Matematikai módszerek a fizikában

Előadó: Dávid Gyula

Ajánlott irodalom:

- Az alkalmazott matematika elemei (Zeldovics)
- Ismerkedés a felsőbb mat.-val és fizikai alkalmazásaival
- Elm. fiz. példatár 1
- Elm. fiz. feladatok
- Mátrixszámítás, Többvált. fv.-ek analízise (Bolyai-sorozat)
- Vektoranalízis, Többvált. fv.-ek és differenciálásuk } „Fazekas-sorozat"
  - -"- integrálása
  - (Diff. egyenletek
  - Parc. -"-)

↓
nincs gyakorlat → otthon kell gyakorolni !!!

Vizsgazh.

- dec. 19-ei héten lesz
- minden feladattípusból el kell tudni legalább kezdeni a példát (hozzá kell tudni szólni)

1. óra

Ismétlés

1) Vektorok:

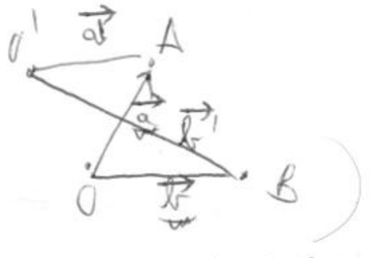
a)

- geometriai tér leírása
- fiz. mennyiségek

↓

. ha rögzítem az origót: megfeleltetés a vektor és a tér pontjai között

↓ ehhez rendelek vektorokat (helyvektorok)



. fiz. mennyiségnél nem kell origó

= de mindkettő ua.-kkal a műv.-kel írhatóak le

b) $\oplus : \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \alpha + \beta \equiv \gamma \end{pmatrix}$ számok összeadása

$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$ vektorok összeadása

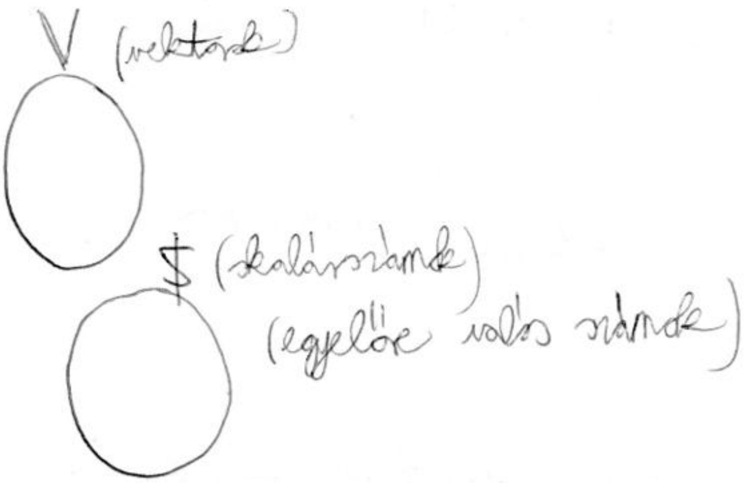
$\vec a + \vec b = \vec c$

↓

zártság:

- az eredmény $\vec a + \vec b = \vec c$ is vektor lesz
- kommutatív: $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$
- asszociativitás: $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$
- $\exists\, \vec 0\ \forall \vec a \quad \vec a + \vec 0 = \vec a$ (semleges/neutrális elem)
- $\forall \vec a\ \exists -\vec a \quad \vec a + (-\vec a) = \vec 0$ (inverz elem)

= kommutatív csoport (alg. str.: halmaz + művelet)



$S \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\alpha \in S \quad \vec{a} \in \mathbb{V}$

$\alpha \vec{a} = \vec{b} \in \mathbb{V}$

<u>disztributivitás</u> (elosztás)

- $\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{skalárok összeadása}} \vec{a} = (\alpha\vec{a}) \underbrace{+}_{\text{vektorok összeadása}} (\beta\vec{a})$
- $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = (\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{b})$
- $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

($1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ → külön ki kell kötni ezt a szabályt)

Ugyanezt a függvényeken is lehetne alkalmazni:

$(f+g)=h$

$h(x)=f(x)+g(x)$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)$

= homomorfizmus: hasonló struktúrájuk van

izomorfizmus: azonos -||-

↳ most pl. a fv-ek és a vektorok homomorfok

- újabb hasonló struktúra:

$$\begin{pmatrix}5\\7\\-2\\0,1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-2\\5,1\\10\end{pmatrix}$$ komponensenként adjuk össze

$$3\cdot\begin{pmatrix}5\\7\\-2\\0,1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\21\\-6\\0,3\\9\end{pmatrix}$$

a_k $\qquad$ $(a+b)_k = a_k + b_k$

$k \in \{1,2,3,4,5\}$ $\qquad$ $(\alpha \cdot a)_k = \alpha \cdot a_k$

↑ oszlop és szám szorzása $\qquad$ ↖ szám és szám szorzása

- ha ∞ komponens lenne ⇒ sorozat $a_1 = \dots$ $a_2 = \dots$ ↑ ezek a szabályok sorozatokra is érvényesek

↓

= egy absztrakt halmazt is lehet definiálni absztrakt műveletekkel, de maradnak a szabályok

↳ <u>lineáris tér</u> (<u>vektortér</u>)

(→ ilyenkor nem tekintjük pl. a skaláris szorzást, szöget, ...) mert azokat nem lehetne átvinni a többi struktúrába)

$|a\rangle$ absztrakt ket vektor $|a\rangle \in \mathbb{V}$

$\langle x\rangle$ várható érték

$\langle b|a\rangle$ bracket (zárójel)

skaláris szorzat jelölése

$\langle b|$ $|a\rangle$ ket

bra

absztrakt vektorok

} kvantummechanikából ered az elnevezés

$\Downarrow$

a számok: +, ·-al

a geom. vektorok: +-al, skalár szorzással

⋮

} lineáris terek absztrak

2) Mi absztrakt vektorokkal fogunk foglalkozni!!

a) Lineárkombináció:

$\mathbb{V}\ni \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \dots$

$\mathbb{S}\ni \alpha, \beta, \gamma \dots$

} $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\dots$ lineárkombináció

— || —

$\mathbb{V}\ni \vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \vec{a}^{(3)}$

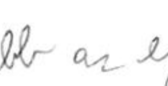
$\mathbb{S}\ni \alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$

} $\alpha_1\vec{a}^{(1)}+\alpha_2\vec{a}^{(2)}+\ \alpha_n\vec{a}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\vec{a}^{(k)}$

b) Lineáris összefüggőség

$\exists$?-e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ (legalább az egyik nem 0) és

melyre $\boxed{\sum \alpha_k \vec{a}^{(k)}=\vec{0}}$ → seml. elem



Ekkor $\vec{a}_k$-k: lineárisan összefüggőek.

Ha nincsenek ilyen α_k-k: $\vec{a}_k$-k lineárisan függetlenek.

Hányat tudunk ilyen vektorból ~~összeadni~~ lineárkombinálni úgy, hogy ne legyen 0 vektor?

↳ Ez a szám a dimenziószám: a lin.-an független elemek max. száma

- Egy vektortérnek a dimenziója adott

pl. $\begin{pmatrix}5\\7\\-2\\0,1\\3\end{pmatrix}$ (5 komp. vektoroknál)

D=5

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\\\varepsilon\end{pmatrix}$$

↙

ha legalább az egyik nem 0, akkor nem lehet $\vec{0}$

↓

= a lineáris terek dimenziószáma eltérhet (pl. fv-eknél lehet ∞ dim.-ú)

~~a dimen~~

3) dim V = n   n dimenziós tér

$\vec{a}^{(1)} \dots \vec{a}^{(n)}, \vec{x}$ → lesznek olyan e.h., melyekkel a lin. k. 0 lesz

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}^{(1)} + \alpha_n \vec{a}^{(n)} + \alpha_0 \vec{x} = \vec{0} \quad / \cdot \frac{1}{\alpha_0}$$

$\alpha_0 \neq 0$ (egyébként nem lehetne az összeg $\vec{0}$)

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) \cdot \vec{a}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right) \vec{a}^{(2)} + \dots \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right) \cdot \vec{a}^{(n)} + \vec{x} = 0$$

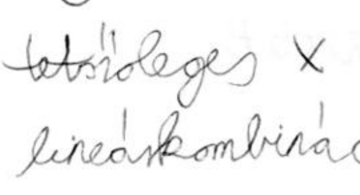
$$\vec{x} = -\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) \cdot \vec{a}^{(1)} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right) \cdot \vec{a}^{(2)} - \dots \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right) \cdot \vec{a}^{(n)}$$

$\Downarrow$

tetszőleges x vektort előállítottuk a „bázisvektorok" lineárkombinációjaként.

$\Downarrow$

Ha n dim-ós a tér, n ~~vek tetsz~~ tetsz. vektort választhatunk bázisnak, a többi lineárkomb.-ként előállítható



$$\vec{x} = 3\vec{a}^{(1)} + 1/2\, \vec{a}^{(2)}$$

más jelölés:

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a}^{(1)} + x_2 \cdot \vec{a}^{(2)} + \dots x_n \vec{a}^{(n)}$$

$= \quad \vec{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ egyértelműen hozzá tudunk rendelni az $\vec{x}$-hez egy számot (számoszlopot), ha a bázist rögzítettük

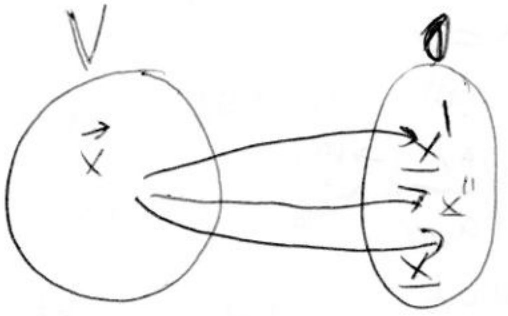
- de választhatunk másik bázist is $(\vec{b}^{(1)}, \dots \vec{b}^{(n)})$

↓

a számoszlopok adott bázis esetén <u>reprezentálják</u>

a vektort

$$\vec{x} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x}$$

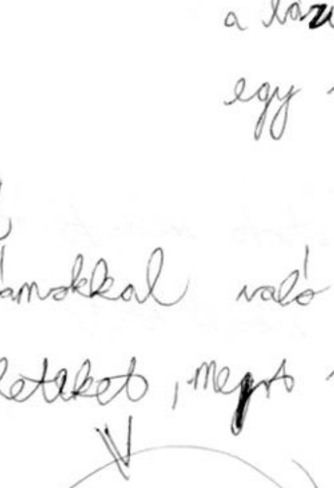


↓

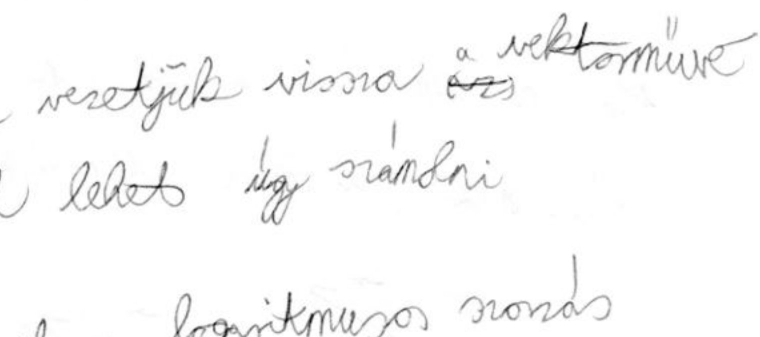
a bázisoktól függően megfeleltethető
egy számoszlop a vektornak

↓

számokkal való számolásra vezetjük vissza ~~az~~ a vektorműveleteket, mert számoszloppal lehet így számolni



Ilyen pl. a logaritmusos szorzás



A bázisválasztással lehet matematikailag egyszerűsíteni a problémát.

