1. példafeladat: Harmonikus párok

Egy általános komplex függvény az alábbi hozzárendeléssel van megadva:

$$f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \tag{1}$$

Itt Φ-t a komplex függvény valós, míg Ψ-t a képzetes részének tekintjük. Fontos megjegyezni, hogy mindkettő (Φ, Ψ) függvény valós. (1)-ben f argumentumába z-t írtunk, ahol z egy komplex szám, azaz átírható $z = x + iy$ alakba. A jobb oldalon elhelyezkedő két valós függvény argumentuma ezen átírás alapján lesz x és y.

A Cauchy-Riemann-féle egyenletek szerint:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3}$$

Ezekből triviálisan levezethetőek a Laplace egyenletek:

$$\Delta\Phi = 0 \text{ valamint } \Delta\Psi = 0 \tag{4}$$

Két függvény egymás harmonikus párja, ha teljesítik a Laplace egyenleteket.

1.1. Vizsgafeladat

A feladat, hogy egy adott Φ függvényhez keressük meg a Ψ harmonikus párját, és adjuk meg (1) alapján az $f(z)$ komplex függvényt.

$$\Phi(x,y) = e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2)$$

Első feladatunk leellenőrizni, hogy ez teljesíti-e a (4)-es Laplace egyenletet. Vegyük tehát Φ második deriváltjait!

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2ye^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) + 2xe^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4y^2e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) - 8xye^{-2xy}\sin(y^2 - x^2) - 4x^2e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2)\\ + 2e^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

A második változó szerinti parciális deriváltak pedig:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2xe^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) - 2ye^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 4x^2e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) + 8xye^{-2xy}\sin(y^2 - x^2) - 4y^2e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2)\\ - 2e^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)\end{aligned}$$

Behelyettesítve (4)-be:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

Tehát az első feltételünk teljesül, Φ kielégíti a Laplace-egyenletét.

Következő feladatunk, hogy megkeressük ennek a Φ függvények a harmonikus Ψ párját. Ezt a(2). és (3). egyenlet integrálásával tudjuk előállítani. Ebből jutunk a következő egyenletekhez:

$$\Psi = \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} \mathrm{d}y = -\int \frac{\partial\Phi}{\partial y} \mathrm{d}x \tag{5}$$

Mindkét integrandust ismerjük, tehát a két integrál közül tetszés szerint választhatunk. Nézzük például az elsőt.

$$\Psi = \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} \mathrm{d}y = \int \left(-2ye^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) + 2xe^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)\right) \mathrm{d}y$$

Ezt az integrált egyszerűen el tudjuk végezni egy kis vizsgálattal. Érdemes úgy gondolkodni, hogy: "mit deriválhattunk, hogy ezt kaptuk?". Rögtön látható, hogy az első tagban megjelenő $2y$-os szorzó csakis a szinusz-deriváltjából jöhetett, míg a második tagban levő $2x$ az e^{-2xy} deriváltjából eshetett csak ki. Tehát ha egy e-ados és egy trigonometrikus függvény szorzatát deriválnánk, valami nagyon hasonló eredményhez jutunk a parciális deriválás szerint. Egy kis gondolkodással rögtön látszik, hogy a keresett függvényünk a következő alakot ölti:

$$\Psi = -e^{-2xy} sin(y^2 - x^2) + f(x)$$

Fontos észrevenni, hogy mivel csak y szerint integráltunk, a tetszőleges konstans természetesen lehet x-függő, hisz az az y szerinti parciális deriválásra állandó.

Innentől kezdve már egyszerű a dolgunk, be kell helyettesítenünk a (2)-es vagy (3)-es Cauchy-Riemann egyenletbe attól függően, hogy a konstans f függvénytagunk x vagy y függő. Mivel nekünk $f(x)$-ünk van, ezért a (3). egyenletet használjuk.

