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Tehát:

$$h_k = \left|t^{(k)}\right|$$

A h_k-kat nevezzük *Lamé*-féle mennyiségeknek.

$$\mathrm{ds^2} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{l=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{g_{kl} dU_k dU_l} = \mathrm{h_{(1)}^2 dU_{(1)}^2 + h_{(2)}^2 dU_{(2)}^2 + h_{(3)}^2 dU_{(3)}^2} \tag{34}$$

Ha paraméterezéssel áttérünk egy másik koordinátarendszerbe, akkor vinni kell magunkkal a Jacobi determinánst.

$$\mathrm{dV = h_1\, h_2\, h_3\, dU_1\, dU_2\, dU_3}$$

Ekkor a $\mathrm{dV = h_1\, h_2\, h_3}$ lesz a Jacobi determináns.

$$g_{KL} = \underline{t}^{(k)} \cdot \underline{t}^{(L)} = \begin{pmatrix} (& \underline{\tilde{t}}^{(1)} &) \\ (& \underline{\tilde{t}}^{(2)} &) \\ (& \underline{\tilde{t}}^{(3)} &) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{t}^{(1)} & \underline{t}^{(2)} & \underline{t}^{(3)} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{\underline{B}} \tag{35}$$

Ebből kiderül, hogy ha vesszük a metrikus tenzor determinánsát, akkor a Jacobi determináns négyzetét kapjuk.

$$det(g) = J^2 \tag{36}$$

Nézzük meg példának a térbeli polárkkordinátarendszert (mert ezt jó tudni fejből):

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} rsin(\vartheta)cos(\varphi) \\ rsin(\vartheta)sin(\varphi) \\ rcos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{37}$$

Ekkor megkapható deriválással:

- $h_r^2 = \underline{t}_{(r)}\underline{t}_{(r)} = 1$
- $h_\vartheta^2 = \underline{t}_{(\vartheta)}\underline{t}_{(\vartheta)} = r^2$
- $h_r^2 = \underline{t}_{(r)}\underline{t}_{(r)} = r^2sin(\vartheta)$

Tehát a Jacobi determináns:

$$J = \sqrt{det(g)} = \sqrt{r^4sin^2(\vartheta)} = r^2sin(\vartheta)$$

Sok sikert a vizsgához!
Tibiássy Adalbert

Megjegyzés

Kadlecsik Ádám: Első oldal aljához → A polár koordinátarendszer Jacobi determinánsa pont hogy nulla lesz egy pontban, $r = 0$-ban, mivel $\det\underline{\underline{B}} = r$.

11. Vektorderiváltak kifejezése ortogonális görbevonalú koordinátarendszerekben

Gradiens:

Definíció szerint:

$$\mathrm{d}\Phi = \Phi(\underline{r} + \underline{\delta}) - \Phi(\underline{r}) = (\mathrm{grad}\,\Phi)\underline{\delta}$$

Ez a következő alakban is fölírható (pl.: gömbi polárkoordinátákkal):

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$$

A $\underline{\delta}$ kis elmozdulás:

$$\underline{\delta} = \mathrm{d}\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \underline{t}^{(r)}\mathrm{d}r + \underline{t}^{(\vartheta)}\mathrm{d}\vartheta + \underline{t}^{(\varphi)}\mathrm{d}\varphi = h_r\underline{e}^{(r)}\mathrm{d}r + h_\vartheta\underline{e}^{(\vartheta)}\mathrm{d}\vartheta + h_\varphi\underline{e}^{(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$$

Ebből:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi = (\mathrm{grad}\,\Phi)\underline{\delta} = h_r(\mathrm{grad}\,\Phi\ \underline{e}^{(r)})\mathrm{d}r + h_\vartheta(\mathrm{grad}\,\Phi\ \underline{e}^{(\vartheta)})\mathrm{d}\vartheta + h_\varphi(\mathrm{grad}\,\Phi\ \underline{e}^{(\varphi)})\mathrm{d}\varphi = \\ = h_r(\mathrm{grad}\,\Phi)_r\mathrm{d}r + h_\vartheta(\mathrm{grad}\,\Phi)_\vartheta\mathrm{d}\vartheta + h_\varphi(\mathrm{grad}\,\Phi)_\varphi\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Így fenn kell állnia a következőnek:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = h_r(\mathrm{grad}\,\Phi)_r\mathrm{d}r + h_\vartheta(\mathrm{grad}\,\Phi)_\vartheta\mathrm{d}\vartheta + h_\varphi(\mathrm{grad}\,\Phi)_\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Ebből a gradiens:

$$(\mathrm{grad}\,\Phi)_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad (\mathrm{grad}\,\Phi)_\vartheta = \frac{1}{h_\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \qquad (\mathrm{grad}\,\Phi)_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

Általánosan:

$$(\mathrm{grad}\,\Phi)_k = \frac{1}{h_k}\frac{\partial \Phi}{\partial U_k}$$

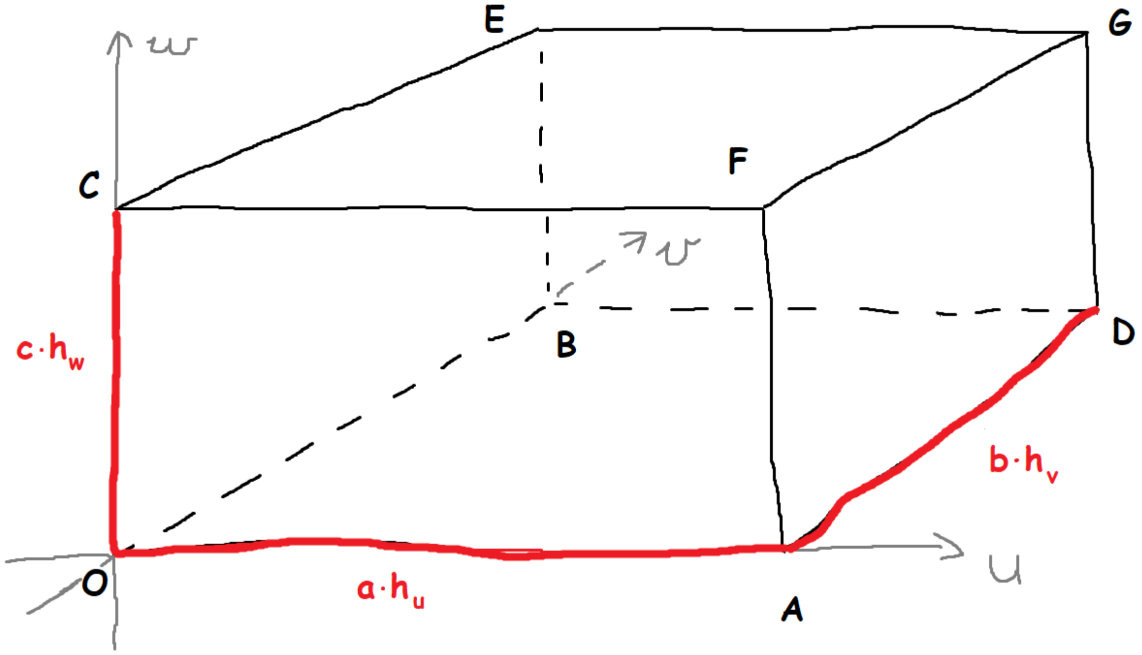
Divergencia:

Vektorszámításon megtanultuk a divergencia koordinátamentes értelmezését, melyet a Gauss-tételből vezettünk le:

$$\oint_{\partial V} \underline{v}(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{F} = \int_V \mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{r})\,\mathrm{d}V \approx \mathrm{div}\,\underline{v}\Delta V$$

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint_{\partial V} \underline{v}(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{F}\right)$$

A vizsgálandó ΔV térfogatrészt határolják a koordinátavonalak. Ezek általánosan egy paralelepipedont határoznak meg így. Ortogonális koordinátarendszerben ez téglatesthez tart. Vizsgáljuk meg a következő kis téglatestet, mely az u, v, és w koordinátavonalakkal van határolva:



Az O pontban a divergencia:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \left(\int_{OBEC} + \int_{ADGF} + \int_{OAFC} + \int_{BDGE} + \int_{OADB} + \int_{CFGE} \right)$$

Nézzük meg az integrálok összegét az $OBEC$, $ADFG$ lapokra:

$$\int_{OBEC} \underline{v}(u=0) \cdot \left(-\underline{e}^{(u)}\right) \, \mathrm{d}A = -v_u(u=0) \cdot h_v h_w \cdot bc$$

$$\int_{ADGF} \underline{v}(u=a) \cdot \underline{e}^{(u)} \, \mathrm{d}A = v_u(u=a) \cdot h_v h_w \cdot bc$$

Ezek összege:

$$\int_{OBEC} + \int_{ADGF} = bc(h_v h_w \cdot v_u(a) - h_v h_w \cdot v_u(0)) \approx bc \left(\frac{\partial (v_u h_v h_w)}{\partial u} a \right)$$

A többi lappár:

$$\int_{OAFC} + \int_{BDGE} = abc \left(\frac{\partial (v_v h_u h_w)}{\partial v} \right) \qquad \int_{OADB} + \int_{CFGE} = abc \left(\frac{\partial (v_w h_u h_v)}{\partial w} \right)$$

Így a divergencia:

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial (v_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial (v_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial (v_w h_u h_v)}{\partial w} \right)$$

Laplace-operátor:

A Laplace-operátor definíció szerint:

$$\triangle \Phi(\underline{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$$

Tehát csak be kell helyettesíteni a divergencia képletébe a gradiens komponenseit:

$$\triangle \Phi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) \right]$$

Rotáció:

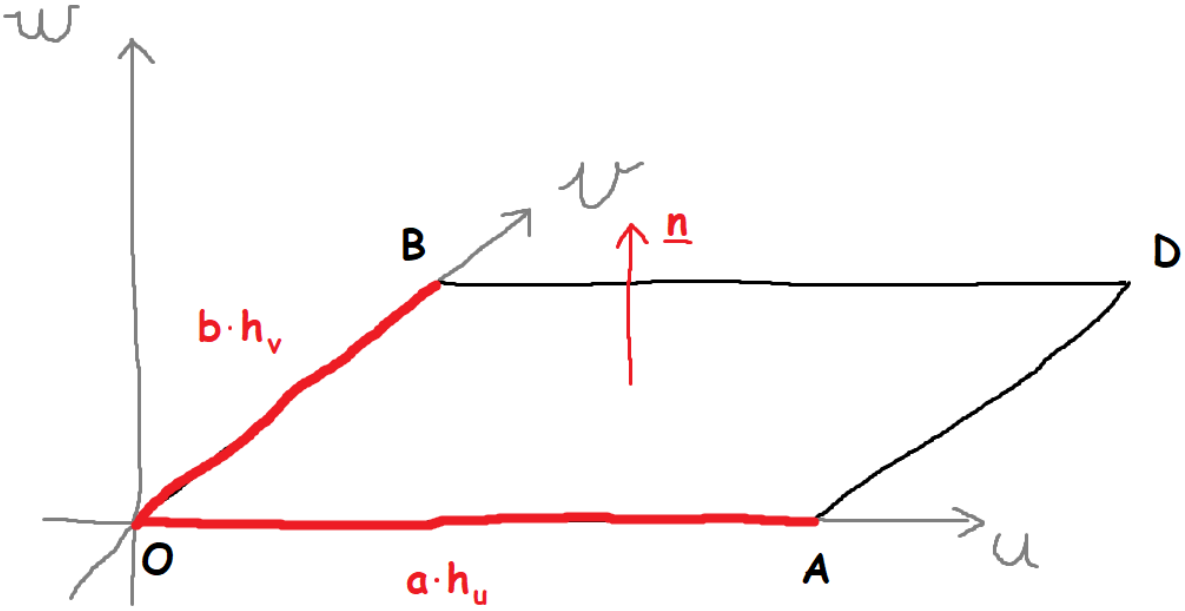
A rotáció koordinátamentes értelmezése vektorszámításról:

$$\oint_{\partial A} \underline{v}(\underline{r})\ \mathrm{d}\underline{r} = \int_A \mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r})\mathrm{d}\underline{F}$$

$$\underline{n}\ \mathrm{rot}\,\underline{v} = \lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{1}{\Delta A} \oint_{\partial A} \underline{v}(\underline{r})\ \mathrm{d}\underline{r} \right)$$

Itt $\underline{n}$ az A felület normálvektora.

Vizsgáljuk a következő kicsiny téglalapot az u, v, w koordinátarendszerben:



Látszik, hogy itt a rotáció:

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_w = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{1}{\Delta A} \left(\int_{OA} + \int_{AD} + \int_{DB} + \int_{BO} \right)$$

Az $OA - DB$ oldalpárokra az integrál:

$$\int_{OA} \underline{v}(v=0) \cdot \underline{e}^{(u)}\ \mathrm{d}u = v_u(v=0) \cdot a \cdot h_u$$

$$\int_{DB} \underline{v}(v=b) \cdot \left(-\underline{e}^{(u)}\right)\ \mathrm{d}u = -v_u(v=b) \cdot a \cdot h_u$$

Ezek összege:

$$\int_{OA} + \int_{DB} = a(h_u v_u(0) - h_u v_u(b)) \approx a \left(\frac{\partial(-v_u h_u)}{\partial v} b \right)$$

A másik pár:

$$\int_{AD} + \int_{BO} = ab \left(\frac{\partial(v_v h_v)}{\partial u} \right)$$

Végül a rotáció:

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_w = \frac{1}{h_u h_v} \left(\frac{\partial v_v h_v}{\partial u} - \frac{\partial v_u h_u}{\partial v} \right) \quad (\mathrm{rot}\,\underline{v})_u = \frac{1}{h_v h_w} \left(\frac{\partial v_w h_w}{\partial v} - \frac{\partial v_v h_v}{\partial w} \right)$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_v = \frac{1}{h_u h_w} \left(\frac{\partial v_u h_u}{\partial w} - \frac{\partial v_w h_w}{\partial u} \right)$$

Mendei Barna

12. Komplex differenciálhatóság, Cauchy-Riemann-egyenletek. Harmonikus párok

A témához kapcsolódó előadások:
15. előadás *17. előadás* [1]

Komplex differenciálhatóság és Cauchy-Riemann-egyenletek

Cél: a komplex függvényekre kiterjeszteni a differenciálás fogalmát.

Létezik $w = f(z)$ komplex függvény. Ezt fel kell bontani képzetes és valós részekre algebrai úton (vagy lásd később: a varázsformula segítségével). Így a kövezetkezőt kapjuk $f(z) = \Phi + i\Psi$, ahol szükséges teljesülnie az alábbi egyenletrendszer, hogy a komplex függvény differenciálható legyen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

E két egyenletet nevezzük Cauchy-Riemann-egyneleteknek.

Állítás: Ha egy komplex függvény egyszer differenciálható, akkor végtelenszer differren-ciálható.

Bizonyítás: $w = f(z) = \Phi + i\Psi$ komplex függvényre igaz a Cauchy-Riemann-egyenlet, azaz:

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad \text{és} \qquad \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$f'(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - i\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

A Young-tétel felhasználásával:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Állítás: Laplace operátort hattatva egy differenciálható komplex fügvény valós illetve képzetes részére nullát kapunk, azaz: $\triangle\Phi = 0$ és $\triangle\Psi = 0$

Bizonyítás:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

Azaz

$$\triangle\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Továbbá

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

[1] kb. 30:34-ig

Azaz

$$\triangle\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

Ebből következik, ha egy kopmlex függvény valós vagy képzetes részére hattatott Laplace-operátor nem nulla, akkor a komplex függvény nem differenciálható.

Harmonikus párok

Harmonikus pároknak nevezzük azon valós kétváltozós függvénypárokat, melyek egy komplex függvény valós és képzetes részét alkotják. Azaz

$$\Phi(x, y) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \text{és} \quad \Psi(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$$

Ha ismert valamely a valós vagy a képzetes része, akkor a másik meghatározható egy bonyolultabb integrálással (példa: lásd dgy által küldött 2016-os matmód FOKA jegyzteben) A harmonikus pár megtalálása sokkal egyszerűbb a Varázsformula, melyet Dávid Gyula saját bevallása szerint egy 1950-es években írt orosz hidrodinamikakönyvben olvasott.[2]

A Varázsformula

Egy kétváltozós $\Phi(x, y)$ függvényhez tartozó komplex függvény megadható az alábbi képlettel:

$$f(z) = 2\Phi\left(x = \frac{z + z_0^*}{2},\ y = \frac{z - z_0^*}{2i}\right) - \Phi(x_0,\ y_0)$$

ahol $z_0 = x_0 + iy_0$ és z^* a komplex konjugált.
Megjegyzés: A harmonikus pár keresés elő lépése, hogy ellenőrizzük $\triangle\Phi \stackrel{?}{=} 0$. Ha nem, nincs a kétváltozós függvénynek párja.