~~De a reprezentált vektorok nem m~~

4) Skaláris szorzás $(\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to \$)$

def. így: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

3D esetén

↓ levezethető ebből

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{k=1}^{3}a_k b_k$$

a) - de visszafelé is levezethető: ez jó, legyen:

$$\boxed{\underline{a}\,\underline{b}=\sum_{k=1}^{n}a_k b_k}\quad (\text{def.})$$

↓

ebből köv. a felső képlet (3D), de 5D esetén is van értelme

b) Skaláris szorzás ~~def. - jó~~ szabályai:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=(\vec{a}\vec{c})+(\vec{b}\vec{c})$
3. $(\alpha\,\vec{a})\,\vec{b}=\alpha\cdot(\vec{a}\vec{b})$
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0 \quad (|\vec{a}|\geq 0)$

} ezek n dimenzió~~jos~~ba is értelmesek

$\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \iff \vec{a}=\vec{0}$ → ez csak valós vektortérben igaz

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ↗ $\vec{a}$ vagy $\vec{b}=0$
↘ $\vec{a}\perp\vec{b}$

2. óra

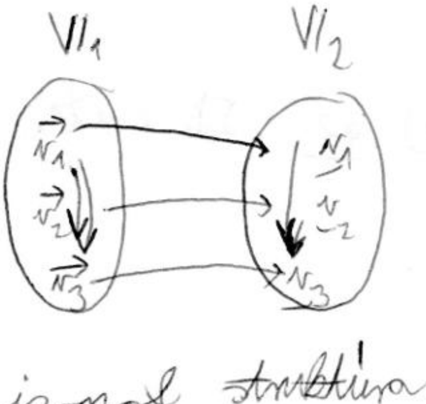
Kieg.:

- bázist ∞ sok félén választhatok, de nem bármely. 3 vektor lehet bázis
- bázis általában otonormál, de nem feltétlenül
- a ~~bázisvektor~~ számreprezentációkra a műveletek is megfeleltethetők

$\vec{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

$\underline{w} = \underline{u}+\underline{v}$

$$\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ u_2+v_2\\ u_3+v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$



kommutatív diagram

↳ mind 1, hogy elvégzem a műveletet, majd reprezentálok, vagy fordítva

izomorf ~~struktúra~~ ← ilyenkor

$(\alpha \cdot u)_k = \alpha \cdot u_k$

4) Skaláris szorzás:

Ha van olyan művelet, aminek a tulajdonságai megegyeznek a vektorok sk. szorzásának tul.-aival azt is **skaláris szorzásnak** nevezzük

c) ortonormált vektorok, ortonormált bázis:

$|\vec{e}|=1 \qquad \vec{e}\cdot\vec{e}=1$

$\vec{e}^{(1)} \quad \vec{e}^{(2)} \qquad \vec{e}^{(3)}$

$$\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{e}^{(1)}=1$$

$$\vec{e}^{(2)}\cdot\vec{e}^{(2)}=1$$

$$\vec{e}^{(3)}\cdot\vec{e}^{(3)}=1$$

$$\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{e}^{(2)}=0 \qquad \vec{e}^{(2)}\cdot\vec{e}^{(1)}=0$$

$$\vec{e}^{(1)}\cdot\vec{e}^{(3)}=0 \qquad \vdots$$

$$\vec{e}^{(2)}\cdot\vec{e}^{(3)}=0$$

$$\boxed{\vec{e}^{(k)}\cdot\vec{e}^{(l)}=\delta_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq 1\end{cases}}$$

$$\vec{v}=v_1\cdot\vec{e}^{(1)}+v_2\cdot\vec{e}^{(2)}+v_3\cdot\vec{e}^{(3)}=\sum_{k=1}^{3}v_k\cdot\vec{e}^{(k)}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}}=\left[\sum_k u_k\cdot\vec{e}^{(k)}\right]\cdot\left[\sum_l v_l\cdot\vec{e}^{(l)}\right]=\sum_k\sum_l u_k v_l\Big(\underbrace{\vec{e}^{(k)}\cdot\vec{e}^{(l)}}_{\delta_{kl}}\Big)=$$

kül. összegzőindex
kell 1 tagban

$$=\sum_k\sum_l u_k v_l\cdot\delta_{kl}=\sum_k u_k\underbrace{\sum_l v_l\cdot\delta_{kl}}_{v_k}=\boxed{\sum_k u_k v_k}$$

mn.:

$$\boxed{\sum_l v_l\cdot\delta_{kl}=v_k}$$

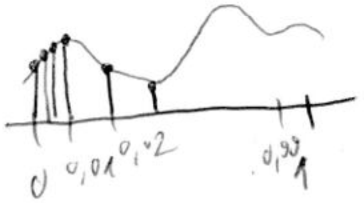
„képviseli"
k=1,2,3-t

$$=v_1\cdot\delta_{k1}+v_2\,\delta_{k2}+v_3\,\delta_{k3}$$

$\sum_k u_k v_k$ → ez nem csak a 3D-s vektorokra igaz
(akárhány komponensű számoszlopra is igaz)
↓
még ∞-re is

- sorozatok skaláris szorzata
- fv-ek —||—

⋮



$$\overbrace{\begin{pmatrix} f(0) \\ f(0{,}01) \\ f(0{,}02) \\ \vdots \\ f(0{,}99) \\ f(1) \end{pmatrix}}^{101\text{ komp. vektor}} \cdot \begin{pmatrix} g(0) \\ g(0{,}01) \\ g(0{,}02) \\ \vdots \\ g(0{,}99) \\ g(1) \end{pmatrix}$$

fv. értékek halmaza
~ vektor

$\sum_{x_k} f(x_k)\, g(x_k)$

↓ határérték

$$\to \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx = (f,g) = (f|g)$$

↓
ezekre is fennállnak a skaláris szorzat tulajdonságai

$f(x)=0$ semleges elem

Euklideszi $^{\text{vektor}}$tér (struktúra)

- euklideszi skaláris szorzat + lineáris tér (vektortér)

$\oplus \quad \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

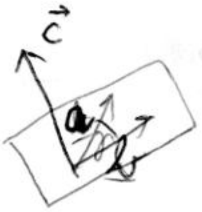
$\cdot \quad \mathbb{S} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$\boxed{\bullet \quad \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{S}}$

$\times \quad \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ → más műv. szab., mint az $\oplus$-nál (pl. nem kommut., nem assoc)

5) Vektorszorzás

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\gamma$

b) tul.:

- $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, ha $\vec{a}$ és/vagy $\vec{b} = 0$, vagy $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (nem jelöl ki síkot)

~~tul~~

- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
- $\vec{a} \times (\beta\vec{b}) = \beta\,(\vec{a} \times \vec{b})$

= a ~ kompatibilis a lineáris műveletekkel

↑ lineáris tért alk. -||- (+, ·)

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ antikommutatív művelet
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\vec{c})$ $\not\parallel$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\vec{b})$

} nem associatív

c) $\vec{a} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}$

$\vec{b} = \sum_l \beta_l \vec{e}^{(l)}$

nincs benne szabad
↑ index

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_k \alpha_k \cdot \vec{e}^{(k)}\right) \times \left(\sum_l \beta_l \cdot \vec{e}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l \alpha_k \beta_l \left(\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)}\right)$$

Elég a bázisvektorok szorzata

$$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(2)} = 5 \cdot \vec{e}^{(1)} + 7 \cdot \vec{e}^{(2)} + 9 \cdot \vec{e}^{(3)} = C_1^{(1,2)} \cdot \vec{e}^{(1)} + C_2^{(1,2)} e^{(2)} + C_3^{(1,2)} e^{(3)}$$

$$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(3)} = C_1^{(2,3)} \vec{e}^{(1)} + C_2^{(2,3)} \vec{e}^{(2)} + C_3^{(2,3)} \vec{e}^{(3)}$$

$$\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)} = \sum_{m=1}^{3} C_m^{(kl)} \vec{e}^{(m)}$$ → a bázisvektorok szorzata

↓

már csak ezt a 27 számot kell definiálni

$C_1^{12} = 0$

$C_2^{12} = 0$

$C_3^{12} = 1$

$C_1^{21} = 0$

$C_2^{21} = 0$

$C_3^{21} = -1$

$C_1^{11} = 0$ $\left(\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(1)} = 0\right)$

$C_2^{11} = 0$

$C_3^{11} = 0$

$$\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)} = \sum_m \varepsilon_{klm} \cdot \vec{e}^{(m)}$$

$\varepsilon_{123} = 1$

ha 2-t felcserélünk → $(-1)\times$

$\varepsilon_{231} = -1$

$\varepsilon_{213} = -1$

⋮

$$\Rightarrow \sum_k \sum_l \alpha_k \beta_l \left(\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)} \right) = * = \underline{\underline{\sum_k \sum_l \alpha_k \beta_l \sum_m \varepsilon_{klm} \vec{e}^{(m)}}}$$

Mi van, ha ferde koordinátarendszer van?
pl. kristályban → a Levi-Civita is megváltozik !!!

$$= \sum_m \underbrace{\left(\sum_k \sum_l \varepsilon_{klm} \alpha_k \beta_l \right)}_{\gamma_m \to \text{vminek az m. komponense}} \cdot \vec{e}^{(m)} = \underbrace{\sum_m \gamma_m \cdot \vec{e}^{(m)}}_{\downarrow} = \vec{c}$$

egy pont
$\vec{c}$ ~~reprezentációja~~
felbontása bázisv.-k
lineárkomb.-ra

$$\boxed{c_m = \sum_k \sum_l \underbrace{\varepsilon_{klm}}_{=\varepsilon_{mkl}} a_k b_l}$$

= a vektorszorzás nem általánosítható tetszőlegesen, csak ha <u>struktúraállandó</u>-kat határozunk meg ~~(ε_{klm} = ?~~ ~~ε_{klm} → ez)~~ $(\varepsilon_{klm\,n} = \dots)$

ha $\underbrace{\oplus, \odot}_{\text{lineáris tér}}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{struktúraállandók} \\ \text{kompatibilis}}}{\otimes}$ + tul.-ok + elemek = $\boxed{\text{algebra}}$

a négyzetes mátrixok is algebrát alkotnak
- de a mátrixszorzás nem komm.) és nem antikomm.

- viszont asszociatív → assoc. algebra

6) Lineáris leképezés

$$V \qquad W$$

$$\underline{v} \xrightarrow{f} \underline{w}$$

$\underline{w} = f(\underline{v})$ f: leképezés

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(\alpha \underline{v}) = \alpha \cdot f(\underline{v}) \end{array}}$$

→ additivitás

→ homogenitás

- Ha egy művelet add. + homogén → lineáris
- Ha f lineáris → lineáris leképezés

a) lineáris operátor

$V \to W = V$ ugyanannak a ~~az~~ térnek az elemeihez ugyanazon tér elemét rendeljük hozzá

$$\vec{w} = \hat{A}\vec{v}$$

$$\hat{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\hat{A}\vec{v}_1) + (\hat{A}\vec{v}_2)$$

$$\hat{A}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\hat{A}\vec{v})$$

(lin.) funkcionál

b) $W = \int$

$\vec{v} \to \alpha$ vektorhoz skalárt rendelünk

pl. $\vec{v} \to \vec{v}_{(1)}$

⇓

1. komponens

fv-ek → integrál : lineáris

a) lin. operátorok

$$\vec{w} = \hat{A}\vec{v}$$

$$\boxed{\underline{w} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}}$$

$\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$ ⇒ $\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)}$

$$\hat{A}\vec{v} = \sum_k v_k \big(\underbrace{\hat{A}\vec{e}^{(k)}}_{\vec{f}^{(k)}}\big) = \sum_k v_k \vec{f}_{(k)}$$

elég azt tudni, hogy mi történik a bázisvektorokkal

↓

9 adat

$$\boxed{A_{kl} = \vec{e}^{(k)}\left(\hat{A}\,\vec{e}^{(l)}\right)}$$

$w_k = \sum_l A_{kl} v_l$

ez tetszőleges dimenzióra értelmezhető

Keddenként előadás után gyakorlat lesz az új anyagokból! (nem köt.)

