1. Példák

Íme néhány kidolgozott példa, ami szintén segíthet a zhra való készülésben.

1.1. Dobozba zárt részecske hullámfüggvénye

Feladat:
Adjuk meg egy a, b, c oldalú dobozba (végtelen magas potenciálba) zárt részecske hullámfüggvényét.
Mivel nem feltételezek kvantummechanikai előismereteket, ezért röviden összefoglalom, hogy miről van szó. A kvantummechanikában sosem tudjuk pontosan, hogy hol van a részecskénk, de megtudjuk mondani, hogy mekkora valószínűséggel tartózkodik egy adott pontban, ezt a Ψ hullámfüggvény négyzete adja meg. A hullámfüggvényt pedig a kvantummechanika alapegyenlete, az úgynevezett Schrödinger-egyenlet határozza meg. Ez az egyenlet pedig nem más mint az energia-operátor (továbbiakban Hamilton-operátor) sajátértékegyenlete. Az egyenletet úgy határozzuk meg, hogy vesszük a klasszikus mechanikából ismert Hamilton függvényt, amelynek alakja egy részecskére:

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m} + V(q, t) \tag{1}$$

Ahol q egy tetszőleges általános koordináta, p pedig a hozzá tartozó általános impulzus (erről még később lesz szó). Itt behelyettesítjük a kvantummechanikában használatos operátorokat (most tekintsünk el az időfüggéstől) az impulzus, illetve a koordináta helyére:

$$\boldsymbol{q} = q \cdot \quad \boldsymbol{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} \tag{2}$$

Illetve keressük a sajátértékeit, illetve a sajátfüggvényeit az operátornak, azaz a megfelelő sajátértékegyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \Psi + V(x)\Psi = E\Psi \tag{3}$$

Ahol E a részecske lehetséges energiája. Most ez alapján oldjuk meg a fenti feladatot, mely szerint egy végtelen magas potenciálgödörbe zárt részecskének a hullámfüggvényét keressük. A potenciálgödörben tudjuk, hogy $V(x) = 0$, ekkor az ehez tartozó Schrödinger egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \Psi = E\Psi \tag{4}$$

Ezután egyszerű szorzással az úgynevezett Helmholtz-egyenletbe, azaz a Laplace-operátor sajátértékegyenletéhez jutunk:

$$\triangle \Psi = -k^2 \Psi \tag{5}$$

Ahol $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Most keressük a megoldást $\Psi = X(x)Y(y)Z(z)$ alakban, ezt nevezzük a változók szeparálásának, ekkor az egyenlet:

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = -k^2 XYZ \tag{6}$$

Most osszunk le XYZ-vel:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k^2 \tag{7}$$

Ekkor észrevehetjük, hogy az első, második, és harmadik tag a bal oldalon rendre csak x-től y-tól és z-től függ, míg a jobb oldalon egy konstans áll, ekkor azt mondhatjuk, hogy akkor teljesül csak az egyenlet, ha a bal-oldali első mésodik, és harmadik tag állandó, ekkor az egyenleteink:

$$X'' = \alpha X \quad Y'' = \beta Y \quad Z'' = \gamma Z \tag{8}$$

Illetve:

$$\alpha + \beta + \gamma = -k^2 \tag{9}$$

Most nézzük csak az X-re vonatkozó egyenletet, és tegyük fel, hogy $\alpha < 0$, ekkor legyen $-k_1^2 = \alpha$. Ekkor könnyen belátható, hogy a megoldás a következő alakot ölti:

$$X(x) = A \sin(k_1 x) + B \cos(k_1 x) \tag{10}$$

Ahol A, B tetszőleges számok, de hogy mennyi az értékük, azt a kezdeti (vagy perem) feltételek adják meg. A kvantummechanikában megköveteljük, hogy a hullámfüggvény abszolútérték-négyzete normálható legyen, azaz:

$$\int |\Psi|^2 \mathrm{d}V = 1 \tag{11}$$

Illetve, hogy a hullámfüggvény folytonos legyen, illetve ha a potenciál folytonos, akkor a hullámfüggvény deriváltja is legyen folytonos. Ez alapján nézzük meg, hogy mi lehet a hullámfüggvény a dobozon kívül, ekkor a megfelelő Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \Psi + \infty \Psi = E\Psi \tag{12}$$