Menkó Balázs

[2]Forrás: Nagy Márton Komplex függvénytan jegyzete, 37.oldal lábjegyzete

13. Konform leképezések és fizikai alkalmazásaik

Már sok szó esett az ortogonális görbevonalú koordinátarendszerekről és, hogy milyen hasznosak a fizikában. A kétdimenziós problémák koordinátarendszerét érdemes lehet összhangba hozni a komplex számsíkkal. Ha veszünk egy komplex $f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ függvényt és vesszük a $\Phi =$ áll. és $\Psi =$ áll. egyenletű görbéket, akkor láthatjuk, hogy ezek egy koordinátarendszert határoznak meg, melyet kedvünk szerint alakíthatunk. Ortogonális-e?
A kérdés megválaszolásához meg kell vizsgálnunk az érintőket, vagy inkább az azokra merőleges vektorokat, a Φ és Ψ függvények gradiensét:

$$\operatorname{grad}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad}\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Ezek skaláris szorzata:

$$(\operatorname{grad}\Phi)(\operatorname{grad}\Psi) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$$

Látjuk, hogy a gradiensek merőlegesek egymásra, tehát az érintők is, így tényleg ortogonális koordinátarendszert határoz meg egy komplex függvény. (Persze csak akkor, ha harmonikus párok a valós és képzetes részei.)

Ez csak akkor előnyös számunkra, ha a függvény álltal leírt transzformáció során az alakzatok hasonló alakzatokba mennek át. Ehhez szükséges a konformitás, azaz a szögtartó tulajdonság. Ennek vizsgálatához nézzük meg hogyan alakul egy a ponttól δ-val odébblévő pont sorsa.

$$w = f(a + \delta) \approx f(a) + f'(a)\delta = b + K\delta$$

ahol $b = f(a)$ és $K = f'(a)$ meghatározható konstansok. Az eredmény vektorosan leírva:

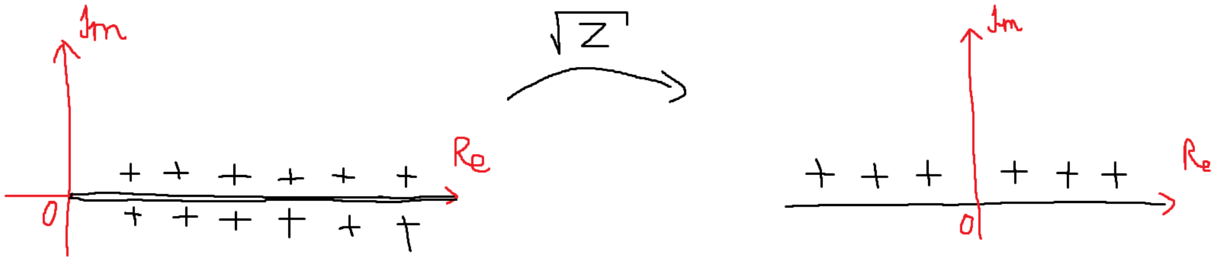
$$\vec{w} - \vec{b} = K\vec{\delta}$$

Látjuk, hogy két azonos a pontból induló vektort ($\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$) ugyanazzal a K állandóval kell megszorozni. Komplex számok esetében a szorzás egy nyújtással és egy forgatással jár, tehát $\vec{\delta}_1$ és $\vec{\delta}_2$ ugyanazzal a szöggel fordul el a körül, így a bezárt szögük nem változik. A leképezés valóban konform.

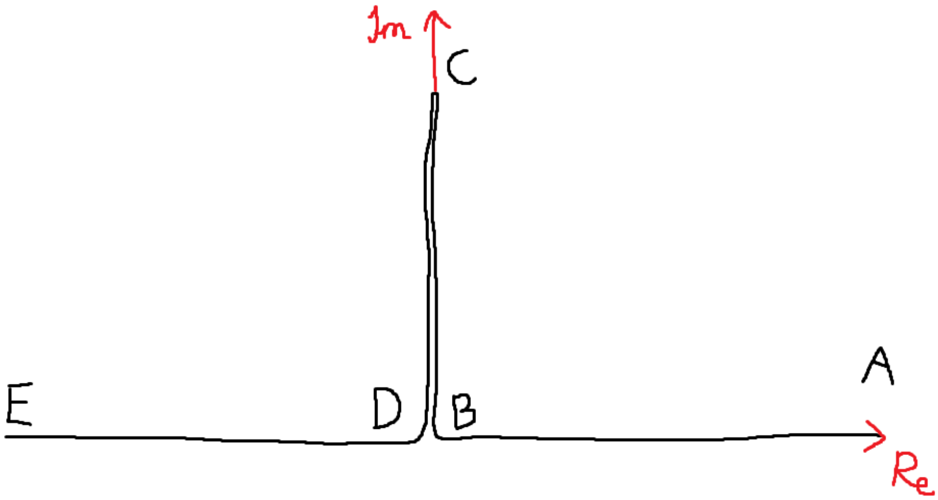
Néhány függvény, mely szép koordinátarendszert eredményez:

- $f(z) = z^2$: hiperbolikus
- $f(z) = \sqrt{z}$: konfokális parabolasereg
- $f(z) = \operatorname{Ln} z$: polárkoordináta (Ln-nel jelöljük azt a logaritmust, melyben a szám exponenciális alakjában $\varphi \in [-\pi; \pi]$)

Ezen leképezéseket számtalan problémában föl lehet használni. Például az elektrosztatikában jól jöhet, ha ismerjük egy összehajtogatott töltött fém lap elektromos mezejét. Ezeknél a feladatoknál tipikusan az a cél, hogy komplex függvényekkel ,,kiegyenesítsük" a lapot, hisz ekkor a $\Psi =$ áll. görbék adják az ekvipotenciális görbéket, a $\Phi =$ áll.-k pedig a térerősség irányát. Ezzel az a határfeltétel is teljesül, hogy a térerősség merőleges a lapra.
Egy félvégtelen töltött lap ,,kihajtogatásához" a $\sqrt{z}$ függvényt használtuk, mivel ezzel a szögek mind feleződtek, tehát legyezőszerűen összehajtottuk a síkot (és az elektrosztatikus teret) a fölső félsíkra.



Az ábrán látható az átalakítás. A jobboldali esetben mindent ismerünk, így az ekvipotenciális vonalakat és a térerősségek hatásvonalát leíró függvények az $f(z) = \sqrt{z}$ függvény valós, illetve képzetes részei.
Egy másik probléma ha a végtelen töltött lapból még egy tüske is kiáll:



A pontok koordinátái a komplex síkon az egyes függvények alkalmazása után:

	z	$z_1 = z^2$	$z_2 = z_1 + 1$	$w = \sqrt{z_2}$
A	$+\infty$	∞	∞	∞
B	ε	ε^2	$1 + i\varepsilon$	1
C	i	-1	0	0
D	$-\varepsilon$	ε^2	$1 - i\varepsilon$	-1
E	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$

Ezzel „kihajtogattuk" a lapot.
Tehát az eredeti problémában a keresett görbéket a $w(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ függvény valós és képzetes része adja meg.
A 18. órán további feladatokat néztünk még. Ezeken érdemes átfutni.
A módszer másik alkalmazhatósága a hidrodinamikában jön elő. Vizsgáljunk sík áramlásokat! Legyen a folyadék összenyomhatatlan és súrlódásmentes, áramlása stacionárius. Ekkor a kontinuitási-, és a Niavier-Stokes egyenlet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla}(\rho \underline{v}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p$$

Fölhasználva a stacionaritást $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ és az összenyomhatatlanságot ($\rho =$ áll.) ezek:

$$\underline{\nabla}\,\underline{v}=0$$

$$(\underline{v}\,\underline{\nabla})\underline{v}=-\frac{\underline{\nabla}p}{\rho}$$

Legyen az áramlás örvénymentes is:

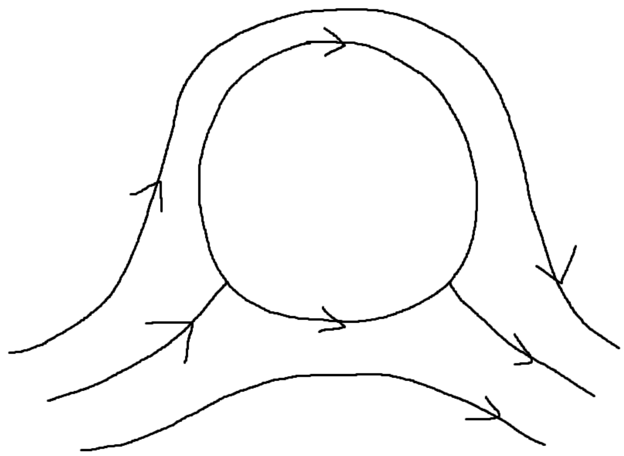
$$\operatorname{rot}\underline{v}=\underline{0}$$

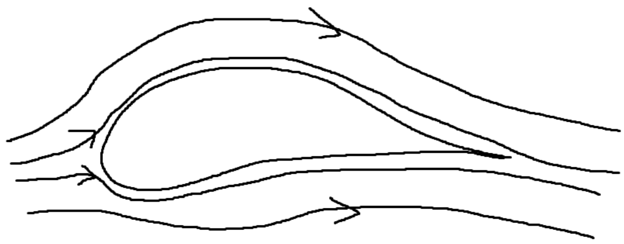
Ekkor $\underline{v}$ gradiens:

$$\underline{v}=\underline{\nabla}\Phi \Longleftrightarrow \operatorname{div}\underline{v}=\triangle\Phi=0$$

Ha kikötjük, hogy az akadályhoz (pl.: egy falhoz) érve az áramlás kövesse annak vonalát, akkor ugyanolyan jellegű a probléma, mint az elektrosztatikában, csak most Φ az előbb meghatározott sebességpotenciált, Ψ pedig a sebesség irányát határozza meg. Vegyük észre, hogy a Navier-Stokes-ot nem használtuk föl ehhez. Az arra jó, hogy ki lehet belőle számolni a nyomást.
Egy henger körül az áramlást a $w=u\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$ mellett még a $w=K\cdot\operatorname{Ln}z$ függvény is leírja. A Laplace-egyenlet linearitása miatt ezeket összeadva érdekes áramképhez jutunk:

$$w=u\left(z+\frac{R^2}{z}\right)+K\cdot\operatorname{Ln}z$$





Hasonló átalakítások révén kaphatjuk meg a jobboldalon látható Zsukovszkij-szárnyprofilt is.

Mendei Barna

14. Komplex integrálás. Cauchy integráltételei

A valós függvények integrálásakor a függvény alatti területet osztottuk föl kis tartományokra és vettük a területösszegek határértékét. Komplex számok körében ez nem ilyen egyszerű. Ebben az esetben görbékre integrálunk a komplex számsíkon. Akármelyikre.
Induljunk ki a kétdimenziós vonalintegrálból. Ekkor fölosztottuk a görbét kis szakaszokra, mértéket rendeltünk hozzájuk, mindet megszoroztuk a mező ottani értékével, majd összegeztük a szorzatokat. Ehhez először paramétereztük a görbét. Most is tegyünk így. Paraméterünk legyen valós:

$$t \in \mathbb{R} \to z(t) \in \mathbb{C}$$

Ekkor a kis szakaszokhoz rendelt mérték:

$$\mathrm{d}z = \dot{z}(t)\mathrm{d}t$$

Így egy függvény komplex integrálja:

$$\int_G f(z)\mathrm{d}z = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\dot{z}(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t + i\int_{x_1}^{x_2} b(t)\mathrm{d}t$$

Ám sokszor a paraméterezés nem könnyű feladat (olykor lehetetlen). Tudjuk, hogy az $f(z)$ függvény, valamint a komplex számok is fölbonthatóak valós és képzetes részre:

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \qquad z = x + iy \Longrightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$$

Így az integráláshoz használandó szorzat:

$$f(z)\mathrm{d}z = (\Phi + i\Psi)\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = (\Phi\mathrm{d}x - \Psi\mathrm{d}y) + i\,(\Psi\mathrm{d}x + \Phi\mathrm{d}y)$$

Ezt akár a következő vektorokkal is leírhatjuk:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \Phi \\ -\Psi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}\underline{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ilyen alakban az előző szorzat és az integrál:

$$f(z)\,\mathrm{d}z = \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{r} + i\underline{v}\,\mathrm{d}\underline{r}$$

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \int \underline{u}\,\mathrm{d}\underline{r} + i\int \underline{v}\,\mathrm{d}\underline{r}$$

Ezzel visszavezettük a komplex integrálokat két darab kétdimenziós vonalintegrálra.

Vizsgáljuk meg az előbb bevezetett vektormezők rotációját és divergenciáját:

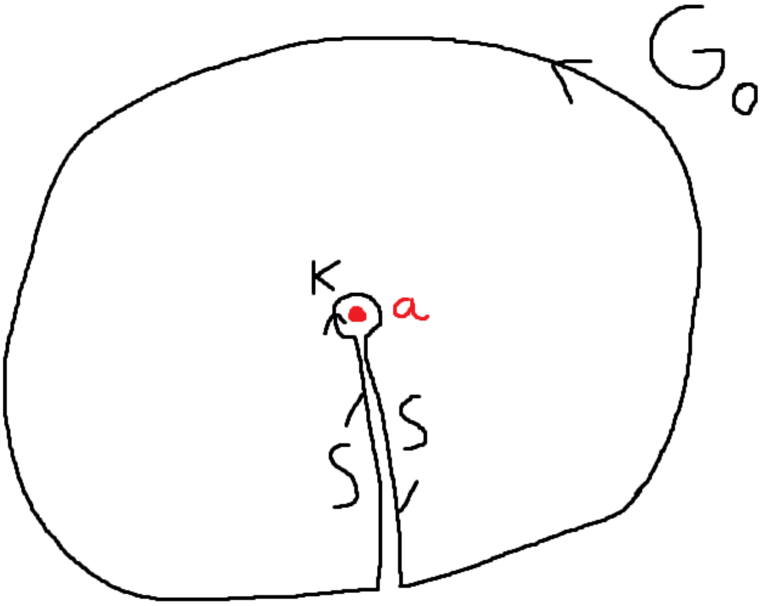
$$\mathrm{rot}\,\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad \mathrm{rot}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} - \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{u} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0$$

Látjuk, hogy mindkettő rotációmentes, tehát az integráljaik nem függenek a görbétől, csak annak kezdő-, és végpontjától. Ez azt is jelenti, hogy zárt görbére az integrál mindig 0.

Cauchy-körintegrál tétele:
Tisztességes komplex függvény reguláris (szingularitásmentes) tartományon vett körintegrálja zérus.

Mi a helyzet a szingularitásokkal?