3. óra

d) **Ism.:**

- $\vec{v}+\vec{u}=\vec{w}$ + ~~szabályok~~ műv. tul. } → vektortér
- $\alpha\vec{u}$

↙ valós ↘ komplex

$$\vec{v}=\sum_k \alpha_k \vec{a}^{(k)} \longleftrightarrow \underline{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$$

- skaláris szorzat geom $\xrightarrow{\text{kiterj}}$ fv-ek

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 dx\, f(x)g(x)$$

$$\langle a,a\rangle \geq 0$$

↑ ez komplexekre nem igaz

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix} \quad \sum_k a_k b_k=\gamma$$

↓

- hossz ↓ egységvektor

n db —"—, melyek páronként ortogonálisak ↓ ortonormált bázis

$$\vec{e}^{(k)}\cdot\vec{e}^{(l)}=\delta_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}$$

1) $\underbrace{\{\vec{e}^{(k)}\}^{\wedge}_{n}}$

halmazképzés

TONB - teljes ortonormált bázis

$\boxed{\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}} \;/\cdot e^{(l)}$

$\overbrace{\alpha_1\cdot\delta_{1l}}^{0} + \overbrace{\alpha\,\delta_{2l}}^{0} + \dots \alpha_l \overset{1}{\delta_{ll}} + \dots$

$\underline{\underline{\vec{v}\cdot e^{(l)}}} = \sum_k \alpha_k \big(\underbrace{\vec{e}^{(k)}\cdot\vec{e}^{(l)}}_{\delta_{kl}}\big) = \sum_k \alpha_k \delta_{kl} = \underline{\underline{\alpha_l}}$

$\boxed{\alpha_k = \vec{e}^{(k)}\cdot\vec{v}}$

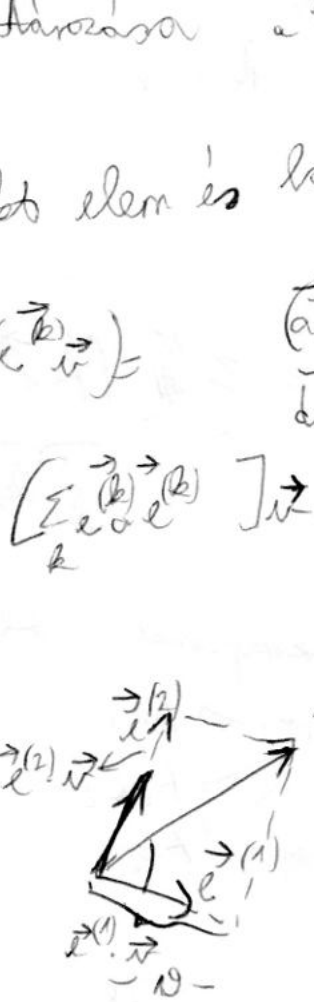
absztrakt elem meghatározása a bázis és együtthatók segítségével

együtthatók absztrakt elem és bázis segítségével

$\vec{v} = \sum_k \vec{e}^{(k)}\alpha_k = \sum_k e^{(k)}(\vec{e}^{(k)}\vec{v}) =$ $\qquad (\vec{a}\underbrace{\circ}_{\text{diadikus szorzat}}\vec{b})\,\vec{v} = \vec{a}(\vec{b}\,\vec{v})$

$= \sum_k (\vec{e}^{(k)}\circ\vec{e}^{(k)})\,\vec{v} = \Big[\sum_k \vec{e}^{(k)}\circ\vec{e}^{(k)}\Big]\vec{v} = \hat{I}\,\vec{v}$

$\hat{I} = \sum_k \vec{e}^{(k)}\circ\vec{e}^{(k)}$

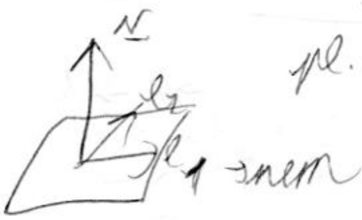


2) $\hat{I} = \sum_k \vec{e}^{(k)} \circ \vec{e}^{(k)} \to P_k^{(k)} \to k.$ ~~operátor~~ projektor

$$\boxed{\hat{I} = \sum_k \hat{P}^{(k)}}$$

TONB
$\downarrow$
teljes orton. bázis

$\downarrow$
minden vektor előállítható, nem egy síkban van 2 bázis vektor
pl. 3D esetén



→ nem teljes

3) lineáris operátor:

$\hat{A} \quad \vec{v}$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{A}(\vec{v}+\vec{u}) = \hat{A}\vec{v} + \hat{A}\vec{u} \\ &\hat{A}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\hat{A}\vec{v}) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{addit.} \\ &\text{homog.} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)}$$

$$\hat{A}\vec{v} = \sum_k \hat{A}(v_k \vec{e}^{(k)}) = \sum_k^N v_k \underbrace{(\hat{A}\vec{e}^{(k)})}_{f^{(k)}} = \sum_k^N v_k \vec{f}^{(k)}$$

$$\sum_k \vec{e}^{(k)} \to \sum_k \vec{f}^{(k)}$$

9 komponens kell

$$\begin{tikzcd} Ae^{(k)} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & Ae_1 \\ & Ae_2 \\ & Ae_3 \end{tikzcd}$$

$$u_l = \vec{e}^{(l)} \cdot \vec{u} = \vec{e}^{(l)} \left(\hat{A}\vec{v}\right) = \vec{e}^{(l)} \left(\sum_k v_k \vec{f}^{(k)}\right) =$$

$$= \sum_k v_k \left(\vec{e}^{(l)} \vec{f}^{(k)}\right) = \sum_k v_k \Big[\underbrace{\vec{e}^{(l)} \left(\hat{A}\vec{e}^{(k)}\right)}_{A_{lk}} \Big] = \sum_k A_{lk} v_k$$

↓

a leképezett bázisnak (f) is 3 koordinátája van.

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

$u_l = \sum_k A_{lk} v_k$

→ az ~~mátrixokat~~ operátorokat mátrixszal (táblázat) reprezentáljuk

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

(mindent az ortonormál bázison kell érteni)
↳ pl. kristályfizikában máshogy van.

4) Lineáris pl. deriválás

diff. operátor " is lineáris

$Df = f''$

$(f+g)' \overset{!}{=} f' + g'$

$(\alpha f)' \overset{!}{=} \alpha f'$

$D(f+g) = D(f) - D(g)$

$D(\alpha g) = \alpha(Dg)$

5) operátorok műveletei:

- $(\hat{A}+\hat{B})\vec{v} = (\hat{A}\vec{v}) + (\hat{B}\vec{v})$
- $(\alpha\hat{A})\vec{v} = \alpha(\hat{A}\vec{v})$ $\rightarrow$ $\underbrace{\hat{A}^2, \hat{A}^3}_{\text{ezekből}}, \hat{A}^0 = \hat{I}$ is értelmezhető
- operátorok szorzása:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{op. hatása} \\ \text{vektorral}}}{(\hat{A}\hat{B})\vec{v}} = \hat{A}(\underbrace{\hat{B}\vec{v}}_{\text{vektor}})$$

↓

algebrát alkotnak az operátorok

- adott vektortéren ért. operátorok algebrát alkotnak

~ hasonlóan

$$D^2 f = DDf = D(\overbrace{Df}^{f'}) = f''$$

$$(5D)f = 5(\overbrace{Df}^{f'}) = 5f'$$

↑ számmal szorzás

D^2+3D

↓ op. szorzás

↓ op. összeadás

$$(D^2+3D)f = f''+3f'$$

$\underline{\underline{D^0}} = I \quad If = f$

$\overbrace{(D^2+2D+1)}^{L(D)} f = 0$

$f'' + 2f' + f = 0$ diff. egyenlet

- közönséges
- lineáris: ismeretl. fv. és deriváltjai csak lineáris kombinációkban szerepelnek
- másodrendű
- állandó e. hatós (nincs változó az e.h.-ban)

$f'' + \sin x \cdot f' + e^x f = 0$

↓

változó e.h.-ós

pl. Schrödinger-egyenlet

diff. egyenlet = a fv-re ható ~~az~~ deriválás operátor polinomja

↓

$L(D)$

$L(D) = 0$

$f'' + \sin x . f' + e^x f = 0$ ha van tag amiben nem szerepel az ismeretlen ∃ homogén

$L(D) f(x) = 0$

$L(D) f(x) = g(x)$

$$g(x) \rightarrow \boxed{L(D)} \xrightarrow{f(x)} \sim$$ operátorok

fv. térben van-e bázis?

↳ lineárkomb.-~~ból~~ jukkal az összes ~~(végtelenig)~~ többi előállítható

- áll: ~~ha~~ ∃ olyan egyszerű fv-ek melyek ennek eleget tesznek.

$\varphi_k(x) \rightarrow$ bázisfv-ek

$$\boxed{g(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x)}$$

↳ ∃-e ilyen ~~[illegible]~~ φ számok?

(∞ sok ilyen módon van) ~~[illegible]~~ → igen

↳ sokat használnak

$$\underbrace{\varphi_k \varphi_l}_{\text{skaláris szorzat}} = \delta_{kl}$$

↳ $(f,g) = \int dx\, f(x) g(x)$

↓ az ~~vektorok~~ operátorokról megismertekhez hasonló módon járunk el.

$$\begin{tikzcd} & c_1\varphi_1(x) \arrow[r] & \square \\ \varphi \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & c_2\varphi_2(x) & \\ & c_n\varphi_n(x) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \varphi_1 \arrow[r] & \square \arrow[r] & \Psi_1(x) \\ \varphi_2 \arrow[r] & \square \arrow[r] & \Psi_2(x) \end{tikzcd}$$

$f(x) = \sum_k c_k \psi_k(x)$

$L(D) f(x) = L(D)\left(\sum_k c_k \psi_k(x)\right)$

$= \sum_k L(D)\left(c_k \cdot \psi_2(x)\right)$

$= \sum_k c_k (D)\left(L_k(D) \cdot \psi_3(x)\right) = \sum_k c_k \varphi_k(x) = g(x)$

↓ elég a bázisfv-ekkel történő ~~[illegible]~~ műveleteket megnézni

$\boxed{\text{de}}$ ~~a~~ $n = \infty$ dimenziósak a fv-terek !!

↳ technikai probléma

Lehet-e bázisfv-ekre felbont?

~~Diffegyenlet~~

Bázis választása

Diffegy. kijelölése

↳ Σ felírása (leképezéshez)

↓

hogyan számoljunk

Sajátérték probléma

$\vec{u} \neq \boxed{\hat{A}\vec{v} = \lambda \vec{v}}$

↓

ilyenkor az op. felveszi a saját értékét (egy számszorosát)

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\,\underline{v} = \underline{0}$ → lineáris egyenletrendszer → Gauss-el.

↙ triv. mo. $\underline{0}$

↘ nem triviális mo.

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = f(\lambda) \overset{!}{=} 0$

↓ n-edfokú polinom

↳ komplexben n ~~mo~~ gyöke van

$Df(x) = \lambda f(x)$

$f' = \lambda f$

$(e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ → a differenciáloperátor sajátfüggvénye az exponenciális fv.