Ennek az egyenletnek csak a konstans 0 lehet a megoldása, egyébként nem teljesülne a normálhatósági feltétel. Tehát a dobozon belüli hullámfüggvénynek a 0, és a helyen 0-nak kell lennie, illetve a deriváltjának is nullának kell lennie, hogy teljesüljenek a folytonosságra kiszabott feltételek. Ebből:

$$X(0) = B = 0 \quad X(a) = A\sin(ak_1) = 0 \tag{13}$$

Ebből következik, hogy $B = 0$, illetve, hogy ne legyen a megoldás azonosan 0, ezért:$ak_1 = n\pi$, ahol n egész szám, ebből $k_1 = \frac{n\pi}{a}$. A megoldás tehát:

$$X(x) = A\sin(\frac{n\pi}{a}x) \tag{14}$$

Hasonlóan eljárva a teljes hullámfüggvény:

$$\Psi_{n,m,l} = A\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sin(\frac{l\pi}{c}z) \tag{15}$$

És ne felejtsük el, hogy n,m,l között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{l^2\pi^2}{c^2} = k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{16}$$

Amiből megkaphatjuk az energia lehetséges értékeit:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{l^2\pi^2}{c^2}\right) \tag{17}$$

Jól látszik a példán, hogy az energia nem vehet fel tetszőleges értékeket, csak néhány energiaérték lehetséges. Nem hiába nevezzük ezt kvantummechanikának, itt az energia csak bizonyos energiákat vehet fel, azaz az energia nem folytonos, hanem darabos, szebben mondva kvantált. De egy dolog kimaradt! A hullámfüggvényben maradt egy tetszőleges A konstans, ez biztosítja a normálhatóság lehetőségét.

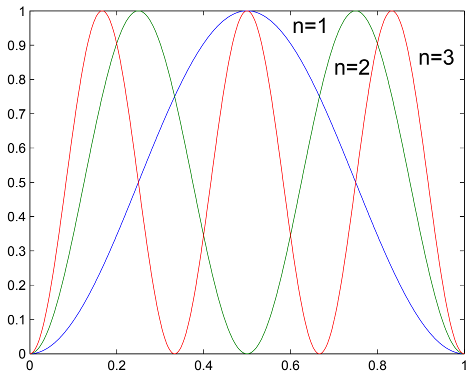
1.2. Hengerszimmetrikus hullámegyenlet megoldása

Feladat:
Oldjuk meg az elektromos potenciál hullámegyenletét hengerszimmetrikus esetben.

Írjuk fel az elektromos potenciálra a hullámegyenletet:

$$\triangle\,\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{18}$$

A megoldás menete a következő: először leválasztjuk az időfüggő tagot, majd megoldjuk a differenciálegyenletet, úgy hogy a hengerben szimmetrikus



1. ábra. Egydimenziós dobozba zárt részecske megtalálási valószínűsége különböző n-re

legyen, azaz feltesszük, hogy nem függ z-től . Az időfüggő tag leválasztásához keressük az egyenletet $\Phi = R(r\varphi)T(t)$, ekkor az egyenlet:

$$T \bigtriangleup R = \frac{1}{c^2} R\ddot{T} \tag{19}$$

Osszunk le Φ-vel:

$$\frac{1}{R} \bigtriangleup R = \frac{1}{Tc^2}\ddot{T} \tag{20}$$

Az egyenlet bel oldala csak r-től, a jobb oldala pedig t-től, ezért az egyenlet csak akkor teljesül, ha mindkét oldal egy állandóval egyezik meg, ez legyen $-\alpha^2$.Az időtől függő tag megoldása:

$$T(t) = Ae^{i\alpha ct} + Be^{-i\alpha ct} \tag{21}$$

A helytől függő tagra vonatkozó egyenlet:

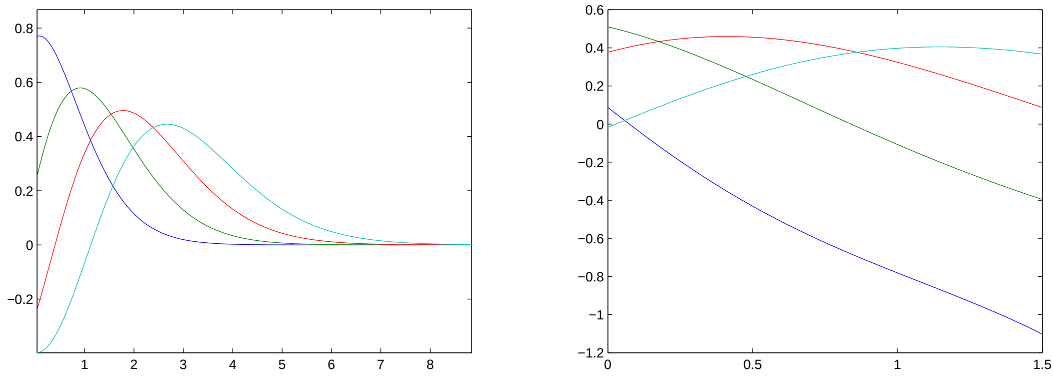
$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2 R \tag{22}$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét, ekkor:

$$R_1''\phi + \frac{1}{r}R_1'\phi + \frac{1}{r^2}\phi'' R_1 = -\alpha^2 R_1\phi \tag{23}$$

Most osszunk le $R(r, \varphi)$-vel:

$$\frac{R_1''}{R_1} + \frac{1}{r}\frac{R_1'}{R_1} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} = -\alpha^2 \tag{24}$$



2. ábra. Néhány első, és másodfajú Bessel-függvény ábrája

Ekkor látható, hogy a φ-től függő tag megoldása:

$$\phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi} \tag{25}$$

Ahol m egész szám, mivel ϕ-nek 2π-ként periodikusnak kell lennie fizikai okokból a hidrogénatomhoz hasonlóan. Ekkor a sugártól függő tag differenciálegyenlete:

$$R_1'' + \frac{R_1'}{r} + \left(\frac{m^2}{r^2} + \alpha^2\right) R_1 \tag{26}$$

Ez pedig az úgynevezett Bessel-egyenlet, melynek megoldásai az első és másodfajú Bessel-függvények, melyek nem állíthatók elő hétköznapi függvényekkel kifejezve, ugyanakkor majdnem periodikusak, és a következő függvényekkel közleíthetők a $r \to \infty$ esetben:

$$J_m(z) \sim \frac{\cos(z - \varphi_m)}{\sqrt{z}} \tag{27}$$

$$N_m(z) \sim \frac{\sin(z - \varphi_m)}{\sqrt{z}} \tag{28}$$

A megoldás pedig ezen függvények lineárkombinációjaként áll elő.

1.3. ZH feladat:Áramlás hengerszimmetrikus térben

Feladat:

Viszkózus folyadék stacionárius áramlását vizsgáljuk két koncentrikus R és 2R sugarú henger közötti térben. A sebességmezőnek csak a tangenciális komponense különbözik nullától, és ez csak a tengelytől mért r távolságtól

függ: $v_\varphi(r)$. Fizikai okokból tudjuk, hogy a sebességmező kielégíti a Laplace-egyenletet: $\triangle\ v(r) = 0$. Az áramlás a szilárd testek határfelületénél együtt mozog a fallal, a relatív sebesség nulla. Esetünkben a külső henger áll, a belső állandó szögsebességgel forog. Határozzuk meg a $v_\varphi(r)$ függvényt! Használjuk a grad, div, rot differenciáloperátorok hengerkoordinátarendszerben felírt alakját. (lásd Bronstein vagy előadás-jegyzet), de ne használjuk fel közvetlenül a Laplace-operátor előadáson megadott alakját.
A megoldáshoz először tudnunk kell, hogy mit kell megoldani, azaz tudnunk kell a differenciálegyenletet. A differenciálegyenlet megadásához használjuk a (**??**) egyenletet. Látható, hogy a sebességvektor divergenciája 0, ezután csak a rotációs tagot kell kiszámolnunk. Helyettesítsük be a vektormezőnket a rotáció hengerkoordinátás definíciójába:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\boldsymbol{v})_r &= 0 \\ \mathrm{rot}(\boldsymbol{v})_\varphi &= 0 \\ \mathrm{rot}(\boldsymbol{v})_z &= \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\varphi \end{aligned} \tag{29}$$