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -2ye^{-2xy}\sin(y^2 - x^2) - 2xe^{-2xy} cos(y^2 - x^2) + f'(x)$$

Ennek definíció szerint egyenlőnek kell lennie $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$-nal. Ez teljesül is, ha $f'(x) = 0$. Azaz $f(x)$ csak egy tetszőleges konstans lehet, tehát nyugodtan eltüntethetjük. A kapott eredmény tehát:

$$\Psi = -e^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a probléma magas egyenletbeli szimmetriái miatt természetesen a két harmonikus pár nagyon sok esetben sok hasonlóságot fog mutatni. A Cauchy-Riemann egyenletek integrálásakor célszerű észben tartani, hogy a keresendő függvény alakja valószínűleg sokban fog hasonlítani az eredetileg megadott függvényre.

$$f(z) = e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2) - ie^{-2xy} sin(y^2 - x^2)$$

Már csak az a kérdés, hogy mely f komplex függvényhez tartozik ez az alak.

Írjuk át a szinuszt és koszinuszt exponenciális alakba.

$$f(z) = e^{-2xy}\frac{e^{i(y^2-x^2)} + e^{-i(y^2-x^2)}}{2} - ie^{-2xy}\frac{e^{i(y^2-x^2)} - e^{-i(y^2-x^2)}}{2i}$$

Rögtön láthatjuk is, hogy szerencsére i kiesik, ezért egyszerűen kivonhatjuk egymásból a két tagot.

$$f(z) = e^{-2xy}e^{-i(y^2-x^2)} = e^{i(x^2+ixy-y^2)} = e^{i(x+iy)^2} = e^{iz^2}$$

Tehát megvan a megoldásunk, a keresett egyszerű alakú komplex függvényünk az e^{iz^2} volt.

2. példafeladat: Reziduum-tétel

A reziduum-tétel alkalmazásakor olyan függvényeket akarunk integrálni, amiknek szingularitása van, azaz olyan pontja a komplex síkon, ahol a függvény értéke elszáll (∞). Ezen szingularitások ismeretében az integrálokat egyszerűen elvégezhetjük. Tegyük fel, hogy egy $f(z)$ függvényünknek szinguláris pontja van a-ban. Ekkor a szingularitás körül kör-integrálva megkapjuk az integrál értékét.

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res} f(a) \text{ ahol } \mathrm{Res} f(a) = c_{-1} \tag{6}$$

A függvény reziduuma definíció szerint a negatív kitevőkre elfojtatott Taylorsor, azaz a Maclaurin-sor (-1). tagjának együtthatója, azaz c_{-1}.

A tétel egyszerűen általánosítható N darab szingularitást tartalmazó függvényekre, ez a Cauchy-féle reziduum tétel.

$$\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res} f(a_k) \tag{7}$$

Mielőtt megnéznénk egy egyszerű, majd egy összetettebb példát, megkeressük egy speciális alakú függvénycsalád reziduumát, amit sokszor kihasználhatunk.

$$\text{Legyen: } f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \text{ alakú} \tag{8}$$

Tegyük fel, hogy $h(z_k) = 0$, azaz itt szingularitása van a fent definiált függvénynek ($g(z_k) \neq 0$). A számlálót és nevezőt is sorba-fejtve z_k körül, és a vezető rendet nézve a következő egyenlethez jutunk:

$$f(z) \approx \frac{g(z_k)}{h'(z_k)}\frac{1}{z - z_k} \tag{9}$$

A megjelenő tag pontosan a Maclaurin sor (-1). tagja, tehát a reziduum pont az első törtkifejezés.

2.1. Egyszerű példa

Az első példát megmutatjuk valós és komplex integrálás esetében is, természetesen mindkettő ugyanarra az eredményre vezet.

$$I_R(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

Elsőre nézzük a valós utat! Válasszunk új változót, ez legyen $y = \frac{x}{a}$. Ekkor $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}y$. Az integrál határai mivel végtelenek, ezért azok nem változnak. Kiemelve $\frac{1}{a}$-t:

$$I_R(a) = \frac{1}{a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{1}{a} [\arctan y]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}$$

Láthatjuk, hogy az eredmény ez esetben viszonylag egyszerűen kijött egy ügyes változócserével, ez itt speciális eset volt. Az integrálokat általában nem lehet ilyen módszerrel elvégezni, és kénytelenek vagyunk tisztán komplexben számolni.