Egy $f(z)$ függvény a fenti kacifántos görbére vett integráljának nullának kell lennie. Ugyanakkor a következő is igaz:

$$0 = \oint f(z)\mathrm{d}z = \int_{G_0} + \int_S - \int_K - \int_S$$

Tehát

$$\int_{G_0} = \int_K$$

A kicsiny K köröcskén a függvény értéke sorfejtéssel:

$$f(z) \approx f(a) + \dots$$

Integráljuk ki a $g(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$ függvényt erre:

$$\oint_{G_0} g(z)\mathrm{d}z = \oint_{G_0} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \oint_K \frac{f(a)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a) \oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z-a}$$

Az $\dfrac{1}{z}$ függvény integrálját a szinguláris pont (0) körül a tétel elején említett módon, paraméterezéssel számoljuk:

$$z = R \cdot e^{i\varphi} \qquad \mathrm{d}z = Ri \cdot e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{Ri \cdot e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{R \cdot e^{i\varphi}} = i\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi i$$

Tehát az eredeti integrálunk:

$$\oint_{G_0} g(z)\mathrm{d}z = f(a) \oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i$$

Ebből Cauchy újabb tétele:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

Mendei Barna

15. Komplex szingularitások. Taylor-MacLaurin-sor. Konvergenciakör

Nemtudom hogy ezt valaki csinálja-e, de én papíron kidolgoztam, felteszem a képekbe, nyugodtan használjátok fel, ha valami nem olvasható írjatok rám. Bene Róbert

15. TÉTEL

Komplex szingularitások, Taylor–MacLaurin sor, Konvergenciakör

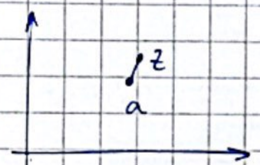
Taylor-sor:

$$f(a+x) \approx f(a) + f'(a)\cdot x + \frac{f''(a)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''}{3!}\cdot x^3 + \dots$$

Általános hatványsor:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

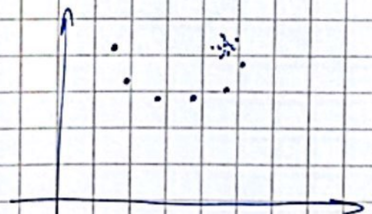
($c_k \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, ez az adott fv. hatványsora "a" körül)



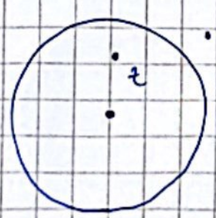
($S_0, S_1, S_2, \dots S_n, \dots \to S$, sorozatok visszavezetése sorokra, hasznos lehet)

Konvergenciasugár: $a=0$ eset:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$



Állítás: $\exists R \geq 0$, $R \in \mathbb{R}$, és ha a z benne van a 0 pont R sugarú körében akkor konvergens, ha nincs benne, akkor nem konvergens. Ez az R a konvergenciasugár, R sugarú, 0 középpontú kör pedig a konvergenciakör.



Pl.: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1} = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r<1 \Rightarrow r^{n+1} \to 0 \qquad r>1 \Leftrightarrow r^{n+1} \to \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|<1 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$, tehát ennek

a hatványsornak a konvergenciasugara 1, mert 1-nél kisebb r-ek esetén konvergens.

__Analitikusság:__ komplex fv. adott tartományon analitikus, ha a függvényt a tartomány minden pontjában adott hatványsora előállítja.

Pl.: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

$$\left(e^z\right)' = 0 + 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} \dots = e^z \dots$$

(e^z-nek a konvergenciasugara végtelen)

$\hookrightarrow$ valóban is, emellett ezek mind __egész függvények__ is

Ha $f(z)$ analitikus $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (nincs sing. pont.)

$\Downarrow$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) \Rightarrow f(z) = \dots + c_{n-1} z^{n-1} + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

"a" körül: $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z)\Big|_a = \dots + \underbrace{c_{n-1}(z-a)^{n-1}}_{\Downarrow\ 0} + \underbrace{c_n (z-a)^n}_{\Downarrow\ \boxed{c_n \cdot n!}} + \underbrace{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}_{\Downarrow\ 0} + \dots \Rightarrow$$

$\rightarrow$ $\boxed{c_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(a)}$

(Hatványsor ≠ Taylor-sor) ~~Nem minden analitikus fv.-nek van Taylor sora~~ ~~pl. $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$~~

Ha egy analitikus fv. bármilyen rövid szakaszon konstans akkor mindenhol konstans ⇒ $e^{-\frac{1}{z}}$ sehogysem jó

Analitikusság adott pontra/tartományra vonatkozó tulajdonság.

Analitikus folytatás: Ha egy fv. adott tartományon analitikus egy hatványsor által és egy másik hatványsor egy az előzőnél nagyobb, de azt is magában foglaló (nem mindig sikeres) tartományon előállítja, akkor ez az előzőnek analitikus folytatása.

Konvergenciakör nagyságát általában az határozza meg, hogy valahol a peremén szingularitás van.

Meromorf függvény: Amelynek csak izolált szingularitásai vannak.

Szingularitások fajtái:

Scanned with CamScanner

Mi történik, ha szinguláris pont körül fejtünk sorba:

Pl.: $\frac{e^z}{z-a}$ "a" pont körül $\Rightarrow \frac{e^{z-a} e^a}{z-a} \Rightarrow e^a \frac{e^{z-a}}{z-a} \Rightarrow$

$\Rightarrow z-a \equiv u \Rightarrow e^a \frac{e^u}{u} \Rightarrow e^a \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots\right)\frac{1}{u} =$

$= e^a \left(\frac{1}{u} + 1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \dots + \frac{u^n}{(n+1)!}\right) = e^a \left(\frac{1}{z-a} + 1 + \frac{z-a}{2!} + \frac{(z-a)^2}{3!} + \dots\right)$

$\Rightarrow C_{-1}(z-a)^{-1} + C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \dots$

($z=a$ -ban nincs ért.)

Ez a Laurent-sor/MacLaurent-sor:

$$\boxed{f(z) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} c_u (z-a)^u}$$

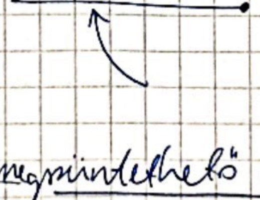
(Sima hatványsor csak negatív indexű tagjai is vannak)

Szinguláris pontok fajtái:

Pl.:

$\frac{1}{z-a}$ izolált szingularitás

$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ nem izolált szingularitás

$Ln(z)$ 

$\frac{\sin z}{z}$ megszüntethető szingularitás, mert $\begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$

$h(a)=0$

$g(a)=0$

$\frac{g}{h} \xrightarrow[z \to a]{} A$ $\quad \frac{0}{0}$ típusúak a megszüntethetők

(A polusok azok, melyek Laurent sora balra nem végtelen)

Lényeges szingularitás, ha a Laurent-sor balra is végtelen Pl.: $\ln z$

(Nagy Marci jegyzetében minden benne van.)

16. Reziduum-tétel és alkalmazásai

Eddig láttuk, hogy komplex függvények körintegrálja görbefüggetlen, ha kikerüljük a szinguláris pontokat.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha egy szinguláris pontot kerülgetünk! az $\frac{1}{z}$ függvény integrálját már bebizonyítottuk a 14. tételben:

$$z = R \cdot e^{i\varphi} \qquad \mathrm{d}z = Ri \cdot e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{Ri \cdot e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{R \cdot e^{i\varphi}} = i\mathrm{d}\varphi$$
$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi i$$

Hasonló módon kiszámolható ez a többi hatványra is $\left(\text{pl.: } \frac{1}{z^2}\right)$:

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{Ri \cdot e^{i\varphi}}{R^2 \cdot e^{2i\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{i}{R}\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Tehát egy függvény integrálásakor a MacLaurin sorának csak a C_{-1}-es tagjának van járuléka. Ezen fontos tulajdonsága miatt ezt külön néven illetjük: reziduum.

$$C_{-1} = \operatorname{Res} f(a)$$

Láthatjuk, hogy a reziduum függ a függvénytől és a vizsgált ponttól.
Jó tulajdonsága még, hogy nem szinguláris pont körül ez nulla.

Ha több pólus körül is körbemegyünk, akkor az integrál kiszámolásához elengedhetetlen a reziduum-tétel:

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res} f(a_k)$$

Ez csak meromorf függvényekre igaz. A reziduumok összegzésekor ügyelnünk kell még arra is, hogy merről kerüljük azt hiszen, ha negatív körüljárás szerint haladunk, akkor negatív előjellel kell beszámolni a pont körüli reziduumot.

A reziduum kiszámolására tanultunk néhány módot:

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n-1} [(z-a)^n f(z)]$$

Itt n a szingularitás rendjére utal. Ezt mindig alkalmazhatjuk, míg a következőt csak, ha a nevezőben lévő kifejezésnek egyszeres gyökei vannak:

$$f(z) = \frac{g(z)}{p(a)} \qquad \operatorname{Res} f(a) = \frac{g(a)}{p'(a)}$$

Ezek rövid bizonyítása:

Egy elsőrendű pólus körüli Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots$$

Ebből C_{-1}:

$$\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = C_{-1}$$

Másodrendű pólus esetén:

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

$$\lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[f(z)(z-a)^2\right] = C_{-1}$$

Harmadrendű pólus:

$$f(z) = \frac{C_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \dots$$

$$\lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[f(z)(z-a)^3\right] = 2C_{-1}$$

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[f(z)(z-a)^3\right] = C_{-1}$$

Innen általánosítható a fenti formula.

Ha a függvény $f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$ alakú, ahol $p(z)$-nek egyszeres gyöke van a-nál, akkor a következőt tehetjük meg. Fejtsük sorba $p(z)$-t a körül:

$$p(z) = p(a) + p'(a)(z-a) + \frac{p''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots$$

Erre alkalmazva az előbb levezetett képletet:

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right] = \lim_{z\to a}\left[\frac{g(z)(z-a)}{p'(a)(z-a) + \frac{p''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots}\right] =$$

$$= \lim_{z\to a} \frac{g(z)}{p'(a) + \frac{p''(a)}{2}(z-a) + \dots} = \frac{g(a)}{p'(a)}$$

A reziduum-tétel sokat tud segíteni egyes valós integrálok kiszámolásában. Ehhez egy zárt félkör mentén kell integrálnunk a komplex számokra kiterjesztett függvényt. Azt, hogy a félkört a valós tengely fölött vagy alatt rajzoljuk különböző paraméterek határozzák meg. Például, ha az integrálandó mennyiség számlálójában exponenciális kifejezés van, akkor:

$e^{izt} \sim e^{-yt}$		$e^{-izt} \sim e^{yt}$	
$t > 0$	$t < 0$	$t > 0$	$t < 0$
fölül	alul	alul	fölül

Mendei Barna

17. Homogén és inhomogén lineáris közönséges differenciálegyenletek

A tétel címében szereplő szavak:

- Homogén: A differenciálegyenletben nem szerepelnek az ismeretlen függvénytől nem függő mennyiségek. A differenciálegyenlet minden tagjában szerepel az ismeretlen függvény (deriváltja).
- Inhomogén: Az előző ellentettje. Van olyan tag, mely nem függ az ismeretlen függvénytől.
- Lineáris: A keresett függvény és deriváltjai csak az első vagy nulladik hatványon vannak és nem szerepelnek bonyolult függvényeik (pl.: $\sin(u)$, $\ln(\dddot{u})$)
- Közönséges: Egy változója van az ismeretlen függggvénynek (és az együtthatóknak is).
- Differenciálegyenlet: Egyenlet, melyben az ismeretlen egy függvény. Benne ez és a deriváltjai is szerepelhetnek.

Tehát most a következő alakú differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni például:

$$e^t\dddot{u}(t) - [\sin(2t)]\ddot{u}(t) + \ln(t+1)\dot{u}(t) - 4u = 0$$

$$5\dddot{u}(t) - 7\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) - 2u = e^t$$

A differenciálásra gondolhatunk úgy is, mint egy operátorra, mely függvényekre hat. Vajon lineáris-e?

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\alpha f)' = \alpha f'$$

Ezen tulajdonságok alapján:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Úgy viselkedik, mint a vektorszámításon tanult lineáris operátorok, tehát ez is lineáris.

Az egyik fenti példát a következőképpen írhatjuk át ezek alapján:

$$5\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^3 u - 7\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 u + 4\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) u - 2u = e^t$$

$$\left[5\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^3 - 7\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 4\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) - 2\right] u(t) = e^t$$

$$L\left(D\right) u(t) = f(t)$$

Itt a szögletes zárójelben lévő kifejezés olyan, mint a differenciáloperátornak egy $L\left(D\right)$ polinomja. Mostantól ilyen alakban kezeljük majd a differenciálegyenleteket.

Állítás:
Ha egy homogén lineáris közönséges differenciálegyenletnek van két megoldása, akkor azok lineárkombinációja is megoldás.

Bizonyítás:
Ha $u_1(t)$ és $u_2(t)$ is megoldás, akkor:

$$L\left(D\right) u_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad L\left(D\right) u_2 = 0$$

A megoldások lineárkombinációja:

$$u_3(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

Erre hattatva az $L(D)$ opreátorpolinomot:

$$L\left(D\right)u_3 = L\left(D\right)\left(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\right) = \alpha \cdot L\left(D\right)u_1 + \beta \cdot L\left(D\right)u_2 = 0$$

Az állítás igaz.

Állítás:

Ha egy inhomogén lineáris közönséges differenciálegyenletnek és annak homogén változatának van egy-egy megoldása, akkor azok összege is megoldása az inhomogén egyenletnek.

Bizonyítás:

Az $u(t)$ és $v(t)$ függvények megoldások, így:

$$L(D)u = 0 \qquad \text{és} \qquad L(D)v = f(t)$$

Ezek összege:

$$w(t) = u(t) + v(t)$$

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$L(D)w = L(D)(u+v) = L(D)u + L(D)v = 0 + f = f$$

Az állítás igaz.

A differenciálegyenletnek így végtelenül sok megoldása lehet, de a természetben csak egy fog érvényesülni. Ehhez kezdeti-, vagy határfeltételeket kell megadnunk. Ekkor a probléma *korrekt kitűzésű*. Ha a keresett függvény időtől függő, akkor kezdeti-, ha időfüggetlen akkor határfeltételt szabunk. Például egy harmonikus rezgőmozgás során kezdeti feltétel a kitérés és a sebesség $t = t_0$ időpontban, de a folytonos közegek mechanikáján tárgyalt kihajlás esetében határfeltételeket szabunk a hosszúkás test két végének helyzetéről.

Vizsgáljuk meg közelebbről a közönséges, állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenleteket!

Az ilyen egyenletek esetében a megoldást $u(t) = e^{ct}$ alakban keressük ($c \in \mathbb{C}$). Hattasuk erre a differenciáloperátort:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{ct} = ce^{ct} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = cu$$

Ez a sajátérték-problémára emlékeztet. (A gondolatmenetet a Green-módszer esetében visszük tovább.)

A fenti tulajdonságból következik, hogy meg tudunk határozni egy a differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenletet. Példának okáért:

$$\begin{aligned} L(D)u(t) &= 0 \\ \left[5\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) + 1\right]e^{ct} &= 0 \\ 5c^2e^{ct} - 3ce^{ct} + e^{ct} &= 0 \\ \left(5c^2 - 3c + 1\right)e^{ct} &= 0 \\ L(c)e^{ct} &= 0 \\ L(c) &= 0 \end{aligned}$$

Tehát csak be kell helyettesítenünk az $L(D)$ polinomba c-t és megkeresni az eredmény gyökeit. Ha az eredeti egyenlet n-ed rendű volt, akkor az algebra alaptétele szerint n db megoldásnak kell lennie a komplex számok halmazán, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{c_k t}$$

Az $A_k \in \mathbb{C}$ együtthatókat a kezdőfeltételek segítségével határozhatjuk meg.

Mendei Barna

18. Fourier-sor

A témához kapcsolódó előadások:
24. előadás *26. előadás*

A probléma: hogyan lehet koszinuszok és szinuszok lineárkombinációjaként kifejezni bonyolultabb függvényeket? Tehát

$$f(x) = \sum c_\mathrm{k} \cos x$$

Létezik-e ilyesmi felbontás, és ha igen, akkor mik a c_k együtthatók? a szerint periodikus függvények halmazát vesszük. Ezek lineáris teret alkotnak. Bevezetjük a következő rövidítéseket: $k_1 = \frac{2\pi}{a}$ és $k_n = n\frac{2\pi}{a}$. Az az állítás, hogy a következő függvények bázist alkotnak ebben a lineáris térben:

$$1, \sin k_n x, \cos k_n x$$

És így az $f(x)$ függvény felírható a következő módon:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x \tag{38}$$

Ahhoz, hogy ez teljesüljön, ahhoz a függvénynek korlátosnak és szakaszonként folytonosnak kell lennie. A szakadásnál értelmezzük úgy a függvényt, hogy félútra tesszük az értékét a két rész között. Ilyen függvények esetén léteznek ezek az együtthatók. Ez a Fourier-sor.

