1. Variációszámítás

Vezessük be a funkcionálok fogalmát, azaz egy olyan operátort, ami a függvények teréből a valós számok halmazára képez:

$$S[f]:\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

A legegyszerűbb ilyen operátor a határozott integrálás, hiszen ez egy függvényhez egy számot, a függvény alatti terület nagyságát rendeli hozzá.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = T_{[a,b]} \in \mathbb{R}$$

A variációszámítás ilyen funkcionálok szélsőértékkeresésével foglalkozik, azaz például milyen függvényre lesz egy adott integrál minimális.

Nézzük először a klasszikus szélsőérték problémáját. Egy $f(x)$ függvény azon pontját keressük, ahol a függvényérték a független változó kis kitéréseire elsőrendben nem változik. Azaz $f(x)$-et sorba-fejtve a lineáris tag eltűnik:

$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta f(x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{1}$$

δx-el nullához tartva a magasabb rendű tagok elhanyagolhatóak, azaz azt kapjuk, hogy amennyiben $f'(x) = 0$, akkor a függvényérték x-nak δx környezetében konstans, azaz a függvényünknek szélsőértéke, vagy inflexiós pontja van.

Térjünk vissza a funkcionálokhoz. Ez esetben az f függvényünket kell megváltoztatnunk, ezt nevezik a függvény δf variációjának. Válasszuk úgy a variációt, hogy a kezdő, és végpontban megegyezzen az eredeti függvénnyel, útközben pedig közel haladjon f-hez. Legyen a funkcionálunk

$$S[y(x)] = \int_a^b f(y'(x), y(x), x)\mathrm{d}x$$

alakú. Ekkor (1)-hez hasonlóan:

$$S[y(x)+\delta y(x)] = S[y(x)] + \delta S[y(x)] =$$
$$= S[y(x)] + \int_a^b \left(\frac{\partial f(y',y,x)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(y',y,x)}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x$$

Továbbra is az analógiát követve: akkor kapunk szélsőértéket, ha $\delta S[y(x)]$ eltűnik.

$$\delta S[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f(y',y,x)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(y',y,x)}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x = 0$$

Az integrandus második tagjában parciálisan integrálunk:

$$\delta S[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y\mathrm{d}x - \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'\delta y\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y\Big|_a^b = 0$$

Mivel a variációt direkt úgy választottuk meg, hogy δy a határokon eltűnjön, ezért:

$$\delta S[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)'\right]\delta y\mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

Az integrandusban levő tagot az egyszerű függvények deriváltjának analógiája alapján vezettük be, ezért funkcionális deriváltnak nevezzük, és δF-fel jelöljük.

Mivel a (2)-es integrál azonosan 0, ezért az integrandusnak is nullát kell adnia, hiszen minden variációra teljesülnie kell. Ebből jutunk az Euler-Lagrange egyenlethez, ami kimondja, hogy a funkcionális deriváltnak el kell tűnnie.

$$\delta F = \frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' = 0 \tag{3}$$

Tehát azt kaptuk, hogy egy integrálnak olyan függvényre van extrémuma, ami teljesíti a (3)-as egyenlőséget. Fontos, hogy ez az egyenlőség nem mondja meg, hogy a kapott függvény minimumhoz, vagy maximumhoz tartozik!

(3) alapján speciális függvénycsaládokat vezethetünk be.

1. $f(y', y, x) = f(y, x)$
   Ekkor a funkcionális derivált második tagja nulla, azaz egy egyszerű egyenlethez jutunk:
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. $f(y', y, x) = f(y', x)$
   Ekkor a funkcionális derivált első tagja tűnik el, azaz:
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y'} = const.$$