$(e^{x})' = e^{x}$

szimmetrikus mátrixok esetén:

- sajátértékek valósak
- sajátvektorok ⊥-esek

~~most~~ ↓ a sajátvektorok ~~(ortonormális)~~ bázist jelölnek ki

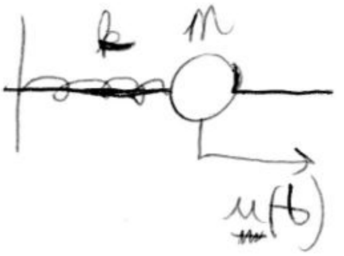
↓

a sajátvekt. alkotta bázisban sokszor egyszerűbb számolni

(pl. kristályoptika)

⇓

~ diffegyenleteknek hasonló sajátértékproblémájuk van, melyet megoldva saját ~~(bázis)~~ fv-eket kapunk, ~~melyeket lineárkombinált~~ melyből bázist képezhetünk



$m\ddot{u} = -k \cdot u \; (=F)$

$\ddot{u} = -\frac{k}{m} u$

$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m} u(t) = 0$ $\qquad u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

- másodrendű
- közönséges
- lineáris
- áll. e. h.
- homogén

ált. megoldás

↓ kezdeti feltétel

A= ...

B= ...

↓

cos és sin lesznek a bázisfv-ek

↳ Fourier-analízis

lehet-e cos és sin fv-ek lineárk.-jára felbontani a fv-eket?

Fourier - analízis

1) periodikus fv.-ek:

$f(t+T)=f(t)$ ← legyen

$\Downarrow$

$f(t+nT)=f(t) \quad n\in\mathbb{Z}$

áll: periodikusok összege is periodikus
szám · periodikus = periodikus } lineáris tér

↓

ebben sin és cos fv-ek bázisok

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ $\quad \sin \omega_1 t$

$$\sin \omega_1 (t+T) = \sin(\omega_1 t + \overbrace{\omega_1 T}^{2\pi}) = \sin(\omega_1 t + 2\pi) =$$
$$= \sin(\omega_1 t)$$

$\Downarrow$

sin és cos periodikus

$$\sin(2\omega_1 t) = \sin(2\omega_1 t + \overbrace{2\omega_1 T}^{4\pi}) = \sin(2\omega_1 t)$$

$\sin(k\omega_1 t)$
$\cos(k\omega_1 t)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$ } ezek T szerint periodikusak

$k \in \{1, 2 \ldots\}$

és 1 ($k=0$ cos esetén) → (ez is periodikus)

↓

bázisfv-ek

$$f(t) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t) \right]$$

fv-nek a bázisfv-ei szerinti felbontása

$$\sim \left(\begin{array}{l} \vec{v} = \sum \alpha_k \vec{e}^{(k)} \quad / \cdot \vec{e}^{(l)} \\ \vec{v} \cdot \vec{e}^{(l)} = \sum_k \alpha_k \underbrace{\left(\vec{e}^{(k)} \vec{e}^{(l)} \right)}_{\delta_{kl}} = \alpha_l \\ \alpha_k = \vec{e}^{(k)} \vec{v} \end{array} \right)$$

$$(f, g) = \int_0^T dt\, f(t) \cdot g(t)$$ → skaláris szorzás

$$f(t) = a_0 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t) \Big] \quad / \cdot 1$$

$$\int_0^T f(t)\, dt = a_0 \underbrace{\int_0^T 1\, dt}_{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \overbrace{\int_0^T \cos(k\omega_1 t)\, dt}^{0} + b_k \overbrace{\int_0^{\pi} \sin(k\omega_1 t)\, dt}^{0} \right)$$

↗ ∞ összegbe most beintegráljuk

$$\underline{\underline{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt}}$$ → megkaptuk az egyik e.h.-t

– uezt kell csinálni a többi ~~ortogon~~ bázisvektorral

$\cdot \cos(kx) \quad \cdot \sin(kx)$

$\downarrow$

ezek ortogonálisak $\cos(nl)\cdot\cos(kl) = \delta_{kl} \ldots$

de nem ortonormálisak

4. óra

Em.:

– fv-ek lineáris teret alkotnak

~~de~~ lehet-e olyan egyszerű fv-eket választani (bázisfv.)

melyek lineárk.-ból előállíthatóak a fv-ek ~~bázis~~ ?

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

per. fv-ek

$f(t+T) = f(t)$

$f(t+nT) = f(t)$

$n \in \mathbb{Z}$

$\sin \omega_1 t$

$\sin \omega_1(t+T) = \sin(\omega_1 t + \omega_1 T) = \sin(\omega_1 t + 2\pi) = \sin \omega_1 t$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sin(k\omega_1 t) \\ \cos(k\omega_1 t) \\ 1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{N}^+ \\ k = 0 \end{array}$$

($\vec{v}$, $e^{(k)}$ → vektoroknál ∃

? α_k → ∃-e ilyen eh.-k, hogy

$\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)}$)

f fv. adott:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\right]$$

a_0
$a_k, b_k \in \mathbb{R}$

↓

létezik-e
ilyen e.h.-k?

↓

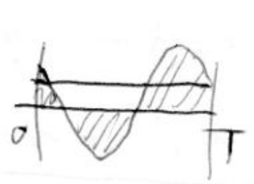
ha létezik → Fourier-sor

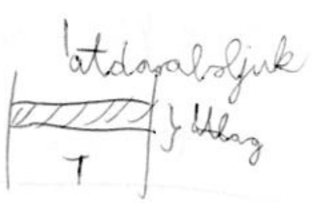
Fourier-eh.-k: a_0, a_k, b_k

T hosszú int.-on integrálunk:

$$\int_0^T f(t)\,dt = a_0 \cdot \underbrace{\int_0^T 1\,dt}_{T} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \underbrace{\int_0^T \cos(k\omega_1 t)\,dt}_{0} + b_k \underbrace{\int_0^T \sin(k\omega_1 t)\,dt}_{0}\right)$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$$





⇓

a_0: a függvény átlaga

Vektorokra:

$$\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)} \quad / \cdot \vec{e}^{(l)} \qquad \vec{e}^{(k)} \cdot \vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}$$

$$\vec{v}\vec{e}^{(l)} = \sum_k \alpha_k \underbrace{\vec{e}^{(k)} \cdot \vec{e}^{(l)}}_{\delta_{kl}} = \alpha_l$$

$$\boxed{\alpha_k = \vec{v} \cdot \vec{e}_k}$$

Ugyanezt csináljuk a fv-ekkel: $f(t) = \dots \quad / \int_0^T \cdot \cos(n\omega_1 t)$

($\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ → skaláris szorzat fv-ekkel)

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt = a_0 \underbrace{\int_0^T \cos(n\omega_1 t)}_{0}\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int \cos(k\omega_1 t)\cdot\cos(n\omega_1 t) + b_k \int_0^T \sin(k\omega_1 t)\cdot\cos(n\omega_1 t)\,dt\right)$$

Msz.:

$$\cancel{\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cancel{\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \Big\} \frac{\oplus}{2} \quad \frac{\ominus}{2}$$

$$\cancel{\cos\alpha = \cos} \qquad \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{\cancel{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\ 2} = -\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos(k\omega_1 t)\cdot\cos(n\omega_1 t) = \frac{\cos((k+n)\omega_1 t) + \cos((k-n)\omega_1 t)}{2}$$

$$\sin(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t) = \frac{\sin((k+n)\omega_1 t) + \sin((k-n)\omega_1 t)}{2}$$

sin-ok és cos-ok $\int_0^T$-ja $= 0$

de ha $k = n$ (n volt a rögzített)

$$\cancel{\left(\frac{\sin(\overset{0}{(k-n)}\omega_1 t)}{2} = \frac{0}{2}\right)} \qquad \frac{\cos(0\omega_1 t)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int_0^T \cos(k\omega_1 t)\cdot\cos(n\omega_1 t)}_{\frac{T}{2}\cdot\delta_{kn}}$$

$$\Downarrow$$

ortogonális, de nem ortonormált

(↳ $\sqrt{\frac{2}{T}}$-vel le lehetne normálni őket, de nem szokták)

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega_1 t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{T}{2}\delta_{nk} + b_k\cdot 0\right) = \frac{T}{2}a_n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt}$$

- $\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_1 t) = a_0\underbrace{\int_0^T \sin(n\omega_1 t)}_{0} + \sum_k\Big(a_k\int_0^T \cos(k\omega_1 t)\cdot\sin(n\omega_1 t) +$
$+ b_k\int_0^T \sin(k\omega_1 t)\cdot\sin(n\omega_1 t)\Big)dt$

mn:

$$\int_0^{T} \cos(k w_1 t) \cdot \sin(n w_1 t) = \underbrace{\int_0^T \frac{\sin((n+k) w_1 t)}{2}\, dt + \int_0^T \frac{\sin(n-k) w_1 t}{2}\, dt}_{0}$$

$$\int_0^T \sin(k w_1 t) \cdot \sin(n w_1 t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\cos(k-n) w_1 t}{2} - \int_0^T \frac{\cos(k+n) w_1 t}{2} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ ha } n \not\equiv k & \cancel{\frac{T}{2}, \text{ ha}} \\ \frac{T}{2}, \text{ ha } n = k \end{cases}$$

↗ $\sin^2$ integrálja

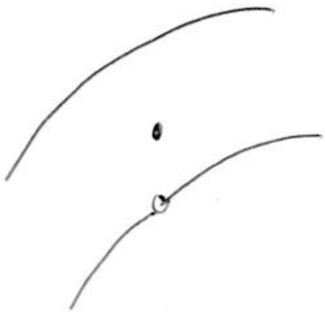
$$\int_0^T f(t)\cancel{\cos}\sin(n w_1 t) = \cancel{\ \ } a_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k 0 + b_k \frac{T}{2}\delta_{kn}\right)$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin(n_1 w t)}$$

$$\Downarrow$$

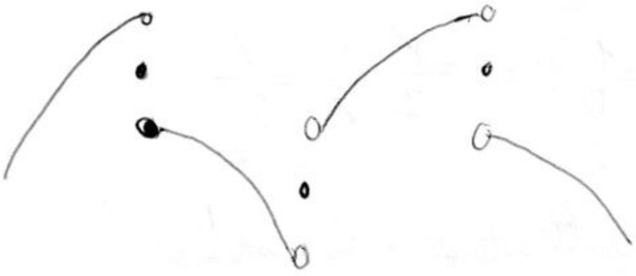
$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n w_1 t) \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n w_1 t) \end{aligned}}$$

→ ált.ban ~~T~~ 1-2 tagig szokták kis t-kre kifejteni



↓

ha integrálunk, a 2 fv. ugyanaz,
de mat.-ilag 1 pontban eltérnek



⇓

a Fourier-sorba fejtés [illegible] ugyanaz lesz

⇕ ugyanaz a Fourier-sor több fv.-t is jellemez

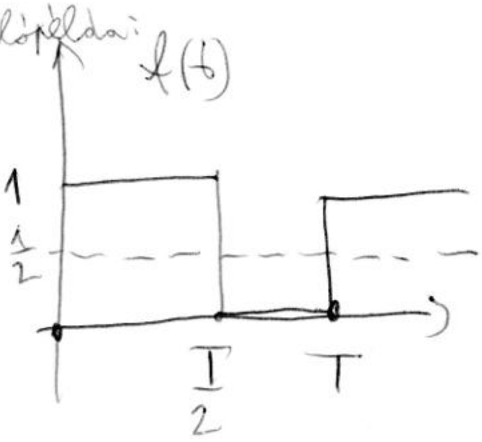
⇓

ha megszámlálhatatlan végtelen sok szakadás van
akkor még lehet integrálni

→ megszámlálhatatlan sok e.h.-t meghatározza az ilyen
fv.-t

~~ilyen~~ megszaml.-hatatlan sok eh.-val lehet reprezentálni
a fv.-t.