Ezután ezt a vektormezőt helyettesítsük a rotáció definíciójába:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}))_r &= 0 \\ \mathrm{rotrot}((\boldsymbol{v}))_\varphi &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\varphi\right) \\ \mathrm{rotrot}((\boldsymbol{v}))_z &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

A megoldandó differenciálegyenlet (**??**) alapján:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v_\varphi = 0 \tag{31}$$

Keressük a megoldást $v_\varphi(r) = r^n$ alakban, ahol n egész szám, ekkor elvégezve a deriválásokat:

$$n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1 = 0 \tag{32}$$

Amiből: $n = \pm 1$, emiatt az általános megoldása az egyenletnek:

$$v_\varphi(r) = Ar + \frac{B}{r} \tag{33}$$

Most ezt kell a peremfeltételekhez illeszteni, tudjuk, hogy R sugárban a folyadék ω szögsebességgel forog, míg 2R sugárban áll. Ebből az egyenletek A, B-re:

$$\begin{aligned} 2AR + \frac{B}{2R} &= 0 \\ AR + \frac{B}{R} &= \omega \end{aligned} \tag{34}$$

Ezen algebrai egyenletek megoldásával pdeig megkapjuk a számunkra megfelelő A, B párt, amit behelyettesítve az általános megoldásba megkapjuk a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást.

1.4. Minimális forgásfelület

Feladat: Határozzuk meg két gyűrű között kifeszíthető minimális forgásfelületet

A minimális forgásfelület meghatározása a variációszámítás egyik legegyszerűbb feladata. Az $y(x)$ függvénnyel határolt felületet ugyanis az alábbi integrállal tudjuk definiálni:

$$A = 2\pi \int y \mathrm{d}s \tag{35}$$

Ahol $\mathrm{d}s$ a szokásos ívhosszparaméter, amelyet ki lehet fejezni az $y(x)$ függvény deriváltjával, az alábbi képpen:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x \tag{36}$$

Ezt behelyettesítve a felület-funkcionálba:

$$A[y] = \int y\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x \tag{37}$$

Az extremalizálandó funkcionál jól láthatóan nem függ expliciten x-től, azaz felírhatjuk rá a Beltrami-függvényt:

$$B = \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2(x)} \tag{38}$$

Közös nevezőre hozva:

$$B = \frac{yy'^2 - y - yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{39}$$

Itt egyszerűsítve, illetve a B Beltrami-állandó helyére $-B$-t írva (ezt megtehetjük, ugyanis B-t a kezdeti feltételekből határozzuk meg, emiatt mindegy az előjele, az értékét később számoljuk ki):

$$B = \frac{y}{\sqrt{1 + y'2}} \tag{40}$$

Ezt átrendezve kapjuk a következő differenciálegyenletet:

$$\frac{y}{B} = \sqrt{1 + y'^2} \tag{41}$$

Most megsejtjük a megoldást! Természetesen átrendezéssel, és integrálással is kiszámolhatjuk a megoldást, ugyanakkor ez feleseleges, mivel ha tekintjük a hiperbolikus függvények közötti összefüggéseket:

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad 1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x) \tag{42}$$

Ezeket behelyettesítve a fenti egyenletbe, az általános megoldás a következő lesz:

$$y(x) = B \cosh\left(\frac{x-a}{B}\right) \tag{43}$$

Ahol a, B a kezdeti feltételekből kapható meg. Most tekintsük azokat a feltételeket, amikor a forgásfelület két végén a felület sugara megeggyezik: $y_1 = y_2$, és a felület "alja" és "teteje" ugyanolyan messze van az origótól: $x_1 = -x_2$, ekkor a konstansnak 0-nak kell lennie, különben a megoldás nem lenne szimmetrikus x-ben, a másik feltételből pedig:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{B}{x_1} \cosh\left(\frac{x_1}{B}\right) = \frac{\cosh(u)}{u} \tag{44}$$