Nézzük most meg a komplex utat.

$$I_C(a) = \int_G \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2}$$

A nehézséget az okozza, hogy míg a valós integrálokban egyszerű dolgunk van, hisz csak egy egydimenziós egyenes mentén tudunk integrálni, komplexben egy egész sík áll rendelkezésünkre. Mivel a reziduumtétel csak körintegrálokra használható, ezért az integrált úgy kell elvégeznünk, hogy az eddig valós tengely menti integrált "bezárjuk" azaz egy $R \to \infty$ sugarú félkört húzunk rá. Az integrál járuléka egyre kisebb lesz, ebben a határesetben, végtelenben vissza kell kapnunk az eredeti integrált, azaz az ottani járuléknak tartania kell 0-hoz. Ennek rövid bizonyítását egy sorban elintézhetjük. A körvonalon z értéke nagy, hisz $R \to \infty$. Ekkor $\frac{\mathrm{d}z}{z^2+a^2} \to \frac{1}{R^2}\mathrm{d}R \to 0$.

Az $f(z)$ függvénynek szingularitása van az $z_k = \pm ia$ pontokban. Ha a félkörünket fölfelé zárjuk be (legyen ez a görbe G), akkor a bezárt terület tartalmazni fogja az $z = ia$ szingularitást, azaz (6) alapján:

$$I_C(a) = \lim_{R\to\infty} \oint\limits_G \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + a^2} = 2\pi i \mathrm{Res} f(z = ia)$$

Kihasználva (9)-et megkapjuk a reziduum értékét.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{g(z)}{h(z)} \to \mathrm{Res} f(z = ia) = \frac{1}{2ia}$$

Visszahelyettesítve megkapjuk az integrál értékét, és örülhetünk, mert ugyanarra az eredményre jutottunk, mint valósban.

$$I_C(a) = 2\pi i \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a} \equiv I_R(a)$$

2.2. Összetettebb feladat (Vizsgafeladat)

A következő integrált nem nagyon lehet egyszerűen valósban elvégezni, viszont látni fogjuk, hogy komplexben viszonylag egyszerűen megoldható a probléma (t valós paraméter).

$$I_R(a,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+a^2}\mathrm{d}x \rightarrow I_C(a,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$

Adjunk hozzá ügyesen 0-át az egyenletünkhöz. Használjuk ki az Euler összefüggést, és azt, hogy egy páratlan függvény integrálja szimmetrikus intervallumon eltűnik.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z + i\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tz)}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$

Ez továbbra is egyenlő az eredetileg kitűzött integrálunkkal, hisz a szinuszt valós mentén integrálva 0-t fogunk kapni.

Keressük meg a pólusokat: $z_k = \pm ia$. Most már csak azt kell megnéznünk, hogy t értékétől függően hogyan kell az integrált körintegrállá alakítanunk. Első esetben tegyük fel, hogy $t > 0$. Ekkor:

$$e^{itz} = e^{it(x+iy)} = e^{itx}e^{-ty}$$

A komplex exponenciális nem sokat zavar minket, hisz annak abszolút értéke mindig 1, szóval az nem fog divergálni. A valós exponenciális viszont y értékétől függően vagy 0-hoz, vagy ∞-hez tart. Úgy kell megválasztanunk y-t, hogy ne divergáljon a függvény a végtelenben, hanem szépen csengjen le, azaz ez esetben az $y > 0$ választás a szükséges. Ez azt jelenti, hogy $t > 0$ esetén a félkört felfelé zárjuk be. Hasonlóan belátható, hogy $t < 0$ esetén az $y < 0$ lesz a sikeres választás, azaz akkor lefelé kell bezárnunk a kört.

Az integrálunk tehát a két esetben:

$$I_C(a,t>0) = \oint\limits_{y>0} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res} f(z=ia)$$

$$I_C(a,t<0) = -\oint\limits_{y<0} \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res} f(z=-ia)$$

A (9)-es egyenletet ismét segítségül hívva kiszámoljuk a reziduumokat $\left(f = \frac{e^{itz}}{z^2+a^2}\right)$.

$$\mathrm{Res} f(z=ia) = \frac{e^{-ta}}{2ia}$$

$$\mathrm{Res} f(z=-ia) = -\frac{e^{ta}}{2ia}$$

Az integrálokat elvégezve:

$$I_C(a,t>0) = \frac{\pi}{a}e^{-ta} \text{ valamint } I_C(a,t<0) = \frac{\pi}{a}e^{ta}$$

Azaz a teljes $t \in \mathbb{R}$-re a megoldás:

$$I_C(a,t) = \frac{\pi}{a}e^{|t|a}$$