Gyakorlópélda:



négyszögjel

$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\frac{T}{2}\\ 0 & \frac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

→ a szakadási pontban mind1 a fv. érték

$$\underline{\underline{a_0}}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1\,dt=\frac{\cancel{T}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{T}}=\underline{\frac{1}{2}}$$

⇓ a fv. átlaga $\frac{1}{2}$

behelyettesítjük a fv. értékét

$$\underline{a_k}=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)=\frac{2}{T}\int_{t=0}^{T}\underbrace{\cos(k\omega_1 t)}_{y=k\omega_1 t}\,dt=$$

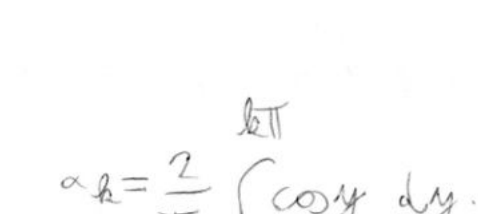
$$dy=k\omega_1\,dt$$

$$t=0 \to y=0$$

$$t=T/2 \to y=k\omega_1\frac{T}{2}=k\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}=k\pi$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^{k\pi}\cos y\,dy\cdot\cancel{(k\omega)}\frac{1}{k\omega_1}=\frac{2}{Tk\omega_1}\int_{y=0}^{y=k\pi}\cos y\,dy=\sin y\Big|_{y=0}^{y=kT}=\underline{\underline{0}}$$

ha az a_0-t már levontuk



páratlan fv → nincsenek benne cos-ok

- ha $f(t)$ páros → $b_k=0$ ∀k
- ha $f(t)$ ptl → $a_k=0$ ∀k

$$\underline{\underline{b_k}} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{t=0}^{T/2}\sin(k\omega_1 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{y=0}^{k\pi}\sin y\,\frac{dy}{k\omega_1} =$$

$y = k\omega_1 t$

$dy = k\omega_1 dt$

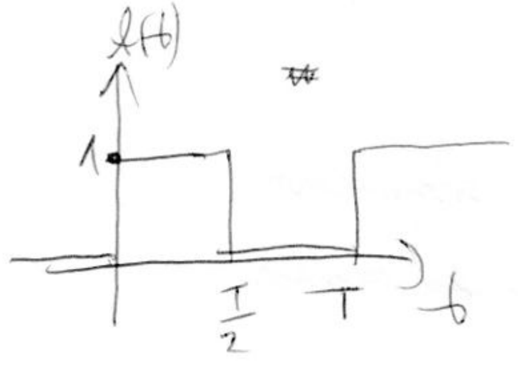
$\frac{dy}{k\omega_1} = dt$

$$= \frac{2}{Tk\omega_1}\int_0^{k\pi}\sin y\,dy = -\frac{2}{Tk\omega_1}\Big[\cos y\Big]_0^{k\pi} =$$

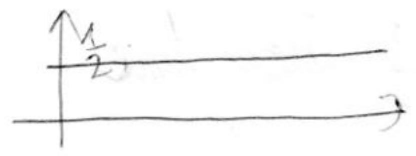
$$= -\frac{2}{Tk\omega_1}\Big(\underset{\uparrow}{\cos k\pi} - \overbrace{\cos 0}^{1}\Big) = \underline{\underline{\frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)}}$$

$\cos k\pi = (-1)^k$

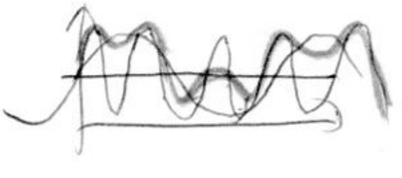
$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(k\omega_1 t) = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\sin(\omega_1 t)}_{k=1} + \underbrace{0}_{k=2} + \underbrace{\frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_1 t) + \dots}_{k=3}$$



k = 0



k=1 -ig



k=0;1

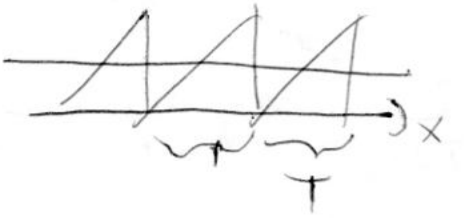
→

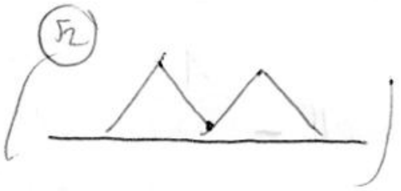
k = 0;1;2

ökölszabály:

- ahol szakadás van, ott lassan konvergál a Fourier-sor
- ahol folytonos, ott gyorsabban

1. Hf





a Fourier-soros kifejtés olyan fv.-ekre használható, melyek lineáris teret alkotnak

pl.

- olyan körlapon értelmezett fv-ek, mely a körvonalon 0-k

⇓

dob rezgését így le lehet írni

~~Expon. fv.~~

e^x sajátfv.-e a diff. operátornak

$e^{ix} \to \sin x, \cos x$

$e^{i(kx-wt)}$ Valós változós, komplex értékű fv.-ek

(ez nem komplex fv. tan)

↳ ~~valós~~ $\mathbb{R} \to$ komplex számok $\to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i0}=1$$

$\Downarrow$ $\frac{1}{i}=-i$

Fourier-sor exp. alakban

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kw_1t) + b_k\sin(kw_1t)\right] =$$

$$= a_0\cdot e^{i0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\frac{e^{ikw_1t}+e^{-ikw_1t}}{2} + b_k\frac{e^{ikw_1t}-e^{-ikw_1t}}{2i}\right) \overset{*}{=} \qquad \frac{1}{i}=-i$$

$$* = f(t) = a_0\cdot e^{i0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_k}{2}+\frac{b_k}{2i}\right)e^{ikw_1t} + \left(\frac{a_k}{2}\ \frac{b_k}{2i}\right)\cdot e^{-ikw_1t}\right] \overset{\downarrow}{=}$$

$$= a_0 \cdot e^{i0\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_1 t} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} \cdot e^{-ik\omega_1 t}}_{\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{ik\omega_1 t}} =$$

Új jelölés:

$$c_0 = a_0$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

$$c_{-3} = \frac{a_3 + ib_3}{2}$$

$$c_{+3} = \frac{a_3 - ib_3}{2} \qquad \boxed{c_{-k} = c_k^*}$$

$$= c_0 e^{i0\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t} =$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t}} \quad \text{ahol} \quad c_k = \begin{cases} a_0 & \text{ha } k = 0 \\ \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases}$$

↓

- elméleti számításoknál ezt használjuk
- gyakorlatban inkább a sin-os alakot

kiszámítás átalakítása:

$k>0$

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt+\frac{i}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\underbrace{\left(\cos(k\omega_1 t)+i\sin(k\omega_1 t)\right)}_{e^{-ik\omega_1 t}}dt$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega_1 t}dt$$

$k<0$

$$c_k=\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(-k\omega t)\,dt+\frac{i}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(-k\omega_1 t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos(k\omega_1 t)-i\sin(k\omega_1 t)\right)=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega_1 t}dt$$

$k=0$

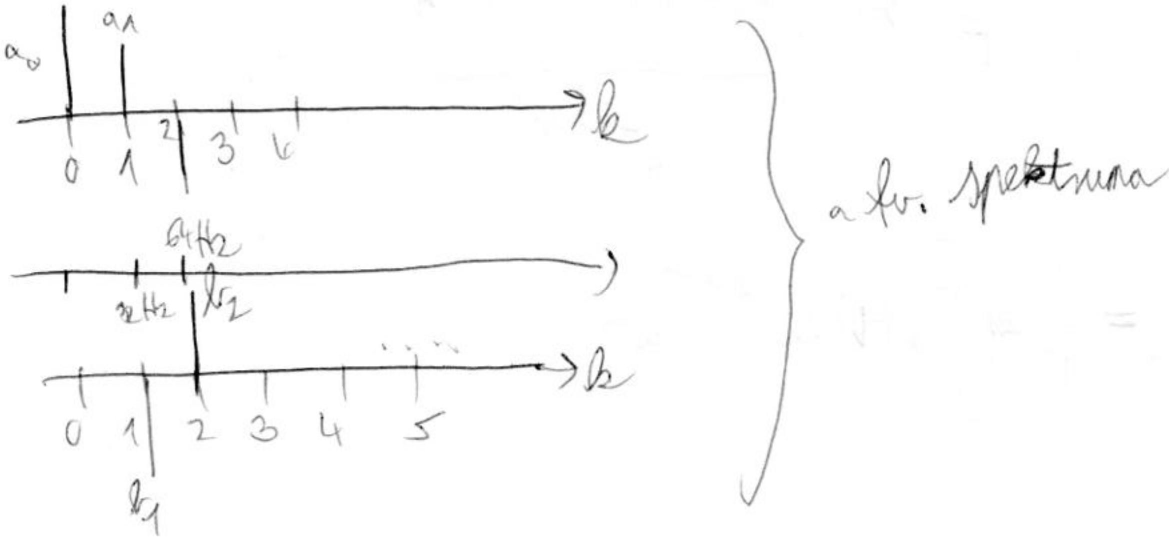
$$c_0=a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int f(t)e^{-i0\omega_1 t}dt$$

$\Downarrow$

$$\boxed{c_k=\frac{1}{T}\int_0^T dt\cdot f(t)\,e^{-ik\omega_1 t}}\qquad\boxed{f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{ik\omega_1 t}}\rightarrow$$

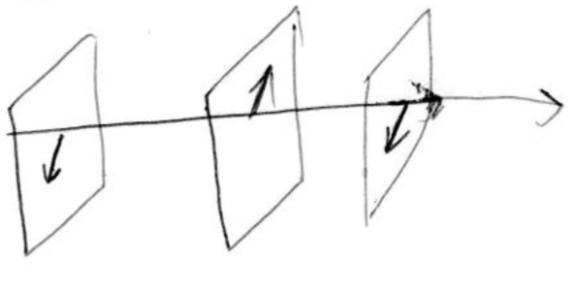
Ezek ugyanazt fejezik ki

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-ik\omega_1 t}$$



pl. hang: a ~~k~~ nagyobb k értékek a nagyobb felharmonikusoknak felelnek meg

c_k-ki:



Nem periodikus fv.-ek Fourier-sora

1) $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ $T \to \infty$

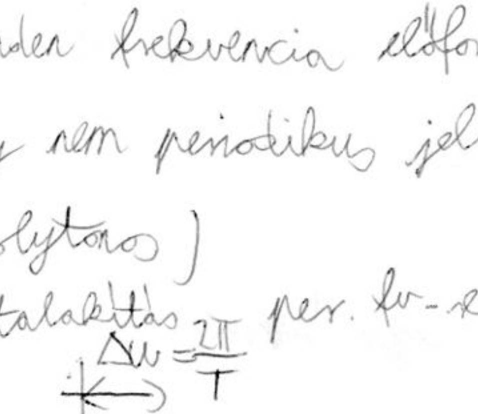
$\omega = \frac{2\pi}{T} \;\overset{T}{\underset{\infty}{\downarrow}} \to 0$

↓

minden frekvencia előfordul ↔ periodikus fv-eknél csak diszkrét ω-k voltak
egy nem periodikus jelben
(folytonos)

2) mat. átalakítás ~~per.~~ per. fv-re

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{\Delta\omega} e^{ik\omega t} \Delta\omega$$

$$\frac{c_k}{\Delta\omega} = \underset{\overset{\|}{\frac{T}{2\pi}}}{\frac{1}{\Delta\omega}} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-(ik\omega_1)t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-(ik\omega_1 t)}$$

⇓

3) határérték → nem per. fv.