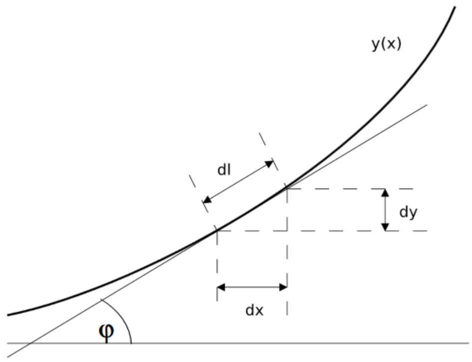
3. $f(y', y, x) = f(y', y)$
   Azaz a függvény nem függ expliciten a függő változótól (ált. időtől). Ekkor f deriváltjára adódik:
   $$[f(y, y')]' = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' \to (3) \to \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''$$
   Az utolsó tag egy teljes derivált, átrendezve, és egyszerűbb alakban adódik, hogy:
   $$\left[\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right]' - f(y, y')' = 0$$
   Azaz amennyiben f nem függ expliciten x-től, egy megmaradó mennyiséget találtunk. Ezt a függvényt hívják Beltrami-függvénynek, a Lagrange-formalizmusban, ahol a függő változó az idő, a Beltrami-megmaradás ekvivalens az energiamegmaradással.
   $$B := \frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = const. \tag{4}$$

2. Feladatok

2.1. Egyszerű feladatok

Legrövidebb úthossz

Tekintsük feladatnak két pont közötti legrövidebb út megkeresését. Úthosszat a következő ábra szerint célszerű definiálni:



Ekkor látható, hogy:

$$\cos\varphi = \frac{dx}{dl} \rightarrow \cos^2\varphi = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2$$

Amiből:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}}dx = \sqrt{1+\tan^2\varphi}\cdot \mathrm{d}x = \sqrt{1+y'^2}\cdot \mathrm{d}x$$

Meg is van a minimalizálandó funkcionálunk. Adott a és b x értékek mellett a görbe hossza:

$$L[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\cdot \mathrm{d}x$$

A extrémum feltétele továbbra is (3) szerint adódik:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)' = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial y'} = const.$$

A deriválás elvégzésével:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = const. \rightarrow y' = const.$$

Azaz azt az eredményt kaptuk, hogy két pont közötti legrövidebb görbe mindig olyan, hogy annak deriváltja egy konstans, azaz a görbe egy egyenes. Ezt is vártuk természetesen.

Legkisebb forgásfelület

Legyen x_1 és x_2 pontban két párhuzamos, x-tengelyre merőlegesen álló y_1 és y_2 sugarú körünk. Ekkor a minimalizálandó felületet az előző feladat segítségével a következő funkcionál adja meg:

$$A[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\mathrm{d}l = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

Használjuk most a Beltrami-függvényt. (Ezt az előző feladatban is megtehettük volna, ugyanarra az eredményre vezet.)

$$B = 2\pi \left(\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} \right) = -\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = const.$$

A fenti differenciálegyenlet szeparálható. A megoldás:

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{B^2} - 1} \rightarrow y = B \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{y-A}{B}\right)$$

ahol A-t, és B-t a kezdeti feltételekhez való illesztésből kaphatjuk meg.

Érdekesség - Fermat-elv

A Fermat-elv szerint a fény két pont között a legrövidebb optikai úthossza rendelkező pályán terjed. Tekintsük az $x - y$ síkban történő fényterjedést, és legyen $n(x)$ a helyfüggő törésmutató. Ekkor a minimalizálandó funkcionálunk:

$$L[y(x)] = \int n(x)\mathrm{d}l = \int n(x)\sqrt{1+y'^2}dx$$

Ekkor az Euler-Lagrange egyenlet szerint:

$$\left(\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)' = 0 \rightarrow n\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = const.$$

Felhasználva, hogy $y' = \tan\varphi$:

$$n\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = n\sin\varphi = const.$$

(Talán) nem meglepő módon visszakaptuk a Snellius-Descartes törvényt.

2.2. Lagrange-multiplikátorok

Ennél a módszernél azt a trükköt használjuk ki, miszerint ha a függvényünkhöz 0-t adunk hozzá, azzal a funkcionált nem befolyásoljuk, de extra mellékfeltételek teljesülését köthetjük ki.

Mielőtt azonban ész nélkül használnánk őket, fontos megjegyezni, hogy mindig található olyan koordinátázás, amivel a feltételek kapásból teljesülnek. Például: egy inga mozgását lehet Descartes-féle koordináta-rendszerben felírni, és a fonal hosszának állandóságát a $\lambda(\sqrt{x^2+y^2}-l)$ multiplikátorral figyelembe venni. Persze sokkal egyszerűbb polárkoordinátákkal dolgozni, ahol a feltétel triviálisan teljesül.