Összefüggést kapjuk ($u = \frac{x_1}{B}$), ha megvizsgáljuk ezt a függvényt, akkor jól láthatóan van egy minimuma, azaz az y_1/x_1 arány nem lehet akármilyen kicsi. Ez fizikailag azt jelenti, hogyha elég távolra visszük egymástól a két végét a felületnek (most beszéljünk egy hártyáról), úgy hogy az átmérőt a végén nem változtatjuk, akkor előbb-utóbb a hártya kettépattan, és már nem lehet felírni a fenti képlettel.

1.5. Optikai példa: Fénysugár útja inhomogén közegben

Az optikában a fény terjedését, közelíthetjük úgy, hogy fénysugárnak tekintjük az elektromos síkhullámot, ekkor a fénysugár pályájának egyenletét az alábbi funkcionál extrémuma adja meg (ezt nevezzük Fermat-elvnek):

$$L[y] = \int n(x,y)\mathrm{d}s = \int n(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{45}$$

Ekkor $y(x)$ írja le a fénysugár útját. A fenti képletben n a törésmutatót jelenti, ahol ez most pontról pontra változhat. Például lineárisan növekvő törésmutató esetén visszakapjuk a fenti problémát. A fenti elv azzal ekvivalens, hogy a fénysugár a legrövidebb idő alatt megvalósuló utat teszi meg. Ezt úgy is gondolhatjuk, hogy a fény minden lehetséges utat bejár, ugyanakkor a végpontba más fázissal érkeznek be, és emiatt interferálnak. Az interferencia eredményeképpen a nagy távot megtevő fénysugarak járuléka eltűnik, mivel két kicsit eltérő pálya között is lehet nagy fáziskülönbség, ami miatt a megfigyelt pontban az időátlaghoz adott járulék eltűnik.

1.6. Mozgás centrális erőtérben, impulzusmomentum megmaradása

Feladat: Írjuk fel a bolygók pályájának egyenletét a Lagrange-formalizmus alapján.
Most térjünk vissza a klasszikus mechanikához, azon belül pedig a bolygók mozgásához.Most el fogjuk hanyagolni azt, hogy egy bolygó, és egy csillag egy közös tömegpont körül kering, a csillagot állónak tekintjük, illetve elhanyagoljuk a többi bolygó gravitációs vonzását. Ahhoz, hogy ezt a problémát tárgyaljuk, nem célszerű a bolygó Descartes-koordinátáinak használata, ugyanis a gravitáció a bolygó és a csillag távolságától függ. Emiatt vezessük be a síkbeli polárkoordinátákat. Mért nem térbelit? A bolygóknak kötelező egy síkban mozogni? A centrális erőtérben mozgó tömegpontok esetén az impulzusmomentum állandó marad, erről pedig megmutatható, hogy ekvivalens azzal, hogy a mozgás mindig egysíkú. Tehát az új általános koordinátáinkkal kifejezve a Descartes-koordináták:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{46}$$

Ahol feltételezzük, hogy a csillag a koordinátarendszerünk középpontja. Ez alapján a koordináták idő deriváltjai az új koordinátákkal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned} \tag{47}$$

Ezekkel kifejezve a bolygó kinetikus energiája:

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 \tag{48}$$

A gravitációs potenciális energiát pedig ismerjük:

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{r} \tag{49}$$

Ez alapján felírhatjuk a rendszer Lagrange-függvényét:

$$L = K - V = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha m}{r} \tag{50}$$

Látható, hogy a Lagrange-függvény nem függ expliciten φ-től, ezért az ehez konjugált impulzus állandó marad, ezt nevezzük el impulzusmomentumnak:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = N \tag{51}$$

Ebből kifejezhető $\dot{\varphi}$, és behelyettesíthető a Lagrange-függvénybe:

$$L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{N^2}{2mr^2} + \frac{\alpha m}{r} \tag{52}$$

Most kiküszöböltük az egyik változót, ez azért jó, mert így egy darab differenciálegyenletet kell megoldanunk két csatolt differenciálegyenlet helyett. Azonban ez így is nehéz feladat, ezért próbáljuk meg a bolygó pályáját meghatározni, azaz a $r(\varphi)$ összefüggést. Ehez tekintsük a bolygó energiáját, ami mivel a Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől, ezért megmarad a mozgás során.