$\frac{c_k \to \infty}{\Delta\omega \to \infty}$ → a hányados véges értékhez tart

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k}{\Delta\omega}\,e^{i\underbrace{(k\omega_1)}_{\omega}t}\,\Delta\omega$$

$$\downarrow$$

$$\frac{c_k}{\Delta\omega} = F(\omega)$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega}\\[2ex]\boxed{F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt}\end{array}\right\}\text{nem periodikus fv-ek Fourier-eh.-ai}$$

$$\Downarrow$$

ezek hasonlítanak egymásra

⇒ periodikus fv-eknél megszámlálhatóan (∞) sok egyszerű fv. volt

nem per. —||— kontinuum ∞ egyszerű fv (bázis) van

(folytonos lineárkombináció)

per. → Fourier-sor

nem per. → Fourier-integrál

$f(t)$, $F(\omega)$

$\longleftrightarrow$

transzformáció

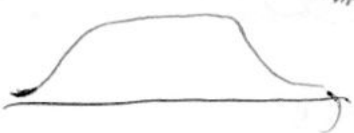
köl~~csönös~~csönös megfeleltetés

↳ időtartományban vagy frekvenciatartományban nézzük ugyanazt a jelet

$$\begin{tikzcd}
 & \varphi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
f(t) \arrow[rr, leftrightarrow] & & F(\omega)
\end{tikzcd}$$

absztrakt fv.

pl. erősítés átviteli grafikonja



↑ ↗

többféle reprezentációja van az absztrakt fv-nek

$$f_t = \sum_{\omega} E_{t\omega} F_{\omega}$$

~ mátrixok

$$F_{\omega} = \sum_{t} E^{*}_{\omega t} f_t$$

$$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$$

$$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$$

$$u_k = \sum_{l} A_{kl} v_l$$

$\Downarrow$

A mátrix és vektor folytonos általánosítása

$$f_t = \sum_w E_{tw} F_w$$

$$F_w = \sum_t E^*_{wt} f_t$$

↓

unitér mátrix $E_{tw}^{-1} = E_{wt}^*$

↓

komplex tereknél ez a forgatásnak ($\underline{O}$ ortogonális mátrix) felel meg

Folyt. mátrixok: kernel: transzf. maga

$$\boxed{g(y) = \int dx \ (K(x,y)\, f(x)}$$

$$g_y = \sum_x K_{yx} f_x$$

$$\boxed{f(x) = \int dy \ L(x,y)\, g(y)} \qquad f_x = \sum_y L_{xy} g_y$$

↓

ez az előző inverze

$$f_x = \sum_y L_{xy} g_y \qquad g_y = \sum_x K_{yx} f_x \equiv \sum_z K_{yz} f_z$$

x-en nem
szabad lek.-teni,
mert a másikban az egy szabad,
és nem összegző index

$$f_x = \sum_y L_{xy} g_y = \sum_y L_{xy} \sum_z K_{yz} f_z = \sum_z \left(\sum_y L_{xy} K_{yz} \right) f_z =$$

$$f_x = \sum_z \delta_{xz} f_z$$

$$\sum_y L_{xy} K_{yz} = \delta_{xz} \text{ (egységmátrix)}$$

$$\left(\underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{E}} \right)$$

integrálos alak:

$$f(x) = \int dy\, L(x,y)\, g(y) = \int dy\, L(x,y) \int dz\, K(y,z)\, f(z) =$$

$$g(y) = \int dz\, K(y,z)\, f(z)$$

$$= \int dz \underbrace{\left(\int dy\, L(x,y)\, K(y,z) \right)}_{D(x,z)} f(z)$$

$$f(x) = \int dz \cdot D(x,z)\, f(z) \sim \sum_z \delta_{xz} f_z$$

$$\Downarrow$$

$$D(x,z) \sim \delta_{xz}$$

D: Dirac-féle

delta fv.

↳ identitás transzformáció

— az identitás transzformáció magja a Dirac-féle delta

reguláris integráltransf.: van inverztransf.

szinguláris —||— : nincs inverztransf.

Fourier-transf.: $f(x) \nearrow e^{i\omega_k t}$, $\searrow e^{i\omega t}$, $\downarrow$ a bejövő jelet szét~~bontom~~ kül. komponensekre, és ezeket külön elemzem

ált.: ált. Fourier-tr.: nem kell e-re és sin, cos-ra bontjuk szét a jelet

5. óra

Ism:

tetsz. fv. → egyszerű fv-ek lineárkomb.

$$\sim \underline{v} = \sum_k v_k \underline{e}^{(k)}$$

$$f(t) = \sum_k c_k \cdot \underbrace{\varphi_k(t)}_{\text{egyszerű fv.}}$$

1.) periodikus fv-ek $f(t+T) = f(t)$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = a_0 \cdot 1 + \sum_k a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_1 t)$$

Hogy kapjuk meg ezeket?

$v_k = (v \cdot e^{(k)})$ vektoroknál

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\cos(k\omega_1 t)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, f(t)\sin(k\omega_1 t)$$

2) Komplex alak:

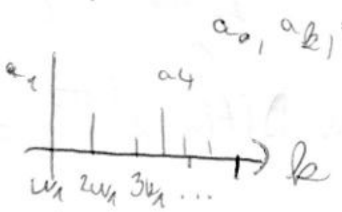
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik} \quad c_k \in \mathbb{C}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

~~3) Nem periodikus~~

$a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$



a fv. spektruma

↓

milyen frekvenciák, és ott mekkorák az e.hók

3) nem periodikus

~~$\left(\Delta w = w_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$ $k \to \infty$~~ $\Delta w = \frac{2\pi}{T} = w_0 \to \infty$

$\frac{c_k}{\Delta w} \to F(w)$ (véges értékhez tart, ha $T \to \infty$)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot F(w)\, e^{iwt}$$ → most folytonosan ∞ sok e.h. van

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-iwt}$$

↓

ugyanannak a jelnek (f(t)) időtart. beli és w tart. beli reprezentációja

1) Miért jó ez? A bázisfv.-ekkel kell elvégezni a műveleteket, erre vissza lehet vezetni a sima fv. művele~~teket~~. Pl. deriválás!!

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw\, F(w)\, e^{iwt}$$

ez nem függ t-től

$$\dot{f}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diff. operátor}}}{D} f(t) = D \int dw \left(F(w)\, e^{iwt}\right) = \int dw\, D\left(F(w)\, e^{iwt}\right) =$$

$$= \int dw \underbrace{\left(F(w) \cdot iw\right)} e^{iwt}$$ → ez az $\dot{f}$ Fourier-transzformáltja ~~(lás)~~

$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega)$

↓

Fourier-transzf.

$\mathcal{F}(\dot f) = i\omega F(\omega)$

$\mathcal{F}(\ddot f) = (i\omega)^2 \cdot F(\omega)$

$\vdots$

$\mathcal{F}(f^{\cdots}) = (i\omega)^n F(\omega)$

$\dddot f - 2\ddot f + 7\dot f - 42f = D^3 f - 2D^2 f + 7Df - 42f =$

$= \underbrace{(D^3 - 2D^2 + 7D - 42)}_{L(D)} f = L(D) f$

$L(D)$ → D polinomja (operátor)

$\mathcal{F}(L(D)f) = [\underbrace{(i\omega)^3 - 2(i\omega)^2 + 7(i\omega) - 42}_{\Downarrow L(i\omega)}] F(\omega) \doteq L(i\omega) \cdot F(\omega)$

a bonyolult deriváltkombináció Fourier-transzformáltját is tudom

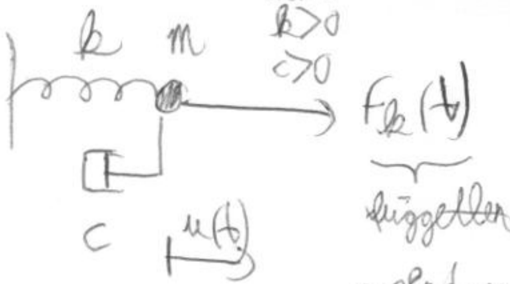
$\dddot f - 2\ddot f + 7\dot f - 42f = 0 \xrightarrow{\mathcal{F}} L(i\omega) F(\omega) = 0$

$\cancel{\mathcal{F}(L(i\omega))}$

$L(i\omega) = 0$, ha $F(\omega) \neq 0$

- áll. e.h.-ós
- hom.
- lin.
- köz.

m>0
k>0
c>0



független a rendszer állapotától

$$m\ddot{u}(t) = \Sigma F = -ku(t) - c\cdot\dot{u}(t) + f_k(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f_k(t) \quad /\cdot\frac{1}{m}$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}f_k(t)$$

$$\beta := \frac{c}{m} \quad \omega_0^2 := \frac{k}{m} \quad f(t) := \frac{f_k(t)}{m}$$

$$\boxed{\ddot{u} + \beta\cdot\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)}$$

- köz
- másodr.
- lin
- áll. eh.
- inhomogén

$$u(t) = \int d\omega \; U(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$
$$f(t) = \int d\omega\cdot F(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$
} ilyen alakban írjuk fel a 2 fv.-t

$$\underbrace{L(D)}_{\left(D^2+\beta\cdot D+\omega_0^2\right)} u(t)$$

de már láttuk, hogy

$$L(D)u(t)=\int d\omega\, \underbrace{L(i\omega)\,U(\omega)}\cdot e^{i\omega t} \overset{\text{legyen}}{\overset{!}{=}} f(t)=\int d\omega\, \underbrace{F(\omega)}\, e^{i\omega t}$$

akkor egyezik meg a 2 fv., ha Fourier-eh'ik megegyeznek (⇔ 2 vektor egy., ha komponenseik is megegyeznek)

$$\Downarrow$$

$$L(i\omega)\,U(\omega)=F(\omega)$$

$$U(\omega)=\frac{f(\omega)}{L(i\omega)}$$

$$\underline{\underline{u(t)}}=\int d\omega\,\frac{f(\omega)}{L(i\omega)}\,e^{i\omega t}=\underline{\underline{\int d\omega\left(\frac{f(\omega)}{(i\omega)^2+2\beta i\omega+\omega_0^2}\right)e^{i\omega t}}}$$

elméletileg megoldottuk a problémát, csak a végén az integrált még nem tudjuk elvégezni (→ komplex fv. tan)

$$\Delta\phi(\underline{r})=\rho(\underline{r})$$

↳ ez is egy lin. diffegy., csak többváltozós

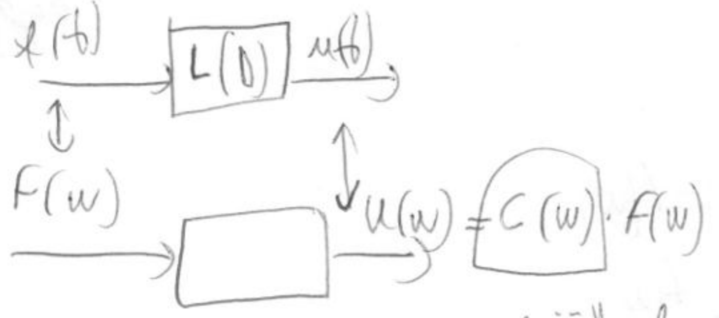
Fourier-trafó általánosítása → többvált. esetén síkhullám mo.:

$$e^{i(k_1x+k_2y+k_3z-\omega t)}$$

$$u(t) = \int d\omega \, \frac{F(\omega)}{L(i\omega)} \, e^{i\omega t}$$

Legyen $C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$ átviteli fv.