Azaz összefoglalva: legyen φ_k k darab kényszerünk, ezekkel a funkcionál alakja a következő.

$$F_\lambda[...] = \int (f + \lambda_k \varphi_k)\mathrm{d}x = \int f_\lambda \mathrm{d}x \tag{5}$$

Természetesen φ függhet a q_k koordinátáktól (holonóm kényszer). Fontos megjegyezni, hogy ez esetben λ_k-t mint változót vezetjük be, azaz eszerint is variálni kell. (5)-re tehát az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} + \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial f}{\partial q_k'}\right)' = 0$$

$$\frac{\delta F_\lambda}{\delta \lambda_k} = \varphi_k = 0$$

Láthatjuk is, hogy a φ_k mellékfeltételeink rögtön teljesülnek is.

Láncgörbe

Legyen egy két végén felfüggesztett L hosszú, ϱ vonalsűrűségű kötelünk. Ennek az alakjára vagyunk kíváncsiak. A minimalizálandó funkcionál a kötélre ható potenciális energia (energiaminimumra való törekvés). (Emlékezve, hogy $V = mgy$, valamint, hogy $\varrho \mathrm{d}l = \mathrm{d}m$.)

$$V[y(x)] = \int gy\varrho \mathrm{d}l = g\varrho \int y\sqrt{(1+y'^2)}\mathrm{d}x$$

Még meg kell kötnünk a kötél hosszát is! Ezt vegyük figyelembe multiplikátor segítségével.

$$V_\lambda[y(x)] = g\varrho \int y\sqrt{(1+y'^2)}\mathrm{d}x + \lambda \int \sqrt{(1+y'^2)}\mathrm{d}x$$

Látható, hogy a probléma kísértetiesen hasonlít a minimális forgásfelület problémájához. Egyszerűség kedvéért vezessük be $\tilde{y} = y + \frac{\lambda}{g\varrho}$ változót, ekkor $\tilde{y}' = y'$ továbbra is. Az integrandus tehát:

$$f_\lambda = (g\varrho y + \lambda)\sqrt{(1+y'^2)} = g\varrho\tilde{y}\sqrt{(1+\tilde{y}'^2)}$$

Ez már ténylegesen a minimális forgásfelület problémája, a megoldás a korábbiak szerint tehát:

$$\tilde{y} = y + \frac{\lambda}{g\varrho} = C\mathrm{ch}\left(\frac{x-A}{C}\right)$$

Mozgás előre megkötött felületen (görbén)

Legyen a feladat a következő: van egy m tömegű testünk, ami egydimenziós mozgást végez oly módon, hogy pályája meg van kötve egy $f(x)$ görbére. Kérdés, hogy hogyan tudnánk a Lagrange-formalizmus segítségével megadni a kényszererőt.

Írjuk fel a probléma Lagrange-függvényét, a kényszerfeltételt vegyük figyelembe Lagrange-multiplikátorral.

$$\mathcal{L} = K - V + \lambda\varphi = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - f(x))$$

Ebből az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \rightarrow -\lambda f'(x) = m\ddot{x} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \rightarrow -mg + \lambda = m\ddot{y} \tag{7}$$

A kényszert úgy írhatjuk fel, mint a görbe gradiensének és λ szorzatát. Azaz $F_k = \lambda\nabla\varphi$. Röviden nézzük meg, hogy ez miért van (részletesebben lesz Elméleti mechanikán). Egy tömegpont külső szabad erők, és kényszererők hatása alatt áll, ekkor a testre ható erők:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{sz} + \mathbf{F}_k$$

Ezekből a szabad erőket ismerjük, azonban a kényszererőkről csak annyit tudunk, hogy nagysága és iránya akkora, hogy a görbén tartsa a testet. A súrlódás elhanyagolásával tudjuk, hogy ez a kényszer merőleges az adott pontban lehetséges kis $\delta\mathbf{r}$ elmozdulás irányára. Ez időfüggetlen kényszer esetén megegyezik a görbe deriváltjával. Tehát:

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{r} = \mathbf{F}_{sz}\delta\mathbf{r}$$

Newton II. törvényét felhasználva, és átrendezve kapjuk D'Alambert elvet egy tömegpontra.