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{N^2}{2mr^2} - \frac{\alpha m}{r}}_{V_{eff}} \tag{53}$$

Ahol az utolsó két tagot effektív potenciálnak nevezzük, azért mert a mozgás leírható, egy ilyen potenciálban megvalósuló mozgásként. Most vezessünk be egy új változót:

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} \tag{54}$$

Ekkor az időderivált:

$$\dot{r}(\varphi) = -\frac{u'}{u^2}\dot{\varphi} = -u'r^2\dot{\varphi} = -u'\frac{N}{m} \tag{55}$$

Itt felhasználtuk az impulzusmomentum megmaradását. Most ezt visszahelyettesítve az energia képletébe a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$E = \frac{m}{2}u'^2\frac{N^2}{m^2} + \frac{N^2}{2m}u^2 - \alpha m u \tag{56}$$

Most emeljünk ki N^2/m-et, és alkalmazzuk a $p = \frac{N^2}{\alpha m}$ jelölést:

$$\frac{N^2}{m}\left[\frac{u'^2}{2} + \frac{1}{2}u^2 - \frac{u}{p}\right] = E = \text{állandó} \tag{57}$$

Ebből a zárójelben teljes négyzetté alakítással kapjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{p}\right) - B = \text{állandó} \tag{58}$$

Most felismerhetjük az egyenlőségben az $1/p$-vel eltolt harmónikus oszcillátor energiáját. Ennek ismerjük a megoldását:

$$u(\varphi) = \frac{1 + \epsilon\cos\varphi}{p} \tag{59}$$

Itt ϵ-t a kezdeti feltételekből kapjuk meg. Ebből a pálya egyenlete:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \tag{60}$$

A megoldást ezután felírhatjuk Descartes-koordinátákban, amiből megkaphatjuk, hogy ez ϵ értékétől függően más pályán fog haladni a bolygó:

- $0 \leq \epsilon < 1$ esetén ellipszis
- $\epsilon = 1$ esetén parabola
- $1 \leq \epsilon$ esetén hiperbola

Most nem mutatjuk meg, de itt ϵ függ az energiától, illetve kiszámolható a pálya időfüggése, ugyanakkor ez már nem adható meg egzaktul, de perturbációszámítással meg lehet határozni.

1.7. Harmónikus oszcillátor Hamilton-függvénye

Feladat: Határozzuk meg a harmónikus oszcillátor Hamilton-függvényét, és írjuk fel a kanonikus egyenleteket!
Ebben a példában megmutatjuk, hogy hogyan kell a Hamilton-formalizmussal felírni egy egyszerűbb rendszer mozgását. "*Ismeritek-é a legegyszerűbb fizikai rendszereket? Harmónikus oszcillátor...*" Ezért most megnézzük a harmónikus oszcillátort Hamilton-formalizmusban. A harmónikus oszcillátor Lagrange-függvénye:

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \tag{61}$$

Ekkor a koordinátához kanonikusan konjugált impulzus:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{62}$$

Ezt az összefüggést invertálva:

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \tag{63}$$

Most pedig végezzük el a Legendre-transzformációt, amivel megkapjuk a Hamilton-függvényt:

$$H(p, x, t) = p\dot{x}|_{\dot{x}(p)} - L(p/m, x, t) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \tag{64}$$

Ez ebben az esetben megegyezik a mechanikai energiával. Most írjuk fel a kanonikus mozgásegyenleteket:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{65}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \tag{66}$$

Ha most visszahelyettesítjük az első egyenletet a másodikba, akkor megkapjuk a már ismert mozgásegyenletet:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{67}$$

Tehát visszakapjuk a kanonikus egyenletekből a már ismert mozgásegyenletet, ugyanakkor a kanonikus mozgásegyenletek több esetben könyebben használhatók számítógépes szimulációra. Emellett a kvantummechanika is a Hamilton-formalizmusra épül, emiatt is érdemes volt megnézni ezt a példát.