A Fourier együtthatók és a függvény kölcsönösen egyértelműek:

$$f(x) \iff (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...)$$

Térjünk kicsit vissza a vektorokhoz és bázisvektorokhoz. Akkor ilyesmiket írtunk fel:

$$\mathbb{V} \to \vec{v} \qquad \vec{e}^{(k)} \qquad \forall\ \vec{v}\ \exists\ c_k : \qquad \vec{v} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)}$$

Úgy, hogy

$$\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$$

ortonormált bázisvektorok. És magukat c_k együtthatókat is megkaphattuk:

$$c_k = \vec{e}^{(k)} \vec{v}$$

Ezt szeretnénk mi is megkapni. Viszont ehhez értelmeznünk kell a skaláris szorzást függvények esetén. Ezt a következőképp tesszük. Nézzük meg a következő integrált:

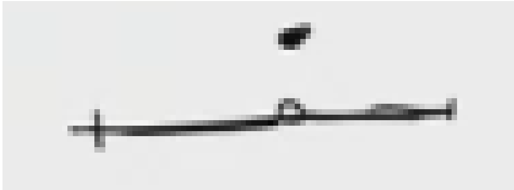
$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\ \mathrm{d}x$$

Nézzük meg, hogy ez tudja-e a skaláris szorzás szabályait:

$$(f, g) = (g, f)\ \checkmark$$

$$(f, f) = \int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x \geq 0\ \checkmark$$

$$(f, f) = 0 \ \Rightarrow\ f(x) = 0\ \lightning$$



15. ábra. Példa problémás függvényre.

Könnyű belátni, hogy ekkor probléma van. Nézzük csak meg a következő függvényt:

Ennek az integrálja 0, de ő nem az $f(x) = 0$ függvény. Éppen ezért bevezetésre kerül a matematikában az egyik legjobb fogalom: a "majdnem". A függvény majdnem mindenütt 0. Ő majdnem a $f(x) = 0$ függvény.

Viszont így már értelmezhetünk egymásra ortogonális függvényeket. Adott egy lineáris tér, melyben a következő függvények bázist alkotnak:

$$\mathbb{F} \to \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\varphi_n(x), ...$$

Méghozzá ortonormáltat:

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$$

(általában a bázis nincsen egyre normálva, mint azt majd később látjuk.) Így az általános Fourier-sor:

$$f(x) = \sum_k^\infty c_k \ \ \varphi_k(x)$$

Ha ortonormált bázisunk van tehát, akkor a következő egyenletnek teljesülnie kell:

$$(\varphi_l, f) = \int \mathrm{d}x \ \ \varphi_l f = (\varphi_l, \sum_k c_k \varphi_k) =$$

$$= \sum_k c_k (\varphi_l, \varphi_k) = \sum_k c_k \delta_{lk} = c_l$$

Így megkapjuk az adott bázison a függvény együtthatóit. Ez az általános séma. Fourier-nél a bázis szinuszokból is koszinuszokból áll. Ők egy ortogonális bázist alkotnak. (Nem ONB-t.) Ekkor általában a jelölések:

$$(f, g) = \int_0^a \mathrm{d}x \ \ f(x)g(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \ \ f(x)g(x)$$

Nézzük meg egy példán, hogy tényleg ortogonális-e a rendszer:

$$(1, \cos k_n x) = \int_0^a \mathrm{d}x \ \ 1 \cdot \cos k_n x = \left[\frac{\sin k_n x}{k_n} \right]_{x=0}^a \frac{\sin 2\pi n}{k_n} = 0$$

Másik eset:

$$(\cos k_n x, \cos k_m x) = \int_0^a \mathrm{d}x \ \ \cos k_n x \cdot \cos k_m x =$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x \frac{1}{2} \left[(\cos\left((k_n + k_m)x\right) + \cos\left((k_n - k_m)x\right) \right] =$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x \frac{1}{2} \left[(\cos((n+m)\frac{2\pi}{a}x) + \cos((n-m)\frac{2\pi}{a}x) \right]$$

Amennyiben $n \neq m$ akkor belátható, hogy ez 0. Viszont ha $n = m$:

$$= \int_0^a \mathrm{d}x \frac{1}{2} \left[(\cos(2n\frac{2\pi}{a}x) + \cos(0x) \right]$$

Az első tag 0. Viszont a második tag:

$$\int_0^a \mathrm{d}x \frac{1}{2} 1 = \frac{a}{2}$$

Tehát azt kapjuk, hogy ez a szorzat 0, ha $n \neq m$, és $\frac{a}{2}$, ha $n = m$. Ez azt jelenti, hogy ezek valóban ortogonálisak, de nem 1-re vannak normálva, hanem $\frac{a}{2}$-re:

$$(\cos k_n x, \cos k_m x) = \frac{a}{2} \delta_{nm}$$

Hasonló jön ki, ha ugyanezt kiszámítjuk szinuszra. Ha szinuszt szorzunk koszinusszal, akkor mindig 0-t kapunk. Ha $(1,1)$ szorzatot néznénk, az a-t adna.

Számoljuk ki az együtthatókat hasonló módon, mint azt vektoroknál csináltuk. (A függvényünk a szerint pediodikus: $f(x) = f(x+a)$.)

$$(1, f) = \int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = a_0(1,1) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(1, \cos k_n x) + b_n(1, \sin k_n x)]$$

ebből, mivel a szummában a függvények ortogonálisak, és a szorzatuk nulla:

$$a_0 = \frac{1}{a} \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Ebben felismerhetjük a görbe átlagát.

Nézzük meg a_n együtthatókat.

$$(\cos k_m x, f) = a_0(\cos k_m x, 1) + \sum_n a_n(\cos k_m x, \cos k_n x) + \sum_n b_n(\cos k_m x, \sin k_n x) =$$

$$= \sum_n \frac{a}{2} \delta_{nm} a_n = \frac{a}{2} a_m$$

tehát

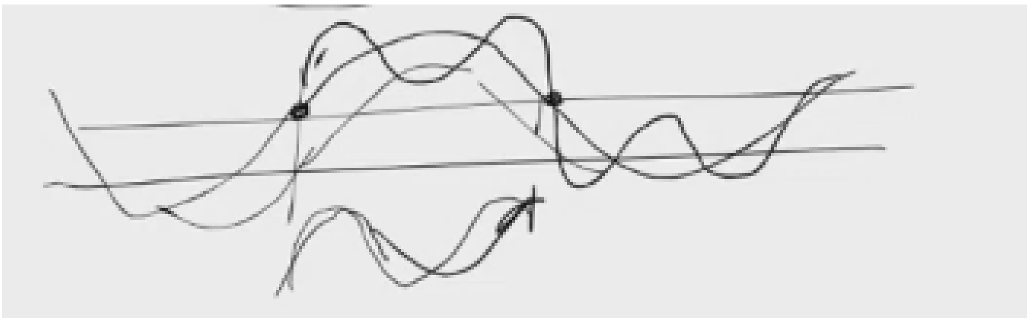
$$a_m = \frac{2}{a} \int_0^a \mathrm{d}x\ \ f(x) \cos k_m x$$

Ugyanez b_n-ekre hasonlómód levezethető:

$$b_m = \frac{2}{a} \int_0^a \mathrm{d}x\ \ f(x) \sin k_m x$$

Ezek a Fourier-együtthatók. Mivel ez a transzformáció kölcsönösen egyértelmű, ha ezek az együtthatók adottak, akkor azok egyértelműen megadnak egy $f(x)$ függvényt.

Ha meg szeretnénk nézni, hogy néz ki a függvény, akkor egyre több tagot adogassunk hozzá a 38. egyenlethez, és azt fogjuk tapasztalni, hogy ahogy egyre több tagot veszünk figyelembe, a függvényünk egyre jobban hasonlít a várt függvényhez. Ehhez emlékeztető a 16. ábra.



16. ábra. Ahogy egyre több tagot veszünk figyelembe a Fourier-sorban, egyre jobban hasonlít a várt négyzögjel függvényre.

Érdekesség, hogy ahogy adogatjuk össze a tagokat, ennél a négyszögjelnél ahol ugrik a függvény, ott a Fourier-sor túlugrik, és egy kicsúcsosodást láthatunk. Ez nem számítási hiba, egyszerűen ez jön ki. Ha ténylegesen végtelen tagot adnánk össze, akkor ezek az artefaktumok eltűnnének.

Viszont ha szinuszokkal, meg koszinuszokkal dolgozunk, akkor sosincs messze az "Írjuk fel ezt komplexben!" mondat. Tegyünk is így. Először is maga a Fourier-sor:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}}{2} + b_n \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i} \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{ink_1 x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-ink_1 x} \right)$$

Bevezetjük c_n-t:

$$c_0 = a_0$$

$$\text{ha} \quad n > 0 \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$\text{ha} \quad n < 0 \quad c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$$

Így ez minden n-re értelmes. Így

$$c_0 e^{i0k_1 x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{ink_1 x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{ink_1 x}$$

tehát

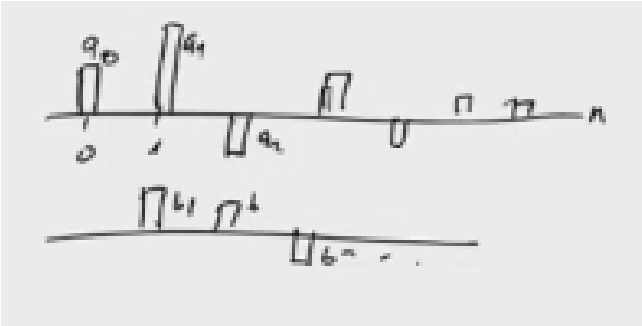
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \; e^{ink_1 x}$$

Ez a Fourer-sor komplex alakja. A komponensekre hasonló trükkökkel a következőt kapjuk komplexben:

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a \mathrm{d}x \;\; f(x) \;\; e^{-ink_1 x}$$

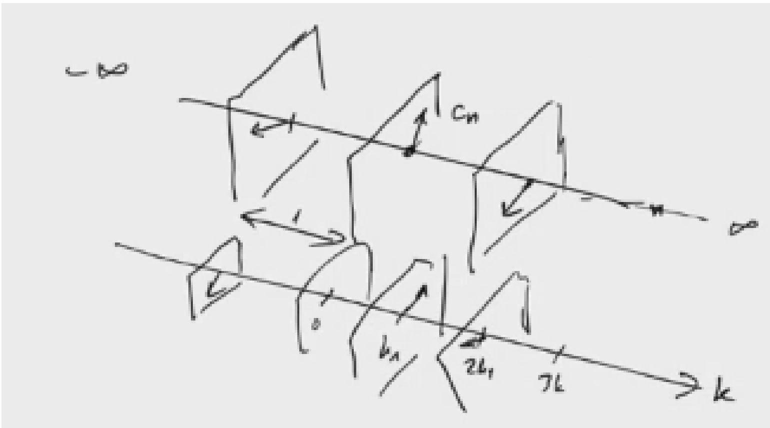
Mindezek tartalmilag ugyan azok, mint a szögfüggvényesek, csak helytakarékosabbak, és esetenként könnyebb velük számolni.

Szemléltessük a komponenseket grafikusan! A komponenseket ábrázolhatjuk egy oszlopdiagrammon:



17. ábra. Az egyes Fourier-komponensek ábrázolása. Ahogy nő n, a komponensek tipikusan egyre kisebbek.

Ha a komplex formulát használjuk, akkir pedig így néz ki:



18. ábra. Az egyes Fourier-komponensek ábrázolása komplexben.

Karnitscher Trixi
Kadlecsik Ádám

19. Fourier-transzformáció

A témához kapcsolódó előadások:
26. előadás 27. előadás

A következő képletekből indulunk ki:

$$f(x) = \sum_n e^{ink_1x} c_n$$

$$c_n = \int \mathrm{d}x \ \frac{e^{-ink_1x}}{a} f(x)$$

Tegyük fel, hogy a Marslakók máshogy jelölik azt, hogy egy mennyiség valamitől függ. Míg mi egy függvényt a következőképp jelölünk: $f(x)$, egy Marslakó így jelölné: f_x. Tehát így az első képletben szereplő exponenciális tag, ami x-től és n-től függ, azt így írná fel: R_{xn}. A második egyenletben szereplő exponenciálist pedig így: S_{nx}. (Egyébként maga az, hogy mi valaminek a valamitől függését zárójellel, vagy indexszel jelöljük, az konvenció kérdése. Esetünkben ha valami valamitől folytonosan függ, akkor azt zárójellel jelöljük, azaz egy függvényünk van, míg ha valami diszkrét változóktól függ, akkor azt alsó indexszel jelöljük, azaz egy sorozatunk van.) Hogy írná le egy Marslakó, a mi képleteinket?

$$f_x = \sum_n R_{xn} c_n$$

$$c_n = \sum_x S_{nx} f_x$$

Ez nem más, mint egy bázis transzformáció. Viszont ez még nem szimmetrikus. Ezért szokás azt tenni, hogy nem csak az egyik egyenlet van leosztva a-val, hanem az oda és a visszaképletben is szerepel egy $\frac{1}{\sqrt{a}}$:

$$f(x) = \sum_n \frac{e^{ink_1x}}{\sqrt{a}} c_n$$

$$c_n = \int \mathrm{d}x \ \frac{e^{-ink_1x}}{\sqrt{a}} f(x)$$

És a Marslakók igazából az itteni mennyiségeket hívják R_{xn}-nek és S_{nx}-nek.
Azt látjuk, hogy $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{R}}$, illetve $R_{xn} = S^*_{nx}$. Ebből az következik, hogy $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^+$. Tehát $\underline{\underline{S}}$ egy unitér mátrix. Azaz ez a transzformáció egy unitér transzformáció a függvények terében. (Ez a későbbiekben nagyon fontos lesz.)

Az előző tételben periodikus függvényeket néztünk. De mi van akkor, ha nem periódikus a jel? Ezzel fogunk most foglalkozni.
De először is az előző tételben szerepelt $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}$, ahol λ_n a hullámhossz. k_n nem más, mint a hullámszám. Hamarosan kiderül, ez miért fontos.

Most nem 0-tól a-ig nézzük a dolgokat, hanem $-\frac{a}{2}$-től $\frac{a}{2}$-ig, és majd a-val a végtelenbe fogunk tartani. Effektíve azt az esetet nézzük, amikor a függvény a végtelenben periodikus. Írjuk fel képleteinket!

$$f(x) = \sum_n^{\infty} c_n e^{ink_1x}$$

$$c_n = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}x\ \ f(x)e^{-ink_1x}$$

Bevezetjük a következő mennyiséget:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{a}$$

És ezzel bővítsük az első képletünket (ez majd későbbre kell):

$$f(x) = \sum_n^{\infty} \Delta k \frac{c_n}{\Delta k} e^{ink_1x}$$

A második képlet jobb és bal oldalát pedig osszuk le vele:

$$\frac{c_n}{\Delta k} = \frac{a}{2\pi}\frac{1}{a}\int \mathrm{d}x\ \ f(x)e^{-ink_1x}$$

Így a következőt kapjuk:

$$\frac{c_n}{\Delta k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\ \ f(x)e^{-ink_1x}$$

És most tartunk a-val a végtelenbe. Elkezdjük az intervallumot nyújtani, azaz egyetlen periodicitási tartománnyal kitöltjük a teljes számegyenest. Tegyük meg ezt képleteinkben is! Ez jobb oldalt egyszerű, hiszen ott egy mezei improprius integrál lesz. A bal oldal kicsit trükkösebb. c_n és Δk is 0-ba fog tartani, viszont az arányuknak lesz egy véges határesete, az fog tartani valahova, ami k-tól fog függeni. Ezért elnevezzük $F(k)$-nak.
Illetve fontos, hogy az együtthatónak most már nem n lesz egy jó jellemző, mivel ahogy tartunk a-val a végtelenbe, a 18. ábrán a grafikon sűrűsödni kezd.[3] Tehát például egy c_n, ami eddig az 5. volt, az most az 5000. lesz. Éppen ezért nem azzal fogjuk jellemezni, hogy hányadik, hanem azzal, hogy hol van, azaz a hullámszámmal érdemesebb jelölni. $k = n \cdot k_1$. Mostantól k-val lesznek jellemezve a Fourier-eggyütthatók.
Így a következőt kapjuk:

$$F(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \ f(x)e^{-ikx}$$

($F(k)$, mert ez a k-nak valamilyen függvénye.) Az első egyenletre pedig:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \ F(k)e^{ikx}$$

Elméleti fizikában ezt is szokás szimmetrikus formára hozni:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \ \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} f(x)$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} F(k)$$

A fizikában általában ilyesmit időtől függő függvényekkel szoktunk csinálni. Ezért a legáltalánosabb jelölés:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\ \ F(\omega)\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$

[3]Elnézést, hogy egy másik tétel kidolgozásra referálok, de nem akartam ezt a részt mégegyszer leírni.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \;\; f(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$$

Itt t természetesen az időt jelöli, ω pedig a körfrekvenciát.