$$L(D)\, u(t) \overset{!}{=} f(t)$$



a lejövő fv.-t

egy ω-tól függő átviteli fv-el szorozza le

↙

van erősítés
és fáziskésés
a kül. ω-kra
(exp. rész → fázis
e.hatv → erősítés)

pl. elektronikában

$$f(t) = \int d\omega \, F(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt \, f(t) \, e^{i\omega t}$$

$$U(\omega) = C(\omega) \cdot F(\omega)$$

$$u(t) = \int d\omega \cdot U(\omega) \cdot e^{i\omega t} = \int d\omega \, C(\omega) \, F(\omega) \cdot e^{i\omega t} =$$

$$= \int d\omega \, C(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int \circledast$$

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

$\underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$

l-re összegzünk, (k, m) fv-e

$$u_k = \sum_l A_{kl} v_l = \sum_l A_{kl} \sum_m B_{lm} u_m = \sum_m \Big(\overbrace{\sum_l A_{kl} B_{lm}}\Big)\, u_m =$$

más összegző index kell

$$v_l = \sum_k B_{lk} u_k = \sum_m B_{lm} u_m \qquad = \underbrace{\sum_m D_{km} u_m}$$

hasonlóan fv.-ekre is új „összegzőindex" (int. változó) kell ✱

(mert t itt szerepel

$$✱ = \int d\omega\, C(\omega) \left(\frac{1}{2\pi} \int dT\, f(T)\, e^{-i\omega T} \right) e^{i\omega t} =$$

$$= \int dT \Big(\underbrace{\int d\omega \frac{1}{2\pi} C(\omega) \cdot e^{i\omega(t-T)}} \Big) f(T) =$$

$G(t-T) = G(T,t)$ $\quad$ (t,T) fv-e,

Green-fv. $\quad$ ω-ra összegzünk

$$= \int dT\, G(t,T) \cdot f(T) = \int dT\, G(t-T)\, f(T)$$

$$u(t) = \int dT \boxed{G(t-T)}\, f(T)$$

a Green-fv. az átviteli fv. vissza Fourier transzformáltja

átviteli fv. $\quad$ átviteli fv.

$G(t-T) \;x\; C(\omega)$

Green $\quad$ Fourier

<u>Green-fv.</u>: hirtelen impulzusszerű behatásra mi lesz a rendszer válasza ha $(T = 0)$

$$u(t) = \int C(\omega) \cdot f(\omega)\, d\omega$$

(inputs) eredetű gerjesztés

input $f(t)$

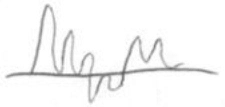
$$u(t) = \int G(t-T) \cdot f(t)\, dt$$

pl.

↗ csillapított rezgés
a rezgő rendszer:
Green-fv.-e

de ha nem 1 „rúgás" van, hanem sok:

$G(t-T)$
~~$G(\omega)$~~ → mekkora lesz a rúgás nagysága adott ~~$(\omega-\omega_0)$~~ T időpillanatbeli rúgásra



$$\boxed{u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\,T\;G(t-T)\,f(T)}$$

→ az összes időbeli impulzusra összegzünk

T ∞-be is megy → a jövőbeli jelet is megérezzük?

ez sértené a kauzalitást

↓

de a Green-fv. 0, ha $\ominus$ az argumentuma:

$t-T<0$

$\boxed{t<T}$ esetén 0 a Green-fv.

↓

a Green-fv. kauzális

Visszatérve a vektorokra

$$u_k=\sum_m \overrightarrow{\underbrace{\delta_{km}}\,u_m}=\sum_l A_{kl}B_{lm}=\underline{\underline{E}}$$

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\underline{E}\ \Rightarrow \text{inverzek}$$

$$f(t)=\int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int d\tau \cdot f(\tau) e^{-i\omega\tau}$$

$$f(t)=\int d\omega \left(\frac{1}{2\pi}\int d\tau\, f(\tau)\, e^{-i\omega \overset{\tau}{\cancel{t}}}\right) e^{i\omega t} =$$

$$f(t)=\int d\tau \left(\underbrace{\int d\omega\, \frac{1}{2\pi}\, e^{i\omega(t-\tau)}}_{D(t,\tau)}\right) \cdot f(\tau)$$

3 változó t, τ, ω ↗ közepén ω-ra összegzek

$$f(t)=\int d\tau \cdot \underbrace{D(t,\tau)}\, f(\tau) \approx u_k = D_{kl} u_l$$

kronecker-delta
folytonos kiterjesztése

↓

„folytonos" mátrix

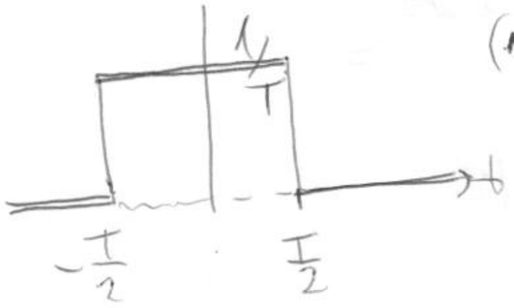
Dirac-féle delta

$\delta(t-\tau)$

↓

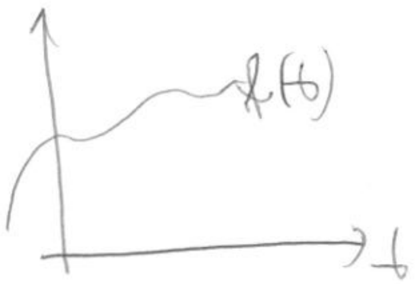
ilyennek kéne lennie

A Dirac-delta fv



(nem folyt. fv.)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < -T/2 \\ 1/T & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & t > T/2 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta_T(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, \delta_T(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, f(t)\, \frac{1}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)$$

↳ „kiablakozzuk" ezt a részt"

a fv.
$\frac{1}{T}\int \ldots$ → átlaga a T hosszú int.-on

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, f(t) = f(t_0)$$

$$-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$$

$$\lim_{T\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cdot \delta_T(t)\right) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \underbrace{\left(\lim_{T\to 0} \delta_T(t)\right)}_{\delta(t)} = f(0)$$

nem szabad elvileg felcserélni az integrálást és a lim-t (az integrál elvégzése utánkéne venni a lim-t)

mert a belső lim-nek nincs véges h.é.-e

$$\boxed{\int_{\infty}^{\infty} dt\, f(t)\cdot\delta(t) = f(0)}$$

1 pontban van értelmezve (0), ott ∞ az értéke, $\int \delta(t) = 1$

valóságban sosincs ∞ kicsi szélességű impulzus, de ha a mérési időhöz képest nagyon kicsi, használhatjuk a Dirac-deltát

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\,\delta(t-a) = f(a)$$

páros „fv."

→ a dirac-delta az identikus transzformáció folytonos megfeleltetése

(~~inner vezé~~)

összefoglalás:

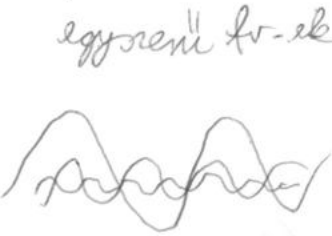
$$f(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$
$$f(t) = \int d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau)$$
} 2-féle módszer

!!

Fourier ~~Dirac~~ Green

↙ sin-ok és cos-ok ~~(lesz)~~ az egyszerű fv-ek

↓ Dirac-delták az egyszerű fv-ek



$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow C(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

adott rezgés bemegy

kényszerrezgés kijön (kényszerrezgések lineárkomb.-ja)

$$\delta \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow G$$

most δ az egyszerű fv.

↑

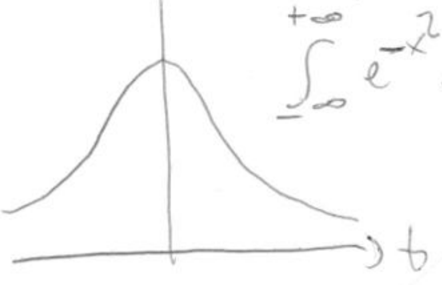
imp. szerű rúgás bemegy (illetve ezek lin.k.-ja) → Green-fv. a válasz a dirac-deltára ↓ ezek lin.komb.-jára a válasz

Gyakorlás:

e^{-t^2/T^2}

Megjegyzés az integrálhoz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$



Gauss - görbe

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-t^2/T^2}\cdot e^{-i\omega t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-\frac{t^2}{T^2}-i\omega t}=\frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\frac{1}{T^2}\left(t^2+i\omega T^2 t\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\frac{1}{T^2}\left[t^2+i\omega T^2 t+\left(i\omega\frac{T^2}{2}\right)^2-\left(\frac{i\omega T^2}{2}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int dt\cdot e^{-\frac{1}{T^2}\left[\left(t+\left(\frac{i\omega T^2}{2}\right)\right)^2+\frac{\omega^2T^4}{4}\right]}=\frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\frac{\left(t+\frac{i\omega T^2}{2}\right)^2}{T^2}-\frac{\omega^2T^2}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\omega^2T^2}{4}}\cdot\underbrace{\int dt\cdot e^{-\frac{(t-t_1)^2}{T^2}}}_{K}\qquad\leftarrow\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-a)^2}=\sqrt{\pi}$$

$$F(\omega)=C\cdot e^{-\frac{T^2}{4}\omega^2}=Ce^{-\omega^2/\Omega^2}$$

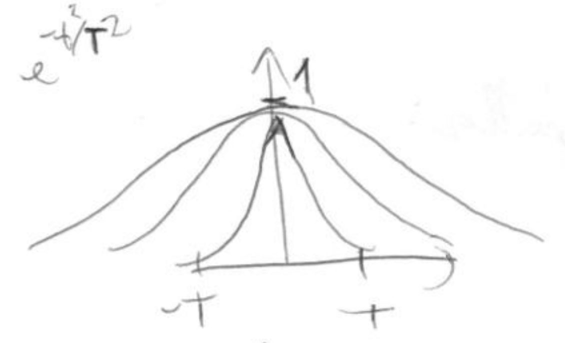
de most komplexbe toltuk el!

mégis $\int=\sqrt{\pi}$ lesz

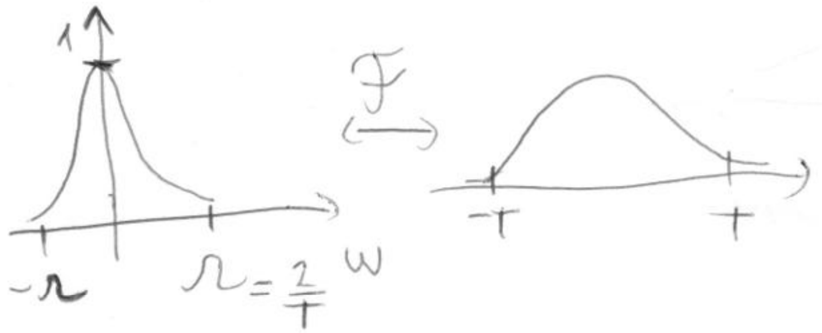
ahol $\Omega=\frac{2}{T}$

↓

a Gauss-görbe Fourier-transzformáltja is Gauss-görbe



Fourier tr



- minél keskenyebb az eredeti, annál szélesebb a Fourier-tr.

de:
↳ Minél több kül. cos-t adunk össze, annál keskenyebb lesz

$\Delta\omega\Delta t \approx 1$ → Heisenberg-féle hat. lansági rel.

hely ↔ impulzus : ezek egymás Fourier-transzf.