1.8. ZH feladat: Kényszererők

Feladat:Egy m tömegű test mozog $V(z) = mgz$ potenciálú homogén gravitációs térben. Korlátozzuk a mozgását úgy, hogy egy vízszintes tengelyű, R sugarú henger palástja felső részének külsején legyen kénytelen mozogni! Tárgyaljuk a problémát Lagrange feltételes variációs módszerével! (Másképp is tárgyalható, de nem kapsz rá pontot.) Vezessük le a megfelelően választott általános koordinátákra vonatkozó mozgásegyenletet, és a kényszererő nagyságát meghatározó egyenletet! Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a test zérus kezdősebességgel indul a henger legfelső pontjáról! Súrlódás nincs. Hol hagyja el a test a hengerfelületet? (Tanács: használjuk fel az energia megmaradásának tételét is!)
A feladatot kétféleképpen oldjuk meg: először vesszük a hengerkoordinátákat, majd azokra felírjuk a kényszert, másodszor pedig kifejezzük ugyanezt Descartes-koordinátákkal.
Első megoldás
Tekintsük a hengerkoordinátákat, úgy, hogy a henger tengelye legyen y tengely, ekkor az általános koordinátákkal kifejezve a Descartes-koordináták:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= y \\ z &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{68}$$

Ekkor a kinetikus energiához szükséges $\dot{\boldsymbol{r}}^2$:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{y}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{69}$$

Tehát a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L = K - V = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + mgr\sin\varphi \tag{70}$$

Most írjuk fel a kényszerfeltételt:

$$x^2 + z^2 = R^2 = r^2\text{állandó} \tag{71}$$

Írjuk be ennek a 0-ra rendezett alakját a Lagrange-függvénybe, egy Lagrange-féle multiplikátorral:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{y}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + mgr\sin\varphi + \lambda(r^2 - R^2) \tag{72}$$

Most tekintsünk a kényszer első és második deriváltját:

$$2r\dot{r} = 0 \tag{73}$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha r=állandó, most tekintsük a második deriváltat:

$$2\dot{r}^2 + 2r\ddot{r} = 0 \tag{74}$$

Mivel a fenti egyenletből tudjuk, hogy r első deriváltja 0, emiatt látható, hogy a második derivált is 0. Most ezek ismeretében felírhatjuk a mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\varphi} &= mgr\cos\varphi \\ m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 + mg\sin\varphi + 2\lambda r \\ m\ddot{y} &= 0 \end{aligned} \tag{75}$$

A második egyenletben használjuk ki, hogy a második deriváltja r-nek eltűnik, ekkor ennek bal oldala eltűnik. Ugyanennek az egyenletnek a jobb oldalán található egy λ-szorzós tag, ezt nevezzük kényszererőnek. A kényszererő kiszámításához tehát ismernünk kell λ értékét. Ehez most tekintsük a rendszer energiáját:

$$E = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2\right) - mgr\sin\varphi \tag{76}$$

Ez azért jó, mert ebből kifejezhetjük $\dot{\varphi}$-t:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{E + mgr\sin\varphi}{\frac{m}{2}r^2} \tag{77}$$

Most egyszerűsítsük azzal a feladatot, hogy ráülünk arra a koordinátarendszerre amelyben a test y irányban áll. Ez inerciarendszer, ugyanis a harmadik mozgásegyenletből látszik, hogy a test állandó sebességgel halad y irányban, vagy áll. Ekkor λ-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$\lambda = -\frac{2r\frac{E+mgr\sin\varphi}{r^2} + mg\sin\varphi}{2r} \tag{78}$$