Hasonlómód, mint a vektoroknál, amikor arról beszéltünk, hogy van egy absztrakt $\vec{v}$ vektorunk, és azt tudjuk reprezentálni két bázison, és ezek között a bázisok között $\underline{\underline{S}}$ és $\underline{\underline{R}}$ mátrixok végzik a bázistranszformációt, itt is van egy absztrakt $|f\rangle$ mennyiség, amit tudunk reprezentálni $f(x)$-ként és $F(k)$-ként.
Ez a bázistranszformáció, nem Marslakó nyelven:

$$f(x) = \int \mathrm{d}k \;\; R(x,k) F(k)$$

$$F(k) = \int \mathrm{d}x \;\; S(k,x) f(x)$$

Látható, hogy ezek nem mások, mint a mátrix szorzás folytonos megfelelői. Az ilyeneket úgy hívjuk, hogy integrál transzformáció, és a Fourier-transzformáció az egy ilyen bázistranszformáció, méghozzá egy unitér integráltranszformáció.

Mit jelent az, hogy unitér? Valós mátrixok esetén ez az ortogonalitást jelentette. Egy ortogonális transzformációnal az $\underline{\underline{R}}$ és $\underline{\underline{S}}$ mátrixok egymás inverzei és transzponáltjai voltak. És ahol a transzponált mátrix egyenlő az inverz mátrixszal, akkor ortogonális mátrixokról beszélünk. Az ortogonális transzformáció más néven forgatást jelent. A forgatás pedig megtartja a skaláris szorzatot. Nézzük ezt meg. Vegyünk két függvényt (a Marslakók nyelvén):

$$f_x = R_{xk} F_k$$

$$g_x = R_{xk} G_k$$

Visszaképlet:

$$F_k = S_{kx} f_x$$

$$G_k = S_{kx} g_x$$

És ha megmaradt a skaláris szorzat, akkor

$$\sum_x f_x g_x = \sum_k F_k G_k$$

Ez tehát akkor van, ha $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\tilde{R}}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$.

Ugyan ennek kell történnie a mi esetünkben is. De figyelni kell, mert áttértünk a komplex esetre, ezért a skaláris szorzatnál a konjugáltat kell figyelembe vennünk:

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) \; \mathrm{d}x$$

és

$$(g,f) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) \; \mathrm{d}x$$

Ekkor ez egy hermitikus skaláris szorzat. $(g,f) = (f,g)^*$. Bizonyítás nélkül állítjuk, hogy egy ugyan ilyen skaláris szorzatot be lehet vezetni a k-tól függő függvények terében:

$$(F,G) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k)G(k)\ \mathrm{d}k$$

És mivel a Fourier-trafó egy unitér integráltranszformáció, ezért

$$(F,G) = (f,g)$$

Ez egy nagyon fontos tulajdonság, a kvantum mechanikában nagyon sokszor kihasználjuk.

Megjegyzés:

Pontosan nem tudom, hol van a határ a 18. és 19. tétel között, mivel ez a két tétel nagyon közel áll egymáshoz. Ha valaki úgy gondolja, hogy máshol kéne elválasztani ezt a témát, az írjon és megbeszéljük.

Kadlecsik Ádám

20. Dirac-delta és különböző közelítései

A témához kapcsolódó előadások:
27. előadás *28. előadás*

Ismert a két képlet:

$$f(t) = \int \mathrm{d}\omega \frac{e^{it\omega}}{\sqrt{2\pi}} F(\omega) \tag{39}$$

$$F(\omega) = \int \mathrm{d}\tau \frac{e^{-i\tau\omega}}{\sqrt{2\pi}} f(\tau) \tag{40}$$

(A 40. egyenletben azért szerepel τ, és nem t, mert az facér index lesz.)
Térjünk át a marslakók nyelvére:

$$\begin{aligned} f_t &= \sum_\omega R_{t\omega} F_\omega \\ F_\omega &= \sum_\tau S_{\omega\tau} f_\tau \end{aligned} \tag{41}$$

Ha egymásba helyettesítjük a két egyenletet, a következőt kapjuk:

$$f_t = \sum_\tau \delta_{t\tau} f_\tau = f_t \tag{42}$$

(Mert $R_{t\omega}$ és $S_{\omega\tau}$ inverz mátrixok.) Ugyan ez történik nálunk is, csak nem a marslakók nyelvén. Ha ugyanezt a számolást végigcsináljuk 39. és 40. egyenletekkel, a következőt kapjuk:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\tau \left(\int \mathrm{d}\omega \frac{e^{i(t-\tau)\omega}}{2\pi} \right) f(\tau) \tag{43}$$

A zárójelben lévő mennyiséget elnevezzük:

$$\delta(t-\tau) \tag{44}$$

Dirac-deltának. Hiszen ez egy $(t-\tau)$-tól függő dolog. Így

$$f(t) = \int \mathrm{d}\tau \;\; \delta(t-\tau) f(\tau) \tag{45}$$

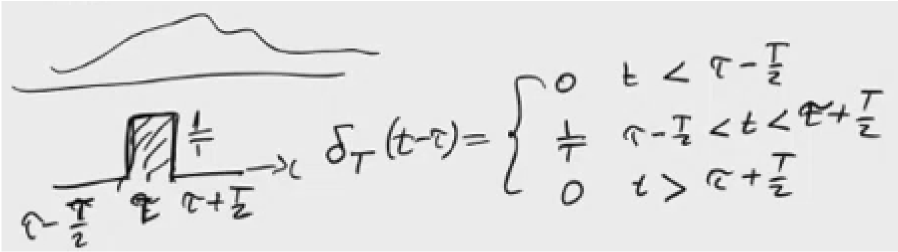
Na de milyen állat ez a Dirac-δ? (Lehet hallani, hogy Dirac-δ függvény. ILYEN NINCS!) A Dirac-δ egy matematikailag nem túl korrekt dolog, viszont rendkívül hasznos, és kényelmesen lehet vele számolni. Továbbá Neumann János levezette, hogy tisztességes számolással is ugyan az jön ki, mint a Dirac-δ-val, így az esetek többségében lehet vele számolni. Hogy jobban megismerjük, vegyünk egy próbafüggvényt, $f(t)$-t (ez legyen korlátos, tisztességes, stb...) és δ_T függvéynt. (19. ábra.)

$\delta_T(t-\tau)$-t úgy választjuk meg, hogy a függvény alatti területe pont 1 legyen. Vegyük a két függvény szorzatát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \;\; \delta_T(t-\tau) \mathrm{d}t = \tag{46}$$

$\delta_T(t-\tau)$ gyakorlatilag kiharap egy részt a függvényből:

$$= \frac{1}{T} \int_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} f(t) \mathrm{d}t \tag{47}$$



19. ábra. $f(t)$ próbafüggvény és $\delta_T(t-\tau)$ függvény.

Ez pont a függvény átlaga ezen a szakaszon. És egy folytonos függvény egy szakaszon egy pontban biztos fel fogja venni az arra a szakaszra értelmezett átlagának az értékét. (Rendőrelv.) És most tartsunk T-vel a 0-hoz:

$$\lim_{T\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \delta_T(t-\tau)\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{48}$$

Ez igazából nem csinál mást, mint megadja a függvény értékét τ-ban. Ez a Dirac-δ korrekt definíciója. De ha nincs matematikus a teremben, akkor rosszindulatú fizikusok beviszik a limeszt az integrálba, és $\lim_{T\to 0}\delta_T(t-\tau) = \delta(t-\tau)$ jelöléssel használják a Dirac-δ-t. Így:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \delta(t-\tau)\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{49}$$

Könyvekben ez szokott szerepelni, mint a Dirac-δ definíciója, de ez jelen értelemben nem teljesen korrekt. A limeszt az integrálon kívül kéne elvégezni, mivel magának a Dirac-δ-nak nem értelmezhető a limesze. Illetve pár könyv teljesen pofátlan módon, úgy definiálja, hogy

$$\begin{aligned} \delta(t-\tau) &= 0 \quad t \neq \tau \\ \delta(t-\tau) &= \infty \quad t = \tau \end{aligned} \tag{50}$$

De ez nem definíció, ez hülyeség.

Mindettől függetlenül a fizikusok a Dirac-δ-t mindenféle nem tisztességes módon szokták használni, mert rendkívül kényelmes, és így is a jó eredmény jön ki.
A Dirac-δ formálisan a Kronecker-δ folytonos megfelelője.

A Dirac-δ-ra különböző közelítő függvényeket szoktak bevezetni.

Gauss-görbe (úgy normálva, hogy fv. alatti területe 1 legyen).:

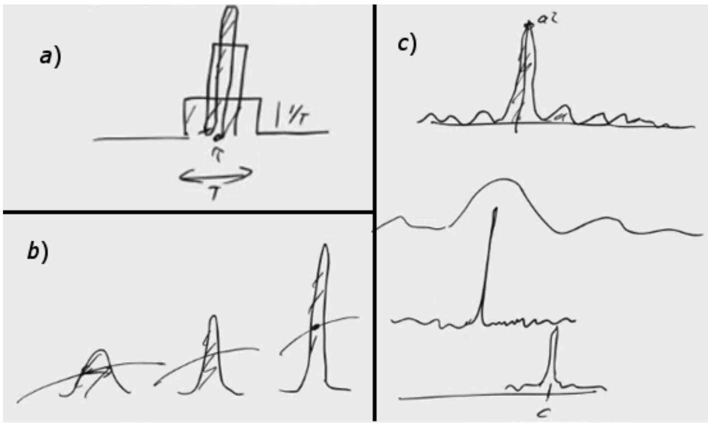
$$G_\alpha(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}} \cdot e^{-\frac{x^2}{\alpha}} \tag{51}$$

Ezzel így néz ki:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ G_\alpha(x)\mathrm{d}x = f(\alpha) \tag{52}$$

A színuszos függvény képlete:

$$\frac{\sin^2(\alpha(x-c))}{(x-c)^2} \tag{53}$$



20. ábra. Különböző közelítések, melyekkel szokták Dirac-δ-t közelíteni. a) Sima téglalapszerű. b) Gauss-görbe. c) Szinuszos dolog, optikában szokás.

És ez a c pontban fog csúcsosodni.

Térjünk vissza a pongyola fizikusok nyelvére, nézzük meg, hogyan használjuk.

$$f(t) = \int \mathrm{d}\tau \;\; \delta(t-\tau) f(\tau)$$

Ez nem más, mint egy integráltranszformáció, méghozzá az identitás transzformáció, és a Dirac-δ ennek a mag(nem)függvénye.

Írjuk fel a következő integráltrafót:

$$f(t) = \int \mathrm{d}\omega \;\; S(t,\omega) F(\omega)$$

$$F(\omega) = \int \mathrm{d}\tau \;\; R(\omega,\tau) f(\tau)$$

Helyettesítsük őket egymásba.

$$f(t) = \int \mathrm{d}\omega \;\; S(t,\omega) \left(\int \mathrm{d}\tau \;\; R(\omega,\tau) f(\tau) \right) = \int \mathrm{d}\omega \quad \int \mathrm{d}\tau \;\; S(t,\omega) \;\; R(\omega,\tau) f(\tau) =$$

$$= \int \mathrm{d}\tau \left(\int \mathrm{d}\omega \;\; S(t,\omega) \;\; R(\omega,\tau) \right) f(\tau)$$

És a zárójelen belül $S(t,\omega) \;\; R(\omega,\tau) = \delta(t-\tau)$. Képzeljük el ugyanezt a Marslakók nyelvén. Ekkor ott bent a következő mennyiség lenne: $S_{t\omega} R_{\omega\tau}$, és ez nem más, mint egy mátrixszorzás. Tehát $S_{t\omega} R_{\omega\tau} = SR_{t\tau}$. De tudjuk, hogy $SR = I$.
Tehát most az oda-vissza integráltranszofrmációk magjának a szorzata formálisan megadta a Dirac-δ-t. Ez ekvivalens azzal, hogy a két trafó egymás inverze. Ha behelyettesítjük a két trafónkat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left(\frac{e^{it\omega}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\tau\omega}}{\sqrt{2\pi}} \right) = \delta(t-\tau)$$

tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \;\; e^{i(t-\tau)\omega} = 2\pi \;\; \delta(t-\tau)$$

Ilyen alakban érdemes megjegyezni. Nézzünk egy nagyon egyszerű példát:

$$\int \mathrm{d}\omega \;\; F(\omega)e^{i\omega t} = f(t)$$

és legyen $F(\omega) = 1$. Ezt behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$f(t) = 2\pi\delta$$

Tehát 1-nek a Fourier-transzformáltja a Dirac-δ.

A továbbiakban kitérünk még pár fontos apróságra. A Dirac-δ alap képlete:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \;\; \delta(t-\tau)\mathrm{d}t = f(\tau)$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \;\; \delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

De mit jelent az, hogy $\delta(\alpha t)$?

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \;\; \delta(\alpha t)\mathrm{d}t = ?$$

Vezessünk be egy új változót, a következő módon: $u = \alpha t$. Így $t = \frac{u}{\alpha}$ és $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\alpha}$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}\right) \;\; \delta(u)\frac{\mathrm{d}u}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{\alpha}\right)\delta(u)\mathrm{d}u = \frac{f(0)}{\alpha}$$

Tehát

$$\delta(\alpha u) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(u)$$

(Abszolútérték, hogy akkor is működjön, amikor α negatív.) De lehetnek még bonyolultabb dolgokat is behelyettesíteni a Dirac-δ-ba. pl:

$$\delta(x^4 - 4)$$

Ami itt történik, az hasonlít a Reziduum-tételes dolgokhoz. Itt is a Dirac-δ ott veszi fel a járulékait, ahol a hasában 0 van. Tehát ez ezesetben így néz ki: (21. ábra.)

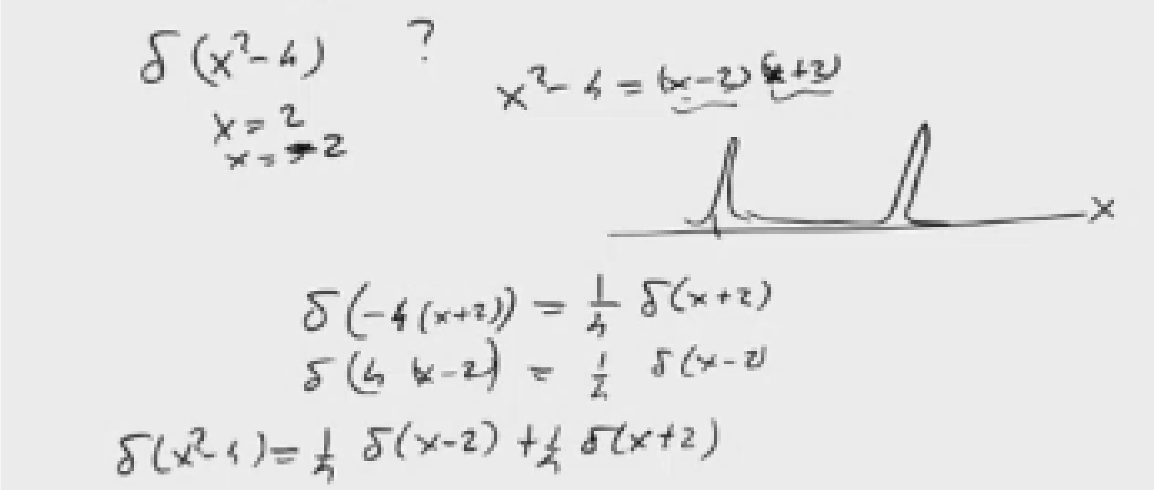
Általánosan ez a következőképp néz ki:

$$\delta(g(x))$$

adott. Megkeressük, hogy hol vannak $g(x)$ függvénynek a zérushelyei. Majd

$$\delta(g(x)) = \sum_{\mathrm{k}} \delta\left[g'(x_{\mathrm{k}}) \;\; \delta(x - x_{\mathrm{k}})\right] = \sum_{\mathrm{k}} \frac{\delta(x - x_{\mathrm{k}})}{|g'(x_{\mathrm{k}})|}$$

ahol x_{k}-k a zérushelyek. Tehát ha egy Dirac-δ hasában egy függvény van, akkor az szétesik több Dirac-δ-ra. De ez nem alkalmazható akkor, ha többszörös zérushelye van a függvénynek.