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}_{sz})\delta\mathbf{r} = 0$$

A fenti kijelentésekből kaptuk tehát a számunkra most érdekes kijelentést, hogy a kényszererő időfüggetlen kényszerek esetén párhuzamos a görbe normálisával, ezért felírhatjuk, hogy:

$$\mathbf{F}_k = \lambda\nabla\varphi$$

Mivel $\varphi = y - f(x)$, a kényszererő könnyen meghatározható:

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} -\lambda f'(x) \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Már csak λ nagysága a kérdés. Ezt meghatározhatjuk ebben az általános esetben is, bár a módszer nem triviális, ugyanezeket a lépéseket kell alkalmazni konkrét számolás esetén is.

A trükk az, hogy az $y = f(x)$ feltételt kétszer deriváljuk az idő szerint. Ekkor a közvetett függvények deriválási szabályai szerint (f': x szerinti derivált, $\dot{f}$: idő szerinti derivált):

$$\ddot{y} = f''(x)\dot{x}^2 + f'(x)\ddot{x} \tag{8}$$

(6)-ból és (7)-ből kifejezve $\ddot{x}$-ot és $\ddot{y}$-ot, és (8)-ba behelyettesítve azokat:

$$-g + \frac{\lambda}{m} = f''(x)\dot{x}^2 - f'(x)\frac{\lambda}{m}$$

Ezt átrendezve λ-t kifejezhetjük:

$$\lambda = \frac{mf''(x)\dot{x}^2 + mg}{1 + f'(x)^2} \tag{9}$$

Érdekességként nézzünk meg egy fokkal konkrétabb példát. Egyszerűsítsünk annyiban, hogy vessük el a külső erőket, azaz ne legyen gravitáció. Ekkor (9) egyszerűen:

$$\lambda = \frac{mf''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \tag{10}$$

Vegyük észre, hogy a kényszer első deriváltjának felhasználásával kifejezhetjük $\dot{y}$-ot $\dot{x}$ függvényében.

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x}$$

Ezzel a sebesség:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1 + f'(x)^2) \to \dot{x}^2 = \frac{v^2}{1 + f'(x)^2}$$

Ezt visszahelyettesítve (10)-be:

$$\lambda = \frac{mf''(x)v^2}{(1 + f'(x)^2)^2}$$

A kényszererő nagysága az $\mathbf{F}_k$ vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{F}_k| = \lambda\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

amibe a kiszámolt λ-t visszahelyettesítve:

$$|\mathbf{F}_k| = mv^2 \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

Felismerhetjük, hogy a tört nem más, mint a görbületi sugár reciproka, azaz ehhez a jól ismert képlethez jutunk:

$$|\mathbf{F}_k| = \frac{mv^2}{R_g}$$

Tehát azt az eredményt kaptuk, hogy egy tetszőleges pályán a kényszererő nagysága mindig olyan, mintha az adott pontba tehető érintőkörön haladna a testünk. Ez egy nagyon szép, és könnyen érthető eredmény.

Természetesen gravitációs erőtér jelenlétében már nem ennyire egyszerű a feladat, de ugyanezeket a lépéseket kell elkövetni.

3. Fizikai vonatkozások

Miért is ilyen fontos a variációszámítás a fizikában? A fizikai törvények egyik legalapvetőbb motívuma az úgynevezett legkisebb hatás elve. Ami azt jelenti, hogy egy test azon pályán fog haladni, amire a hatásintegrálja a minimális. Rögtön látható, hogy ez persze variációs probléma. Fizikai problémák esetén a funkcionált $\mathcal{S}[...]$-sel jelöljük és hatásnak nevezzük, az integrandusban levő függvényt pedig $\mathcal{L}$ Lagrange függvénynek.