A test akkor fog elválni a hengertől, ha a kényszererő 0 lesz, azaz ha $\lambda = 0$, ez akkor fog megtörténni, ha a fenti egyenletben a számláló 0. Ekkor φ_0-ra, azaz arra a szögre, amire elválik a test a következő egyenletet kapjuk:

$$0 = 2rE + 3mgr^2\sin\varphi_0 \tag{79}$$

Ebből a megoldás:

$$\sin\varphi_0 = -\frac{2E}{3mgr} \tag{80}$$

Amiből megkaphatjuk a megfelelő z_0 magasságot, ahol elválik a test:

$$z_0 = -\frac{2E}{3mg} \tag{81}$$

A z_0 érték most azért negatív, mert a z tengely írányát fent úgy vettük fel, hogy lefelé legyen pozitív az értéke. Második megoldás

Most ne térjünk át hengerkoordinátákra, helyette írjuk fel Descartes-koordinátákban a Lagrange-függvényt:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz \tag{82}$$

A kényszer alakja pedig a következő lesz:

$$x^2 + z^2 = R^2 = \text{állandó} \tag{83}$$

Ennek a 0-ra rendezett alakját Lagrange-multiplikátorral hozzáadva a Lagrange-függvényhez:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz + \lambda(R^2 - x^2 - z^2) \tag{84}$$

Most tekintsük a kényszerfeltétel első, és második deeriváltját:

$$2x\dot{x} + 2z\dot{z} = 0 \tag{85}$$

A második derivált:

$$2\dot{x}^2 + 2\ddot{x}x + 2\dot{z}^2 + 2\ddot{z}z = 0 \tag{86}$$

Ahhoz, hogy hasznosítani tudjuk ezeket az egyenleteket írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda x \\ m\ddot{y} &= 0 \\ m\ddot{z} &= mg - 2\lambda z \end{aligned} \tag{87}$$

Most láthatjuk, hogy a kényszererő két tagból áll: x és z irányú komponensekből. Ugyanakkor láthatjuk, hogy a kényszer második deriváltjában csak x, és z második deriváltjától függ. Emiatt ha behelyettesítjük a mozgásegyenleteket, akkor "megszabadulhatunk" a második derviálttól, és λ-ra egy egyenletet kapunk:

$$\dot{x}^2 - 2\frac{\lambda}{m}x^2 + \dot{z}^2 + \left(g - 2\frac{\lambda}{m}z\right)z = 0 \tag{88}$$

Ezt kicsit átalakítva:

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + gz = 2\frac{\lambda}{m}(x^2 + z^2) \tag{89}$$

Az előző megoldáshoz hasonlóan Nézzük meg az energiamegmaradást:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz \tag{90}$$

A mozgásegyenletekből ismét látszik, hogy megtehetjük azt, hogy ráülünk arra a koordinátarendszerre, amelyben a test y irányú sebessége 0. Ekkor kifejezhetjük $\dot{x}^2 + \dot{z}^2$-t az alábbi képpen:

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2}{m}(E + mgz) \tag{91}$$

Ezt behelyettesítve (89)-be:

$$\frac{2E}{m} + 3gz = 2\frac{\lambda}{m}(x^2 + z^2) \tag{92}$$

Nézzük meg a jobb oldali zárójelet! Ez pont a kényszerfeltételben szereplő R^2, ami a mozgás során állandó! Ezt beírva kifejezhető λ:

$$\lambda = \frac{\frac{2E}{m} + 3gz}{2R^2} \tag{93}$$

Az volt a feladat, hogy nézzük meg, hogy mikor válik el a test a hengertől, ez akkor teljesül, ha a kényszererő 0, ez viszont most azt jelenti, hogy a kényszererő abszolútértékének kell 0-nak lennie! Mivel most ennek van x, és z komponense is, ezért az abszolútértéke:

$$|K| = \sqrt{K_x^2 + K_z^2} = 2\lambda\sqrt{x^2 + z^2} = 2\lambda R = \frac{\frac{2E}{m} + 3gz}{R} \tag{94}$$

Ez akkor lesz 0, ha a számláló 0:

$$\frac{2E}{m} + 3gz = 0 \tag{95}$$

Ebből kifejezhető a z_0 magasság értéke, aminél a test elválik:

$$z_0 = -\frac{2E}{3mg} \tag{96}$$

Ennek örülünk, mert az első megodásban is ezt kaptuk.