21. ábra. $\delta(x^4 - 4)$

Tehát pl. azt, hogy $\delta(x^2)$, ezt nem értelmezzük.

Továbbá a Dirac-δ-t tudjuk több dimenzióban is értelmezni. Ekkor a következőképp néz ki:

$$\delta(\vec{r} - \vec{a})$$

és

$$\int f(\vec{r})\ \delta(\vec{r} - \vec{a})\ \mathrm{d}^3\vec{r} = f(\vec{a})$$

A Dirac-δ-nak ekkor olyan jelentése van, mint egy tömegpont, vagy ponttöltés. Példa erre a következő töltéssűrűség:

$$\rho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{a})$$

Nézzük meg, ekkor mekkora az össz töltés:

$$\int \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}V = Q \int \delta(\vec{r} - \vec{a})\ \mathrm{d}^3\vec{r} = Q$$

és valóban. A lényeg, hogy a Dirac-δ nem csak számítások során jöhet be, hanem magából a fizikai problémának a megfogalmazásából is eredhet.

Láttuk már ezt az egyenletet:

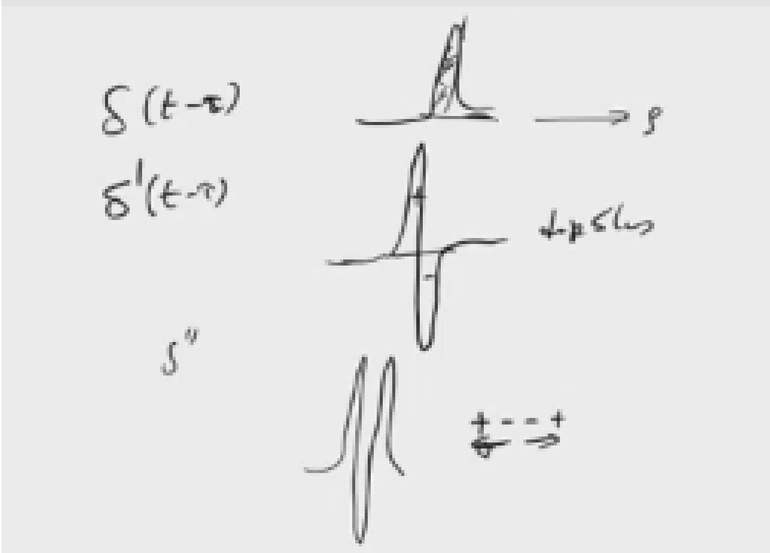
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)}\ \mathrm{d}k = 2\pi\delta(x-a)$$

Ez több dimenzióban a következőképp néz ki:

$$\int e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{a})}\ \mathrm{d}^N k = (2\pi)^N\ \ \delta(\underline{r} - \underline{a})$$

Ez a több dimenziós Dirac-δ.

Lehet értelmezni a Dirac-δ deriváltját? Lásd: 22. ábra.



22. ábra. Dirac-δ és deriváltjai. Mígy a δ a ponttöltést jelentette, annak deriváltja jelentheti pl. a dipólust. Második deriváltja pedig a kvadrupólust.

De pontosan hogyan viselkedik a Dirac-δ deriváltja? Konvolváljunk egy függvényt össze a Dirac-δ deriváltjával:

$$\int f(\tau)\delta'(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = [f\delta]_{-\infty}^{\infty} - \int f'(\tau)\delta(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = -f'(t)$$

Mivel $[f\delta]_{-\infty}^{\infty} = 0$, megkapjuk azt, hogy ez egyenlő a függvénynek a deriváltjával. Tehát a differenciál operátor felírható, mint egy integrál operáció, aminek a Dirac-δ deriváltja a magja. Tehát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = \int \mathrm{d}\tau\ \ (-\delta'(t-\tau))f(\tau)$$

ez egy szinguláris magú integrál operátor.

Kadlecsik Ádám

21. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása Green-módszerrel

A fizikában sokszor fordulnak elő ilyen jellegű differenciálegyenletek:

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)u(x) = f(x)$$

Most ezekkel az inhomogén lineáris differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni. A levezetések során a függvények egyetlen változója x lesz, de ugyanígy kell eljárni parciális egyenletek esetében is.

Ha visszagondolunk a vektorszámításban tanultakra, akkor emlékezhetünk, hogy az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ alakú egyeneltteket $\underline{x}$ vektorát úgy akartuk megtalálni, hogy kerestünk egy megfelelő $\underline{y}^{(k)}$ bázist, ahol $\underline{x} = \sum b_k \underline{y}^{(k)}$ igaz volt. Erre aljárást is találtunk.
A mostani probléma esetében is induljunk ki ebből. Elsőként találnunk kell egy megfelelő bázis. A bázisfüggvényeink legyenek azok a $\varphi(x)$ függvények, melyek az $L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ sajátfüggvényei, tehát:

$$L\varphi = \lambda\varphi$$

Így van most már végtelen sok φ bázisvektorunk. Ezeket normálva igaz lesz, hogy:

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$$

Ezek lineárkombinációjaként írjuk föl az ismert $f(x)$ függvényt:

$$f = \sum_k c_k \varphi_k$$

A c_k együtthatókat a vektorkomponensekhez hasonlóan számolhatjuk a skaláris szorzással:

$$(\varphi_l, f) = \left(\varphi_l, \sum c_k \varphi_k\right) = \sum c_k (\varphi_l, \varphi_k) = \sum c_k \delta_{kl} = c_l$$

Tehát:

$$c_k = (\varphi_k, f)$$

Definiáljuk a következő speciális $\xi_k(x)$ függvényeket:

$$L\xi_k = \varphi_k \iff \xi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k$$

Ezek segítségével tudjuk felépíteni a keresett $u(x)$ függvényt:

$$u = \sum_k c_k \xi_k = \sum_k (\varphi_k, f)\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k$$

Ez könnyen belátható:

$$Lu = L\left(\sum_k (\varphi_k, f)\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k\right) = \sum_k (\varphi_k, f)\frac{1}{\lambda_k}(L\varphi_k) = \sum_k (\varphi_k, f)\frac{1}{\lambda_k}\lambda_k\varphi_k = \sum_k (\varphi_k, f)\varphi_k = f$$

Tehát a stratégia:

1. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bázis felvétele („sajátfüggvény-probléma”)

2. c_k együtthatók meghatározása: $c_k = (\varphi_k, f)$

3. ξ_k függvények: $\xi_k = \dfrac{1}{\lambda_k}\varphi_k$

4. A keresett függvény: $u = \sum c_k \xi_k$

Vizsgáljuk meg az $f(x)$ függvény lineárkombinációs alakját! (A skaláris szorzás definíciójában az x változót ξ-re cseréljük, hogy x megmaradjon facér indexnek.)

$$f(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x) = \sum_k \left(\int \varphi_k^*(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \varphi_k(x) = \int \mathrm{d}\xi \left(\sum_k \varphi_k(x) \varphi_k^*(\xi) \right) f(\xi)$$

Ez egy integráltranszformáció, mely alapján a zárójelben lévő összeg nem lehet más, mint az előző tétel főszereplője: a Dirac-delta. Így az $f(x)$ függvény:

$$f(x) = \int \delta(x - \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

Melléktermékként pedig kaptunk egy új közelítési módot a Dirac-deltára:

$$\sum_k^{\infty} \varphi_k(x) \varphi_k^*(\xi) = \delta(x - \xi)$$

Eme tudással felvértezve írjuk föl a keresett $u(x)$ függvényt! (Ismét lecseréljük a skaláris szorzásban x-et ξ-re.)

$$u(x) = \sum_k (\varphi_k, f) \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k = \sum_k \left(\int \varphi_k^*(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) = \int \mathrm{d}\xi \left(\sum_k \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k^*(\xi) \right) f(\xi)$$

A zárójelben lévő kifejezés láthatóan egy kétváltozós $G(x, \xi)$ függvény, így:

$$u(x) = \int G(x, \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

Ezt a $G(x, \xi)$ függvényt hívjuk Green-függvénynek:

$$G(x, \xi) = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k^*(\xi)$$

A marslakók írásmódjában ez az egyenlet igen kellemes alakot ölt:

$$u_x = \sum_\xi G_{x\xi} f_\xi$$

A tétel elején említett vektorszámításos eset eredménye az volt végsősoron, hogy invertáltuk az $\underline{\underline{A}}$ mátrixot. Most is valami hasonlót csináltunk: invertáltuk a differenciáloperátort, tehát:

$$L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) G(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

Az $f(x)$ függvényt kétféleképpen tudjuk fölírni:

$$f(x) = \int f(\xi) \delta(x - \xi) \, \mathrm{d}\xi \quad \underline{\text{és}} \quad f(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x)$$

Láthatjuk, hogy a következő mennyiségek hozhatók egymással analógiába:

$$c_k \longrightarrow f(\xi) \qquad \varphi_k(x) \longrightarrow \delta(x-\xi)$$

$$k \longrightarrow \xi$$

A x_k függvények definíciójában is találhatunk ehhez hasonlót:

$$L\xi_k = \varphi_k \longrightarrow L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

Így az $u(x)$ analóg párja:

$$u(x) = \sum_k c_k \xi_k(x) \longrightarrow u(x) = \int f(\xi) G(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Tehát minden feltevésünk helytálló.

A Green-függvényt sokszor csak a fentebb definiált összegzős alakban adjuk meg, mert már a végtelen sorösszegeknek is örülünk. Ehhez pedig csak a „sajátfüggvény-problémát” kell megoldani. Ezzel majd később foglalkozunk.

Mendei Barna

22. Elliptikus, parabolikus és hiperbolikus lineáris parciális differenciálegyenletek

22. óra vége felé van ilyenekről szó.

23. Lineáris differenciáloperátorok sajátfüggvényei. Általánosított Fourier-analízis

Legyen egy n dimenziós terünk és annak egy **véges** tartománya. Ez lehet például egy szakasz, egy felület, test, 20 dimenziós gömb (ha a dimenzió legalább annyi), az a lényeg, hogy véges legyen a tartomány.

Jelölje x_k a k. koordinátát. Legyen továbbá egy differenciál operátorunk, ami a koordináták szerinti parciális deriválásoknak, vagyis $\frac{\partial}{\partial x_k}$-nak a polinomja. Meg akarjuk oldani ennek a sajátérték problémáját, vagyis:

$$L(\frac{\partial}{\partial x_k}...)\Phi(x_k...) = \lambda\Phi(x_k...)$$

Egy fizikai probléma megoldásánál tipikusan van néhány térbeli változó és egy idő, az idő irányában nyitott a probléma. Leválasztjuk az időt, így megjelenik egy szeparációs állandó, és egy egyenletet kapunk ami nem tartalmazza az időt, itt pontosan ez van, tehát a sajátérték egy szeparációs konstans.

A határfeltétel az, hogy a függvény a tartomány határán nulla:

$$\Phi(x \in \partial T) = 0$$

Az eddig felírt két egyenlet definiál egy korrekt matematikai problémát.

Bizonyítás nélküli állítások:

1. Létezik olyan ortogonális görbevonalú koordináta rendszer, amely esetén a tartomány határa egy vagy több koordináta felület. Ennek az a feltétele, hogy a felület legyen tisztességes. Ekkor áttérünk új koordinátákra, a deriváltak is az új koordináták szerint lesznek:

   $x_k \Rightarrow u_k \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad L(\frac{\partial}{\partial x_k}...) \Rightarrow L(\frac{\partial}{\partial u_k}...)$

2. A feladat szeparálható a változókban.

   $$\Phi(x...) = \Phi(u...) = \Phi_1(u_1)\Phi_2(u_2)...\Phi_n(u_n)$$

   Ha ilyen alakban keressük a megoldást, akkor ezekre külön-külön kapunk egy egyváltozós diffegyenletet. Ezeket szeparációs konstansok kapcsolják össze.

3. A diffegyenleteket a határfeltételek megkvantálják: m_1,m_2,...,$m_n \in Z$ kvantumszámok.

4. A sajérték ezeknek a kvantumszámoknak a függvénye:

   $$\lambda = f(m_1, m_2, ..., m_n) = \lambda_{m_1 m_2 ... m_n}$$

5. Létezik egy Jacobi determináns, ami az új koordinátákra való áttérést teszi lehetővé.

   $$\int d^n r \Rightarrow \int du_1 \int du_2 ... \int du_n J(u_1, ..., u_n)$$

Ezzel bevezettünk egy skaláris szorzást, a 2. pontban kapott függvények erre nézve ortonormáltak:

$$\left(\Phi_{m_1 m_2 \ldots m_n}, \Phi_{m'_1 m'_2 \ldots m'_n}\right) = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \ldots \delta_{m_n m'_n}$$

Ezeknek az állításoknak az egydimenziós megfelelője a Sturm-Liouville-probléma, ez annak az általánosítása. Az ortonormáltsághoz nem ragaszkodunk, az ortogonalitás a lényeg.

6. Ezek a szorzat alakú függvények bázist alkotnak a tartományon értelmezett és a határfeltételt kielégítő függvények terében.

7. Ha a kvantumszámok a végtelenbe tartanak, akkor a probléma univerzálissá válik.

   Az állapotsűrűség, vagyis a sajátértékek eloszlása egy adott függvényhez tart, ami csak attól függ, hogy hány dimenziós az adott tartomány. A sajátértékek valósak, mert az operátorok itt hermitikusak. A harmonikus analízis alkalmas mechanikai rezgések, levegőben terjedő rezgések, elektromágneses rezgések vizsgálatára. Az ilyen klasszikus fizikai alkalmazás során nem tudjuk figyelembe venni azt, hogy a hullámok lecsengenek, az energia disszipálódik, mert ekkor az operátorok már nem lesznek hermitikusak, nem lesznek igazak ezek az állítások.

   A kvantummechanikában viszont nagyon jól alkalmazható, mivel a kvantummechanikai hullámok nem csillapodnak.

György Zoltán

24. A Green-függvény előállítása az operátor sajátfüggvényei segítségével

Ez konkréten ugyanaz, mint a 21-es...

25. A húr rezgései

Ismerjük a hulámegyenletet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$

Egy húr esetében a tér egydimenziós, tehát ez a következőképpen néz ki:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Emellett vannak határ-, és kezdőfeltételeink:

$$u(t, x = 0) = 0 \qquad \underline{\text{és}} \qquad u(t, x = a) = 0$$

$$u(t = 0, x) = \alpha(x) \qquad \underline{\text{és}} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = \beta(x)$$

ahol a (a húr hossza), $\alpha(x)$, és $\beta(x)$ ismertek.