Egyszerű mechanikai rendszereknél $\mathcal{L} = K - V$ a kinetikus és a potenciális energia különbsége. A független változó általában az idő, ezért az 1. fejezetben leírtak szerint, ha $\mathcal{L}$ 3.

típusú, azaz nem függ a független változótól, akkor a Beltrami-függvény ekvivalens lesz az energiával, ami a folyamat során állandó marad.

Az Euler-Lagrange egyenletek továbbra is érvényben maradnak, csak újabb jelöléseket vezetünk be. Legyenek általános koordináták: q_k, általános sebességek: $\dot{q}_k$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = p_k \rightarrow \text{ általánosított, kanonikus vagy konjugált impulzusok}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k \rightarrow \text{ általánosított erők}$$

Az Euler-Lagrange függvények egyszerű alakja tehát N szabadsági fokú rendszer esetén:

$$\dot{p}_k = Q_k \ \forall k \in 1, 2...N$$

3.1. Nagyon egyszerű fizikai problémák

A következőkben néhány alapvető mechanikai rendszer már ismert mozgásegyenletét írjuk fel a lagrange-i módszer segíségével.

Inga

Egyik legegyszerűbb és legszebb példája az általános koordinátázás előnyének. A feladatot descartes-i koordinátákkal nagyon hosszú, és csúnya lenne leírni, ráadásul az inga hosszát lagrange-multiplikátorral kéne figyelembe venni. Ehelyett (r, φ) koordinátákat használva a probléma nagyban leegyszerűsödik.

$$\mathcal{L} = K(\dot{\varphi}) - V(\varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

A mozgásegyenleteket a φ-re vonatkozó Euler-Lagrange egyenletek segítségével írhatjuk fel:

$$l^2 \ddot{\varphi} = -gl \sin \varphi$$

Amennyiben az inga kitérései kicsik, harmonikus közelítést alkalmazhatunk, azaz $\sin \varphi \approx \varphi$.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$$

Ezt akár meg is oldhatjuk, a megoldás természetesen szinusz-koszinuszos lesz.

Több tömegpont - csúszós inga

Legyen m_1 és m_2 tömegű tömegpontunk, amik egy l hosszúságú inga két végpontjában vannak. A felfüggesztésnél legyen m_1 mozgatható x irányban. Írjuk fel a Lagrange-egyenletét.

Legyen az 1-es számú testünk az x irányban mozgatható m_1 tömegű test. Ekkor ennek célszerű bevezetni az x koordinátát, ami egy az x tengelyen kijelölt ponttól mért távolságát jelenti. A másik, 2-es számú testünk legyen az inga végén. Neki célszerűen az előző feladat szerint polárkoordinátákat adunk.

Annyi koordinátára van szükségünk, ahány szabadsági fokú a rendszer. N testnek $3N$ szabadsági foka lehet, tehát esetünkben 6. De az 1-es testünk csak x tengely mentén mozoghat, helyét minden időpillanatban egyértelműen megadhatjuk egyetlen koordinátával, tehát itt "elvesztünk" 2 szabadsági fokot (azaz 1 nem mozoghat y vagy z irányba). A 2. testünk már mozoghat az $x - y$ síkban, de a z-ben nem, azaz ezzel elvesztünk egy szabadsági fokot, valamint a kényszerfeltétel megkötésével elvesztünk még egyet. Tehát összesen $6 - 4 = 2$ szabadsági fokú a rendszerünk, azaz két megfelelően választott koordinátát kell keresnünk. Ezek egyértelműen x és φ.

Az 1. test koordinátái:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ valamint a sebesség: } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A 2. test koordinátái:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} \text{ valamint a sebesség: } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

A fentiek felhasználásával a Lagrange-függvényt egyszerűen megkonstruálhatjuk.

$$\mathcal{L} = K_1 + K_2 - V_2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 gl\cos\varphi$$

Innen az Euler-Lagrange egyenletek némi számolással felírhatók. Fontos azonban észrevenni, hogy x nem jelenik meg expliciten az egyenletben, ezért $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$, azaz p_x impulzus időben állandó.