Tegyük fel, hogy az ismeretlen $u(t, x)$ függvény fölírható a követkeő függvények szorzataként:

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

Ekkor a deriváltak:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{T}(t)X(x) \qquad \underline{\text{és}} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)X''(x)$$

Így az egyeneltet átrendezve kapjuk, hogy:

$$\ddot{T}(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x)$$
$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2 = \text{áll.}$$

Az utolsó lépésben láthatjuk, hogy a két függvényekből álló törtnek meg kell egyeznie. Ez akkor valósulhat meg (az a legvalószínűbb), ha ezek állanó értéket vesznek fel.
Tehát a megoldandó differenciálegyenletek:

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{54}$$

$$X''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} X(x) \tag{55}$$

Először vizsgáljuk az alsó (X-es) egyenletet!
Legyen $-\frac{\omega^2}{c^2} = -k^2$. Ekkor:

$$X''(x) = -k^2 X(x)$$

Ez a harmonikus oszcillátor mozgását leíró differenciálegyenlet, tehát a következő alakú a megoldás:

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

Illesszük a határfeltételekhez:

$$X(x = 0) = 0$$
$$A\cos 0 + B\sin 0 = 0$$
$$A = 0$$

Így a következő alakú már a függvény:

$$X(x) = B\sin(kx)$$

A másik határfeltétel:

$$\begin{aligned} X(x=a) &= 0 \\ B\sin(ka) &= 0 \\ ka &= n\pi \qquad \text{(ahol } n \in \mathbb{Z}) \\ k_n &= n\frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

A bevezetett n egész számmal meghatároztunk egy kvantumszámot, mellyel jellemezhetjük a rezgést. Ez adja meg, hogy hány hepe és hupa van a húron, azaz a módusok számát. Látjuk, hogy ettől függ k értéke is, így az is csak adott értékeket vehet föl.
Tehát a helyfüggő függvény:

$$X_n(x) = \sin(k_n x) = \sin\left(n\frac{\pi}{a}\cdot x\right)$$

A B együtthatót vegyük 1-nek. Ez csak a szinuszhullám amplitúdóját befolyásolja.
A k_n segítségével vissza tudjuk számolni ω értékét is:

$$\omega_n = ck_n = n\frac{\pi c}{a}$$

Az időfüggő differenciálegyenlet:

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$$

Ez ismét a harmonikus oszcillátor egyenlete, tehát a megoldás ugyanolyan alakú.

$$T_n(t) = C_n\cos(\omega_n t) + D_n\cos(\omega_n t)$$

A két eredményt összeszorozva kapjuk a keresett $u(t,x)$ függvényt:

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = (C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x)$$

Egyszerű megfontolásból n értékein változtassunk egy kicsit: $n \in \mathbb{N}$
Az eredeti differenciálegyenlet homogén volt, így ezek összege adja az általános megoldást:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t))\sin(k_n x)$$

Ennek időszerinti deriváltja:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n C_n\sin(\omega_n t) + \omega_n D_n\cos(\omega_n t))\sin(k_n x)$$

A kezdeti feltételeket fölhasználva:

$$\begin{aligned} u(t=0,x) &= \alpha(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin(k_n x) &= \alpha(x) \end{aligned}$$

és

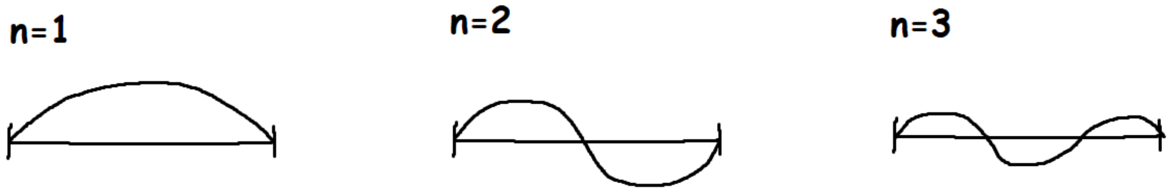
$$\frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x) = \beta(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n D_n \sin(k_n x) = \beta(x)$$

Az ismert $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ függvényeknek persze eleget kell tenniük a határfeltételeknek.
Az így kapott két egyenlet együtthatóit Fourier-sorok segítségével kaphatjuk meg:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{a} \int_0^a \alpha(\xi) \sin(k_n \xi) \mathrm{d}\xi \right) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{2}{a} \int_0^a \beta(\xi) \sin(k_n \xi) \mathrm{d}\xi \right) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \right] \sin(k_n x)$$

Ezzel leírtuk a húr rezgéseit.
Néhány példa n értelmezését segítve:



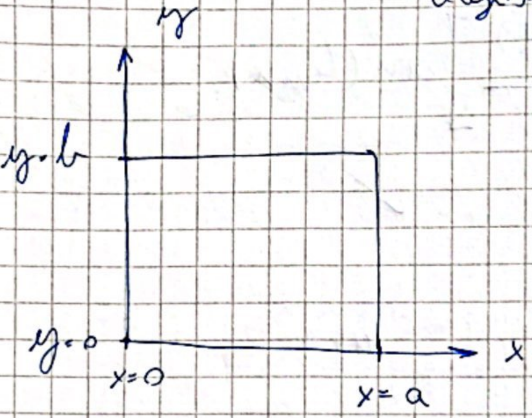
Mendei Barna

26. Téglalap alakú membrán rezgései

Papíron kidolgoztam, képekhez felteszem, remélem olvasható. Bene Róbert

26. TÉTEL

Téglalap alakú membrán rezgései:



Az egyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

$u(t,x,y)$ függvénye

Értelmezési tartomány: $t \geq 0$, $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$

Megoldás menete:

1. $u(t,x,y) = T(t)\,M(x,y)$ Tér és időváltozók szerinti függvények szorzatalakban

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \ddot{T}(t) M \qquad \Delta u = T \cdot \Delta M$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{T}(t) M(x,y) = c^2 T(t) \Delta M(x,y)$$

2. Szeparálás:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{\Delta M}{M} = K \equiv -\omega^2$$

$$\ddot{T} = -\omega^2 T \qquad \Delta M = -\frac{\omega^2}{c^2} M \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow$$

$$T = C \cos \omega t + D \sin \omega t \qquad \Delta M = -k^2 M$$

(Helmholtz egyenlet)

2.)

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''Y + XY'' = -k^2 u = -k^2 X \cdot Y$$

$$\Rightarrow \Big/ \frac{1}{X \cdot Y} \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{= -k_1^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{= -k_2^2} = -k^2 \Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

(Reálisan csak akkor teljesül minden pontban az egyenlet, ha mindkét tag konstans)

$$\Downarrow$$

(2 szeparációs állandó)

$$X'' = -k_1^2 X \qquad Y'' = -k_2^2 Y$$

$$X(x) = A\cos k_1 x + B\sin k_1 x$$

$$Y(y) = E\cos k_2 y + F\sin k_2 y$$

HF: $X(x=0) = 0$

$X(x=a, t) = 0$

$$\Downarrow$$

$A = 0$, (1. HF miatt), B legyen $= 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin k_1 a = 0 \Rightarrow k_1 a = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a}$$

$(n \in \mathbb{Z})$

HF: $Y(y=0, t) = 0$

$Y(y=b, t) = 0$

$$\Downarrow$$

$E = 0$, $F \equiv 1 \Rightarrow \sin k_2 b = 0 \Rightarrow$

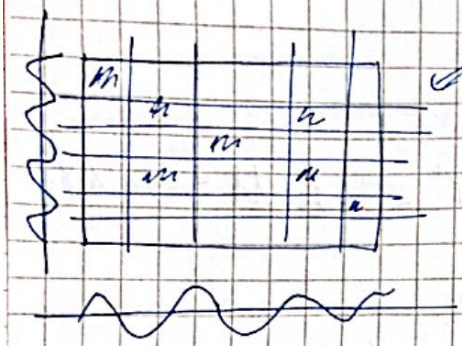
$$\Rightarrow k_2 b = m\pi \Rightarrow k_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\Downarrow$$

Teljes mo.:

$$u_{nm}(x,y) = \sin\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)x\right] \cdot \sin\left[\left(\frac{m\pi}{b}\right) \cdot y\right]$$

Scanned with CamScanner



Valami olyasmi, két oldalról nézve a pelemek mozgása olyan mint a húr rezgései

$$\Downarrow$$

$$u_{nm}(t,x,y) = u_{nm}(x,y)\left(C\cdot\cos\omega_{nm}t + D\sin\omega_{nm}t\right)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow \omega_{nm}^2 = c^2\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow u(t,x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin\omega_{nm}t\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

<u>Kezdőfeltételekhez illesztés:</u>

$$u(t=0,x,y) = \alpha(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x,y) = \beta(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = \sum_n\sum_m\left(-\omega_{nm}C_{nm}\sin(\omega_{nm}t) + \omega_{nm}D_{nm}\cos(\omega_{nm}t)\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}\cdot x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)y$$

$$\Downarrow$$

$$t=0 \Rightarrow \sum_n\sum_m C_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = \alpha(x,y) \qquad (1.)$$

$$\sum_n\sum_m \omega_{nm}D_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = \beta(x,y) \qquad (2.)$$

Fourier-analízis:

(1.) / $\sin\frac{p\pi x}{a}\cdot\sin\frac{q\pi y}{b}$, $p, q \in \mathbb{N}$

⇓ (1. egyenletet sinusokkal szorozva a téglalapra integráljuk)

$$\int_{\square} = \int_0^a dx \int_0^b dy \sum_n \sum_m C_{nm} \sin \sin \sin \sin =$$

$$= \sum_n \sum_m C_{nm} \underbrace{\left(\int_0^a dx \sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{p\pi x}{a}\right)}_{\frac{a}{2}\delta_{np}} \underbrace{\left(\int_0^b dy \sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{q\pi y}{b}\right)}_{\frac{b}{2}\delta_{mq}} =$$

$$= \frac{ab}{4} C_{pq} = \int_0^a dx \int_0^b dy\, \alpha(x,y)\left(\sin\frac{p\pi x}{a}\right)\left(\sin\frac{q\pi y}{b}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow^{p,q\to n,m} \Rightarrow \boxed{C_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a d\xi \int_0^b d\eta\, \alpha(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\cdot\sin\frac{m\pi\eta}{b}}$$

Hasonlóan adódik:

$$\boxed{D_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}}\cdot\frac{4}{ab}\int_0^a d\xi \int_0^b d\eta\, \beta(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\cdot\sin\frac{m\pi\eta}{b}}$$

Ahány index van, ahány kalátos dimenzió van a problémában.

(Ha pl.: nincs y irányú határfelt. $\Rightarrow \underset{-k_1^2}{\frac{X''}{X}} + \underset{-p^2}{\frac{Y''}{Y}} = -k^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + p^2 \Rightarrow \omega_n^2(p) = c^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + c^2p^2 \Rightarrow \omega = f(p) \to \text{Diszperziós reláció}$$

Scanned with CamScanner

27. (*) Kör alakú membrán rezgései. Bessel-függvények

Vizsgáljuk meg egy a sugarú membrán rezgéseit! Érdemes áttérni a síkbeli polár-koordinátarendszerbe. Ismét a hullámegyenletből indulunk ki:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$

Határfeltételünk:

$$u(t, r = a, \varphi) = 0$$

Kezdőfeltételek:

$$u(t = 0, r, \varphi) = \alpha(r, \varphi) \qquad \underline{\text{és}} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, r, \varphi) = \beta(r, \varphi)$$

Polárkkordináták esetében az $u(t, r, \varphi)$ függvény Laplace-a:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

A megoldást ismételten $u(r, \varphi) = T(t)U(r, \varphi)$ alakban keressük. Ekkor a hullámegyenlet:

$$\ddot{T}U = c^2 T \triangle U = -\omega^2$$

Innen a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \ddot{T} = -\omega^2 T \\ \triangle U = -\dfrac{\omega^2}{c^2} U = -k^2 U \end{cases}$$

Keressük az $U(r, \varphi)$ függvényt is szorzat alakban:

$$U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

Így az erre vonatkozó differenciálegyenlet (kifejezve a Laplace-t):

$$\begin{aligned} R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' &= -k^2 R\Phi \\ \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} &= -k^2 \\ r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} &= -k^2 r^2 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy csak az egyik tag függ φ-től $\left(\frac{\Phi''}{\Phi}\right)$. A többi φ tekintetében konstans, így fölírhatjuk a következőt:

$$\Phi'' = K\Phi$$

A megjelenő K konstans bizonyíthatóan negatív. (Pozitív esetben nem teljesül a φ-re való periodicitás. Ez is egy határfeltétel. $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$)
Ekkor legyen $K = -m^2$. Így egy ismerős differenciálegyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \Phi'' &= -m^2\Phi \\ \Phi(\varphi) &= Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi} \end{aligned}$$

Erre teljesülnie kell a periodicitásnak:

$$e^{im(\varphi+2\pi)} = e^{im\varphi}$$
$$e^{im2\pi} = 1$$

Ebből következik, hogy m csak egy egész szám lehet ($m \in \mathbb{Z}$). Ezzel megkvantáltuk a rendszert, kvantumszámot rendeltünk az egyes állapotokhoz.

Eredményünket helyettesítsük be az egyenletünkbe:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} - m^2 = -k^2r^2$$
$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = -k^2R$$
$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

Az így kapott egyenletet hívjuk *Bessel-egyenletnek*.

Bessel-egyenletek:

A Bessel-egyenlet standard alakja ($v \in [0;\infty[$):

$$B''(v) + \frac{1}{v}B'(v) + \left(1 - \frac{m^2}{v^2}\right)B(v) = 0$$

Mivel $m \in \mathbb{Z}$, ezért ilyenből végtelenül sokat tudunk felállítani.
A Bessel-egyenleteknek két megoldása ismeretes. Ezek a Bessel- ($J_m(v)$), és Neumann-függvények ($N_m(v)$). A kettő közti legszembetűnőbb különbség, hogy $J_m(v=0)$ véges, míg $N_m(v=0)$ divergens. Ez azért van, mivel $v \approx 0$ esetben

$$J_m \approx v^{|m|} \qquad \underline{\text{és}} \qquad N_m \approx -\frac{1}{v^{|m|+1}}$$

További érdekes tulajdonságok:

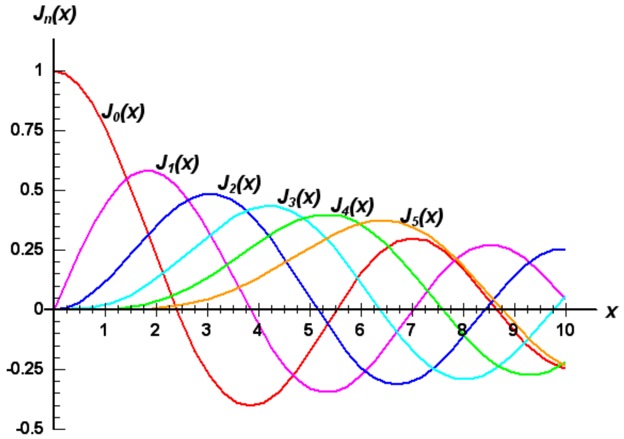
- A függvények közös burkológörbével rendelkeznek, mely $\dfrac{1}{\sqrt{v}}$-vel arányos.
- A különböző m kvantumszámokkal jellemzett függvényeknek nincsenek közös zérus-, illetve szélsőértékeik. Az m-edik függvény n-edik zérushelyét így jelöljük: $\lambda_n^{(m)}$
- A Bessel-függvényekre $v \to \infty$ esetén jó közelítés a következő:

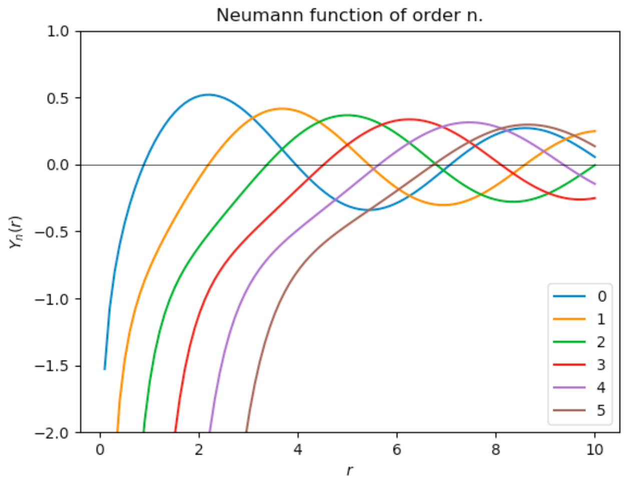
$$J_m \approx \frac{\sin\left(v - m\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{v}}$$

- A Neumann-függvényekre $v \to \infty$ esetén jó közelítés a következő:

$$N_m \approx \frac{\cos\left(v - m\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{v}}$$

Az első néhány Bessel- ($J_n(x)$), és Neumann-függvény ($Y_n(x)$) grafikonja:





A Bessel-egyenletek általános megoldása értelemszerűen ezek lineárkombinációja:

$$B(v) = \alpha J_m(v) + \beta N_m(v)$$

Térjünk vissza az eredeti egyenletünkhöz, hiszen ez még nincs standardizálva.
Legyen $v = kr$ és $R(r) = B(v)$. Ekkor a deriváltak:

$$\frac{\mathrm{d}R(v(r))}{\mathrm{d}r} = kB'(v) \qquad \underline{\text{és}} \qquad \frac{\mathrm{d}R'(r)}{\mathrm{d}r} = k^2B''(v)$$

Így az egyenlet standardizálva:

$$k^2B'' + \frac{1}{r}kB' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0$$
$$B'' + \frac{1}{v}B' + \left(1 - \frac{m^2}{v^2}\right) = 0$$

A határfeltételünk az volt, hogy a membrán szélén a kitérés mindig 0 legyen, tehát:

$$R(r = a) = B(v = ka) = 0$$

Mivel a kerek membrán (dob) közepén nincs szingularitás, így a Neumann-függvények nem jöhetnek szóba, azaz $\beta = 0$.
Most a konstans α szorzót is hagyjuk el, mivel ez csak egy amplitúdót jelent. Tehát:

$$B(v) = J_m(v)$$

A Bessel-függvénynek végtelenül sok zérushelye van. Az, hogy hanyadik érvényesül a membrán végén megad egy n kvantum számot a rezgésre:

$$J_m(ka) = J_m\left(\lambda_n^{(m)}\right) = 0$$

Így új k mennyiségeket tudunk bevezetni:

$$k_{mn} = \frac{1}{a}\lambda_n^{(m)}$$

ahol $m \in \{0; 1; 2; \ldots\}$ és $n \in \{1; 2; \ldots\}$. Ezzel ω-t is kvantáltuk:

$$\omega_{mn} = ck_{mn} = \frac{c}{a}\lambda_n^{(m)}$$

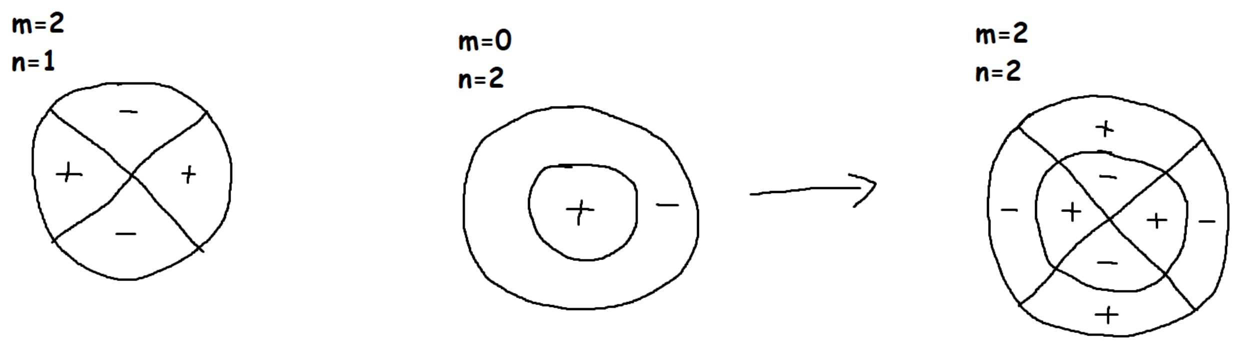
Ezt felhasználva az időfüggő függvény egyenletében:

$$\ddot{T} = -\omega_{mn}^2 T$$
$$T = C_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + D_{mn}\sin(\omega_{mn}t)$$

Minden eddigi eredményünket összegyúrva pedig megkapjuk a hőn áhított függvényt:

$$u(t,r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + D_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\right)e^{im\varphi}J_m\left(\lambda_n^{(m)}\frac{r}{a}\right)$$

Ennek segítségével sok érdekes rezgésképet eredményeztünk:



Az ábrából remélem látszik a lényeg, hogy melyik kvantumszám mit jelez.

Ha m és n jó nagyok, akkor egyre kisebb részekre osztódik fel a membrán, melyek már téglalapoknak is tekinthetők. Ezt logikusnak is mondhatjuk, ha úgy vesszük, hogy az $r-\varphi$ síkon vettünk egy téglalapalakú membránt.

Mendei Barna

28. (*) Gömbfüggvények

Felraktam a képek közé a kidolgozást papíron, könnyen lehet hogy van benne nem kellően átgondolt/jól struktúrált rész, de úgy érzem minden ami fontos benne van. Az elektronpályákkal meg ábrázolásokkal nem foglalkoztam sokat, én úgy vettem hogy az inkább csak érdekesség és így is nagyon hosszú lett, viszont minden levezetést beleírtam annyira részletesen amennyire DGY elmondta.

28. Tétel

Gömbfüggvények

Térbeli polárban a Helmholtz:

$\Delta U = -k^2 U \qquad U(x,y,z) \Rightarrow U(r,\varphi,\vartheta)$

Gömbi polárban Δ:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta \cdot r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\,\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta,\varphi}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\underbrace{\Delta_{\vartheta,\varphi}}$$

Először ezzel foglalkozunk

Ismert $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta U$, $u(t,\underline{r}) = T(t)\,U(\underline{r}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{T}(t) = -\omega^2 T(\omega)$, $\Delta U(\underline{r}) = -k^2 U(\underline{r}) \qquad k = \frac{\omega}{c}$

$U(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\cdot G(\vartheta,\varphi)$, $r \in [0,\infty[$, $\vartheta \in [0,\pi]$,

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\boxed{\Delta_{\vartheta,\varphi} G = -K G}$$

Gömbfüggvények egyenlete

(Sajátértékegyenlet)

(Mert: $\Delta U = \left(\Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\varphi,\vartheta}\right) R(r)\, G(\vartheta,\varphi) =$

$= \left(\Delta_r R(r)\right) G(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \left(\Delta_{\vartheta,\varphi} G(\vartheta,\varphi)\right) = -k^2 R G \quad / \frac{1}{RG}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_r R}{R} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\Delta_{\vartheta\varphi} G}{G}\right)}_{-K} = -k^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta_r R - \frac{K}{r^2} R = -k^2 R$$

$$\Delta_{\vartheta\varphi} G = -K G \quad)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{\partial G}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = -K G$$

Feltételek: φ-ben periodikus kell legyen, szingularitások el kell tűnjenek (HF)

Legyen $G(\vartheta, \varphi) = S(\vartheta)\,\phi(\varphi)$

$\Downarrow$

$$S''(\vartheta)\,\phi(\varphi) + \operatorname{ctg}\vartheta\, S'\phi + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\, S\phi'' = -kS\phi \Big/ \cdot \frac{1}{S\phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S''}{S} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{S'}{S} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\phi''}{\phi} = -k$$

$$\phi'' = K\phi \Rightarrow K = -m^2 \Rightarrow \phi'' = -m^2\phi \Rightarrow \phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

$m \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$$\frac{S''}{S} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{S'}{S} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}(-m^2) = -k \Big/ \cdot S$$

$\Downarrow$

$$S'' + \operatorname{ctg}\vartheta\, S' + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\cdot S = 0$$

$\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$-ben látszólag szinguláris, de nem ezt akarjuk, hanem, hogy $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$-ben is $\frac{0}{0}$ alakú kifejezéseink legyenek, ehhez legyen $S(\vartheta) = (\sin\vartheta)^u \cdot p(\vartheta)$ alakú, $u > 0$

$\Downarrow$

$$S'(\vartheta) = u\cdot\sin\vartheta^{u-1}\cdot\cos\vartheta\cdot p(\vartheta) + \sin^u\vartheta\cdot p'(\vartheta)$$

$$S''(\vartheta) = \sin^u\vartheta\, p'' + 2u\sin^{u-1}\vartheta\,\cos\vartheta\, p' +$$

$$+ \left(u(u-1)\sin^{u-2}\vartheta\cdot\cos\vartheta - u\cdot\sin^u\vartheta\cdot p\right)$$

(Egyszerű deriválással adódott ezeit csak ellenőrizni írtam)

$\Rightarrow$ Az egyenlet alakja:

$$\sin^u\vartheta \cdot p''(\vartheta) + 2u \cdot \sin^{u-1}\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot p'(\vartheta) + u(u-1)\sin^{u-2}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta \cdot p$$

$$- u \cdot \sin^u\vartheta \cdot p + \mathrm{ctg}\,\vartheta\,(u \cdot \sin^{u-1}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta \cdot p) +$$

$$+ \mathrm{ctg}\,\vartheta \cdot \sin^u\vartheta \cdot p' + \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right) \cdot \sin^u\vartheta \cdot p = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^u\vartheta \cdot p''(\vartheta) + (2u+1)\sin^{u-1}\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot p'(\vartheta) +$$

$$+ p(\vartheta)\Big[u(u-1) \cdot \sin^{u-2}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta - u \cdot \sin^u\vartheta + u \cdot \sin^{u-2}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta +$$

$$+ \left(k - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right) \cdot \sin^u\vartheta\Big] = 0$$

$$[\;\;] = \Big[u\,(u-1) \cdot \frac{\sin^u\vartheta}{\sin^2\vartheta} \cdot \cos^2\vartheta + u\,\frac{\sin^u\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos^2\vartheta -$$

$$- m^2\,\frac{\sin^u\vartheta}{\sin^2\vartheta} + (k-u)\sin^u\vartheta\Big]$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\sin^2\vartheta)\,u^2\,\frac{\sin^u\vartheta}{\sin^2\vartheta} - m^2\,\frac{\sin^u\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u-m^2}{\sin^2\vartheta} \cdot \sin^u\vartheta$$ $\Rightarrow$ ettől szinguláris a fv, akkor tűnik el, ha $u^2 = m^2$

$\Rightarrow$ akkor eltűnik a szingularitás $\Rightarrow$

Ebben az esetben:

$$p''(\vartheta) + (\;)\,p' + f(k,m)\,p(\vartheta) = 0 \quad \text{(Nem szinguláris)}$$

Ezután:

$z = \cos\vartheta \;\Rightarrow\; p(\vartheta) \to Q(z)$ áttérés

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dQ}{dz} \cdot \frac{dz}{d\vartheta} \Rightarrow \frac{dQ}{dz} \cdot -\sin\vartheta$$

$$\frac{d^2p}{dz^2} = -\cos\vartheta \cdot \frac{dQ}{d\vartheta} - \sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta} \cdot \frac{dQ}{dz} =$$

$$= -\cos\vartheta \frac{dQ}{dz} - \sin\vartheta \frac{d^2Q}{dz^2} \frac{dz}{d\vartheta} = Q''(z)\sin^2\vartheta - \cos\vartheta\, Q'$$

$\Downarrow$ Ezzel $Q(z)$-re kapunk differenciálegyenletet

$$Q''(z) + f(z)\,Q'(z) + g(z,k,m) \cdot Q(z) = 0$$

$$z = \cos\vartheta \in [-1, 1]$$

Sommerfeld polinom: $Q_z = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$

$\Rightarrow$ konvergenciasugár vizsgálata

Konvergenciasugár:

$|z| < 1$ $\Rightarrow$ csak akkor analitikus, de $z = 1$ az északi és déli sark, ott is értelmes kell legyen $\Rightarrow$ nem hagyjuk divergálni a végtelenbe a sort $\Rightarrow$ emiatt csak polinom $\Rightarrow$

létezik max. együtthatója: c_q a max. e.h. $\Rightarrow$

$\Rightarrow c_{q+1} = 0$

$$\Downarrow$$

$c_{q+1} = (\ )c_q + (\ )c_{q-1} + \ldots$ eleve kijön,

hogy K nem lehet bármi, határfelt. megszorít. a szeparációs állandót. $\Rightarrow K = l(l+1) \quad l \in \mathbb{N} \cup 0$

$(l = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

$\Rightarrow q = l - \mu \quad , \quad \mu = |m|$

$$\Downarrow$$

$$u(t, r, \vartheta, \varphi) = T(t) R(r) G(\vartheta, \varphi) = T(t) R(r) P(\vartheta) \phi(\varphi) =$$

$$= T(t) R(r) \cdot e^{im\varphi} \cdot (\sin\vartheta)^{\mu} \cdot Q(z)$$

$\mu = |m| \qquad z = \cos\vartheta$

$$\Downarrow$$

(Q = $l-\mu$ fokú függvény)

$$G(\vartheta, \varphi) = N_{lm} (\sin\vartheta)^{\mu} P_l^{|m|}(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

Mert homogén egy., konstans szorzót kaphat

($l - m$ fokú polinom $\Rightarrow l \geq |m|$)

$\Rightarrow$ Lehetséges m-ek száma: $d = 2l+1 \quad (-l, \ldots l)$

Normálás:

Jacobi

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \; G_1(\vartheta, \varphi)^* G_2(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta = (G_1, G_2)$$

Kiderül, hogy ortogonálisak

$e^{im\varphi} \quad e^{-im'\varphi} \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{mm'}$

Ez az ortogonalitás egyik része (φ-től függő rész)

Ezeket ha normáljuk is, akkor kapjuk a gömbfüggvényeket (itt a ϑ szerinti ortogonalitást és normálást nem vezettük le)

Jelük: $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$

$m \in \{-l, -l+1, \dots l\}$

$l = (0, 1, 2, \dots)$

$$(Y_{lm} Y_{l'm'}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \, Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi) Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

(Ortonormált fv.-ek)

Ezek $\Delta_{\vartheta\varphi}$-nek sajátfüggvényei

!!

$$\Delta_{\vartheta\varphi} Y_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \mathrm{ctg}\,\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) Y_{lm} =$$

$$= \underbrace{-l(l+1)}_{\text{sajátérték}} Y_{lm}$$

Asszociált Legendre polinom, $\cos\vartheta$-nak $l-|m|$ fokú polinomja

$\Downarrow$

$$Y_{lm} = N_{lm} (\sin\vartheta)^{|m|} \cdot P_l^{|m|}(\cos\vartheta) \cdot e^{im\varphi}$$

(Minden z.h.-ja valós, $[-1, 1]$ intervall.)

Ábrázolás:

$l=0 \quad m=0 \qquad Y_{lm} \sim \sin^{|m|}\vartheta \cdot P_l^{|m|}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}$

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \text{const.} \Rightarrow$ nincs z.h. a gömbön.

s állapot

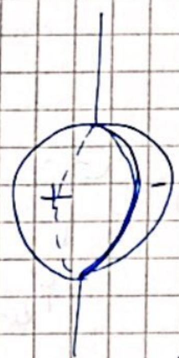
$l=1 \quad m=1,0,-1 \quad l-m=0$ fokú polinom = const.

$Y_{11}: \sin^1\vartheta \cdot P \cdot e^{i\varphi}$

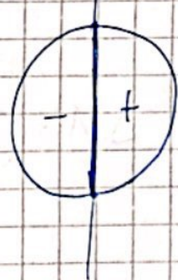
$Y_{1-1}: \sin^1\vartheta \cdot P \cdot e^{-i\varphi}$

$l(l+1)=2$

$\frac{Y_{11}+Y_{1-1}}{2} = \sin\vartheta\cos\varphi \Rightarrow$



$\frac{Y_{11}-Y_{1-1}}{2i} = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \Rightarrow$



$Y_{10} = \cos\vartheta \Rightarrow$

(Ugyanaz csak elforgatva)

p állapot

Sugárirányú függés:

Álla.: Egymásba ágyazott gömbhéj zérushelyei, pontokkal, vagy csomófelületekkel

Gömbf.-k a térben határt alkotnak

Sugárfüggő rész:

$$\Delta u(r,\vartheta,\varphi) = -k^2 u$$

$$\Downarrow$$

$$u(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,G(\vartheta,\varphi)$$

$$\hookrightarrow Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} G = -l(l+1)G \quad \Rightarrow \quad u(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,Y_{lm}$$

$$G \to Y_{lm}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta u = (\Delta_r R)Y_{lm} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\Delta_{\vartheta,\varphi} Y_{lm}\right)}_{-l(l+1)Y_{lm}}\cdot R = -k^2 R Y_{lm}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \left(\Delta_r R - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 R\right)Y_{lm} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta_r R(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\cdot R(r) = -k^2 R(r)$$

$$\Downarrow$$

Scanned with CamScanner

!

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) R(r) = 0$$

$$w = k \cdot r \implies R(r) = F(w)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dw^2} F(w) + \frac{2}{w}\frac{dF(w)}{dw} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{w^2}\right) F(w) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(w) = \frac{B(w)}{\sqrt{w}} \qquad F' = \frac{B'}{\sqrt{w}} + B\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{w^{2/3}}\right)$$

$$F'' = \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$B'' + \frac{1}{w} B' + \left(1 - \frac{l^2 + l + \frac{1}{4}}{w^2}\right) B = 0$$

$$\Downarrow$$

$$B'' + \frac{1}{w} B' + \left(1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{w^2}\right) B = 0$$

$$\Downarrow$$

Bessel-egyenlet

$$\Downarrow$$

$$\alpha J_{l+\frac{1}{2}}(w) + \beta N_{l+\frac{1}{2}}(w)$$

ez sing. origóban, ezért ez nem lehet $\Rightarrow$

$$u(t, r, \vartheta, \varphi) \cong T_{kv}(t) \cdot \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

(Csak a feles indexű Bessel fv.-ek jönnek be)

(Eredetileg $u = T_{kv}(t) \cdot R(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ volt, ahol $R(r) \to F(kr) = \frac{B(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}$)