4. Megmaradási tételek

Amennyiben a Lagrange-függvény az egyik koordinátát expliciten nem tartalmazza, akkor ahhoz egy megmaradási tétel tartozik. Általánosabban kimondva ez a Noether-tétel, ami kimondja, hogy egy rendszer szimmetriájához (ha van neki) mindig tartozik valamilyen megmaradó fizikai mennyiség.

Ilyet már láttunk, hisz a Beltrami függvényt pontosan akkor tudtuk felírni, ha a $\mathcal{L}$ nem függött a t-től, és ehhez az energiamegmaradást csatoltuk. Azaz:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial E}{\partial t}$$

Azaz, ha B konstans (nem függ t-től), akkor E megmarad. Ez elméletileg azt jelenti, hogy a rendszer időben eltolható, időbeli szimmetriája van, aminek következménye, hogy az Energiának meg kell maradnia.

Azokat a koordinátákat, amik nem jelennek meg a Lagrange-ban, ciklikus koordinátáknak nevezzük. Tegyük fel, hogy egy rendszert q_k koordinátákkal tudjuk leírni. Ekkor az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}$$

Ha $\mathcal{L}$ nem függ q_i-től, akkor i-re az egyenlet módosul:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = const.$$

Azaz a q_i-hez tartozó konjugált impulzus megmarad. Ez például lehet maga az impulzus, vagy impulzusmomentum...

Példa ciklikus koordinátákra: mozgás hatványpotenciálban

Legyen adott egy centrális $V(r)$ potenciálunk. Kérdés a kialakuló körpályák sugara, és azok stabilitása.

$$V(r) = -\frac{\alpha m}{ar^a}$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha m}{ar^a}$$

Ezt bontsuk szét a következőképpen:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\alpha m}{ar^a}\right)$$

Vegyük észre, hogy $\mathcal{L}$ független φ-től, ezért a hozzá tartozó konjugált impulzus, az impulzusmomentum (N) megmarad (forgásszimmetria). Emlékezve, hogy $N = mr^2\dot{\varphi} = const.$:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{N^2}{2mr^2} + \frac{\alpha m}{ar^a}\right)$$

Észrevehetjük, hogy a φ-ket teljesen elimináltuk az egyenletből, és csak $r, \dot{r}$ változójú tagok maradtak. A kétdimenziós mozgást egy egydimenziós potenciálmozgásra redukáltuk. A második tag csak r-től függ, és olyan mintha egy közös egydimenziós potenciált alakítanának ki, amiben a test majd mozog. Ilyen esetben a zárójelben levő kifejezést együttesen effektív potenciálnak nevezzük, jele V_{eff}.

Az effektív potenciál tetszőleges centrális potenciálra mindig:

$$V_{eff} = \frac{N^2}{2mr^2} + V(r)$$

Különösebb számolás nélkül, fizikai jártasságból megmondhatjuk, hogy az Euler-Lagrange egyenlet a következőt fogja adni:

$$m\ddot{r} = -V'_{eff}(r)$$

A lehetségesen kialakuló pályákra (ezek sugara legyen r^*) teljesülni kell, hogy ott $\ddot{r} = 0$, azaz:

$$V'_{eff}(r^*) = -\frac{N^2}{mr^{*3}} + \frac{\alpha m}{r^{*(a+1)}} = -m\ddot{r} = 0$$

Ebből némi algebrával:

$$r^* = \left(\frac{\alpha m^2}{N^2}\right)^{\frac{1}{a-2}}$$

Ahhoz, hogy ezen pályák stabilitását vizsgáljuk, ahhoz $V''_{eff}(r^*)$ értéke szükséges. Ha a potenciál második deriváltja pozitív, azaz "mosolygós", akkor a mozgó test kis kitérésre visszatér az eredeti pályájára, azonban ha negatív, akkor nem lehet stabil. Tehát stabil pályákra:

$$V''_{eff}(r^*) = -(a+1)\frac{\alpha m}{r^{*(a+2)}} + \frac{3N^2}{mr^{*4}} > 0$$

Az egyenletet átrendezve:

$$\frac{3N^2}{m}r^{*(a-2)} > (a+1)\alpha m$$

A kiszámolt r^*-ot behelyettesítve:

$$\frac{3N^2}{m}\frac{\alpha m^2}{N^2} > (a+1)\alpha m \rightarrow 2 > a$$

Azt kaptuk tehát, hogy amennyiben $a < 2$, léteznek stabil körpályák. Milyen szerencsénk van, hogy a gravitációs potenciál pont ilyen!

4.1. Kitekintés

A variációszámítás az elméleti fizika alapja, szinte minden fizikai ág épít rá. Mivel a variációs elvek nagyon konzekvensek, ezért ilyen elvekből kapott egyenletek (ha nem számoltuk el) mindig ellentmondásmentesek.

Kvantumfizikában egyet se lehet lépni a Hamilton-operátor nélkül. A Hamilton-függvény klasszikus fizikában a Lagrange-függvény Legendre-transzformáltja, ami igazából annyit jelent, hogy $(q_k, \dot{q}_k)$ helyett áttérünk (q_k, p_k) változókra. Ekkor $\mathcal{H} = K + V$ tulajdonképpen az energiát adja meg (definiáló egyenlősége megegyezik a Beltramiéval). Kvantummechanikában egy rendszert leíró Hamilton-függvényt operátorokkal írják fel. Ez egyszerűen annyit jelent, hogy minden változó kap egy kalapot:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Különösebb magyarázás nélkül fogadjuk el, hogy $\hat{x} = x\cdot$, valamint $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, azaz $\hat{x}$ operátor egyszerűen egy x-szel való szorzást jelöl, míg $\hat{p}$ operátor egy deriválást is takar magában a konstansokon kívül.

Mivel a Hamilton-függvényünk már egy operátor, ami leírja a rendszerünket, jó ötlet lenne ennek megkeresni a sajátértékeit. Jelöljük a sajátvektort így: $|\Psi\rangle$, és a sajátértéket E-vel. Ekkor:

$$\hat{\mathcal{H}}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

nyilvánvalóan egy sajátérték-egyenlet. Ezt kiírva jutunk az időfüggetlen Schrödinger egyenlethez:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

Emellett fontos szerepet játszik a különböző térelméletekben (pl. elektrodinamika). Itt az úgynevezett Lagrange-sűrűségfüggvényt használjuk, amiben a változók a különböző tereket fogják jelenteni. A hatás itt egy kettős integrálként áll elő, hisz a $\Psi_\alpha(x,t)$ terek is folytonosan koordinátázottak (formálisan ez azt akarja jelenteni, hogy a szabadsági fokokat folytonosan indexeljük x-el).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Lambda(\Psi_\alpha(x,t), \partial_x\Psi_\alpha(x,t), \partial_t\Psi_\alpha(x,t), x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

Ennek variációjával egy kicsit más alakú Euler-Lagrange egyenletekhez jutunk:

$$\frac{\delta S}{\delta\Psi_\alpha} = \frac{\partial\Lambda}{\partial\Psi_\alpha} - \partial_x\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_x\Psi_\alpha)} - \partial_t\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_t\Psi_\alpha)} = 0$$

Utolsóként még megemlíthető a relativitáselmélet. Itt sokban nem tér el a formalizmus a klasszikus mechanikaitól. Speciális relativitáselméletben szinte teljesen ugyanaz minden, általános relativitáselméletben pedig a parciális deriváltakat ki kell cserélni kovariáns deriváltakra. Egyszerű példán nézzünk meg egy szép eredményt.

Legyen adott egy szabad részecskénk, aminek a Lagrange-függvényét valamiért a következő alakban fogalmazzuk meg:

$$\mathcal{L} = -mc^2$$

Ez látványosan nem függ semmitől, ezért az Euler-Lagrange egyenletek egyszerűen azt adják, hogy $0 = 0$, ami nem túl informatív. Próbáljuk meg felírni a Beltrami függvényt, ami itt az energiával lesz egyenlő, ami megmarad, hisz nincs időfüggés.

$$B = E = p\dot{q} - \mathcal{L} = -\mathcal{L} = const. \rightarrow E = mc^2$$

Most, hogy már ez is megvan, remélhetőleg mindent értünk a világról. Köszönöm, hogy kitartóan idáig elolvastál :)