⇓

ha az egyik keskeny, a másik széles

Komplex fv. tan

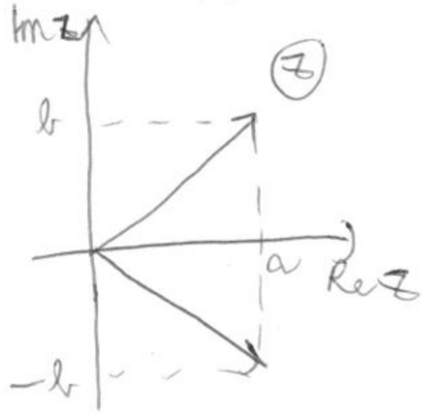
0) $i^2=-1$

$z=a+ib$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$

$a=\mathrm{Re}\,z$

$b=\mathrm{Im}\,z$

↓ nem vezet ki művelet innen (de 0-nak itt sincs inverze)



$z^*=a-ib$

- ökölszabály

csúnya képlet: ∀ i → (−i)-re cseréljük → konjugált

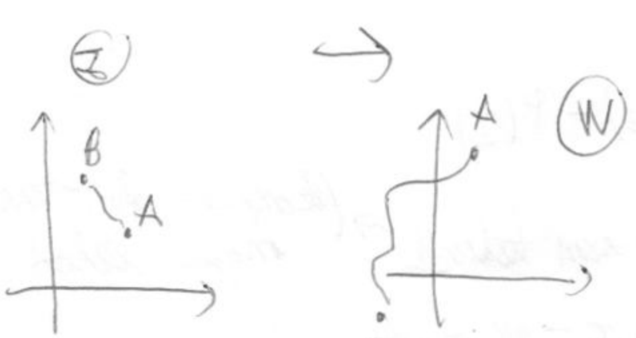
1) komplex fv.

$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

↓

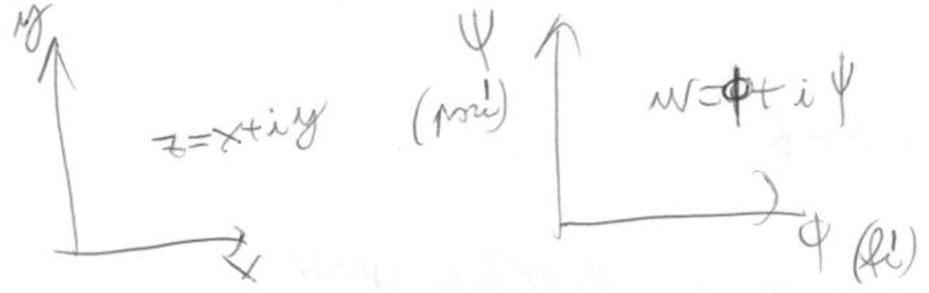
ezt nem tudjuk ábrázolni (4D)

(valós vált. → komplex)



pontonként próbáljuk ~~őket~~ megfeleltetni őket a 2 síkon úgy is tekinthetem, hogy 2db 2változós fv-ünk van

$$(\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z) \rightarrow (\mathrm{Re}\,w, \mathrm{Im}\,w)$$

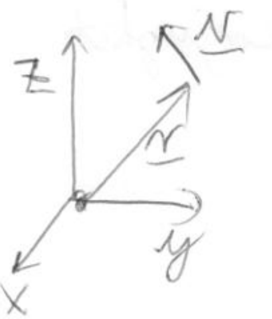


$$w(z)=\Phi(z)+i\Psi(z)=\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

~ vektormező

$\underline{v}(\underline{r})$

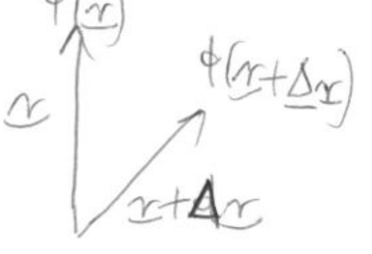
$v_1(x,y,z)$
$v_2(x,y,z)$
$v_3(x,y,z)$



2) Ismétlés:

a) skalármező

$$\phi(\underline{r})=\phi(x,y,z)$$



$\phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\phi(\underline{r})$

↑ most nem tudunk → (komplex fv.-ténél majd lehet)

$\Delta\underline{r}$-el osztani!

↓

$\phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\phi(\underline{r}) \simeq \underline{g}\cdot\Delta\underline{r}$ ↗ gradiens (vektor) grad $\phi = \nabla\phi$

$$g = \underline{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$ → 3 változós fv.-nek tekintem

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k} = \partial_k$$

$$\underline{w}(r) = \underline{\nabla} \times \underline{v}(r) = \text{rot}\,\underline{v}$$

$$w_k = \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm}\, \partial_l v_m$$

Pl.: $\underline{v} = \text{grad}\,\phi \quad v_k = \partial_k \phi$

$$w_k = \sum_k \sum_m \varepsilon_{klm}\, \partial_l \partial_m \phi \underset{\nearrow}{=} 0$$

Young-tétel miatt $(\partial_l \partial_m = \partial_m \partial_l)$

$$\text{rot grad}\,\phi = 0$$

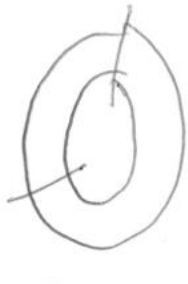
$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi = 0$$

Ha egy vektormező rot-a 0 → van gradiens

Vonalintegrállal ki lehet számítani a —||— -t

(!)
Egyszeresen összefüggő tartományon

1-szeresen
össz.
tart.



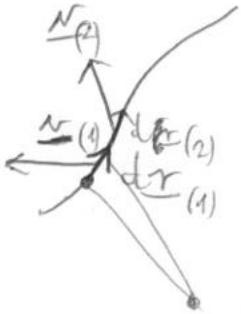
2-szeresen
összefüggő
tart.

n-szeresen
összef.

↓

komplex. fv. tannál erre figyelni kell!

$$\phi = \int_{G} v(\underline{r})\, d\underline{r}$$



általában a vonalintegrál a görbétől
is függ

kivéve, ha potenciálos a mező

↓

ilyenkor csak a végpontoktól függ

→ konzervatív erőtér (pl. grav. → ϕ = grav. pot.)

$$\int_{①}^{②} \underline{v}\, d\underline{r} = \phi(2) - \phi(1)$$

$$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = 0$$

$\underline{\nabla}\,\underline{v} = \text{div}\,\underline{v} = \sum_k \partial_k v_k$

$\text{div}(\text{rot}\,\underline{v}) = 0$

↑

ez a feltétele, hogy rotációs legyen egy vektormező!! → ha div=0, akkor az

$\underline{a}\,(\underline{b}\times\underline{c})$

$(a,b,c)=0$, ha 2 ugyanaz $\rightarrow \overbrace{(\underline{\nabla}, \underline{\nabla}, \underline{v})}^{\text{div}(\text{rot}\,\underline{v})} = 0$

$\underbrace{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\phi)}_{\text{div}(\text{grad}\,\phi)} = \nabla^2\phi = \Delta\phi$ (Laplace ϕ)

$\Delta\phi = \underline{\nabla}(\nabla\phi) = \sum_k \partial_k (\nabla\phi)_k = \sum_k \partial_k \partial_k \phi$

↓

görbe koordinátarendszerben a Laplace rondább (pl. henger, gömbi)

Ezt lehet vektormezőre is alkalmazni

- $\underline{u} = \Delta\underline{v}$

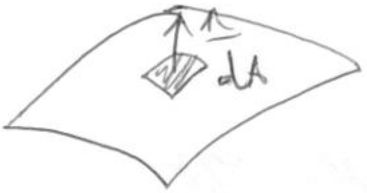
$u_k = \Delta(v_k)$ → Ez is csak Descartes-ban igaz

↳ vektormezőben más lesz a Laplace !!!

- $\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{v}) = \text{rot}\,\text{rot}\,\underline{v}$
- $\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\,\underline{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\underline{v})$

$\left.\right\}\ \boxed{\text{grad}\,\text{div} = \text{rot}\,\text{rot} + \Delta}$

$\int \underline{v}\, d\underline{F}$ felületi integrál (fluxus)



$d\underline{F} = \underline{n}\, dA$

$\int \underline{v}\, dV$ térfogati integrál

Gauss-tétel:

$\oint \underline{v}\, d\underline{F} = \int (\mathrm{div}\, \underline{v})\, dV$

Stokes-tétel:

$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int \mathrm{rot}\, \underline{v}\, d\underline{F}$

úgy kell ráilleszteni a felületet, hogy a normális és $d\underline{r}$ jobbkezes rendszert alkosson

6. óra

komplex fv. tan → Farkas-sorozat

$\mathbb{C} \to z = x + iy$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\cdot e^{iy} = e^{x}\left(\cos \overset{\text{radián}}{\overset{\downarrow}{y}} + i\sin y\right)$$

$\varphi \in \mathbb{R}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{y}\cdot e^{-ix}}{2i} =$$

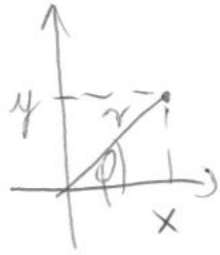
$$= \frac{(\cos x + i\sin x)\,e^{-y} - (\cos x - i\sin x)\,e^{y}}{\underset{\overset{\nearrow}{\cdot\frac{1}{i} = (-i)}}{2i}} = (\dots) + i(\dots)$$

2 fv. nincs értelmezve mindenhol ℂ-ben:

- $\ln z$ • $\frac{1}{z}$ → 0-ban ezek nincsenek értelmezve

$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}$

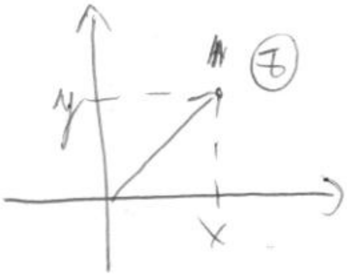
$\ln z=\ln r+\ln e^{i(\varphi+2k\pi)}=\ln r+i(\varphi+2k\pi)$

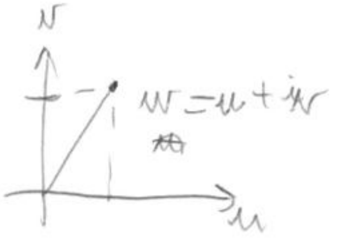


$k\in\mathbb{Z}$

⇓

több értékű fv. (1 helyen több értéket vesz fel)





→ így tudjuk ábrázolni (2 graf.-on)

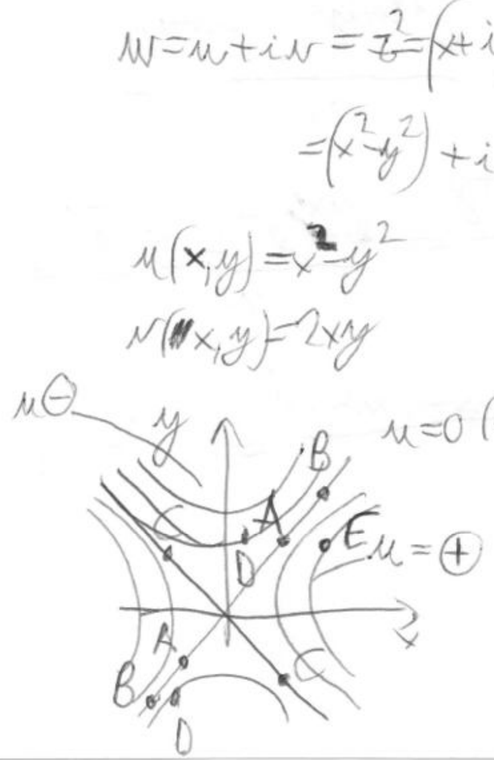
pl. $w=z^2$

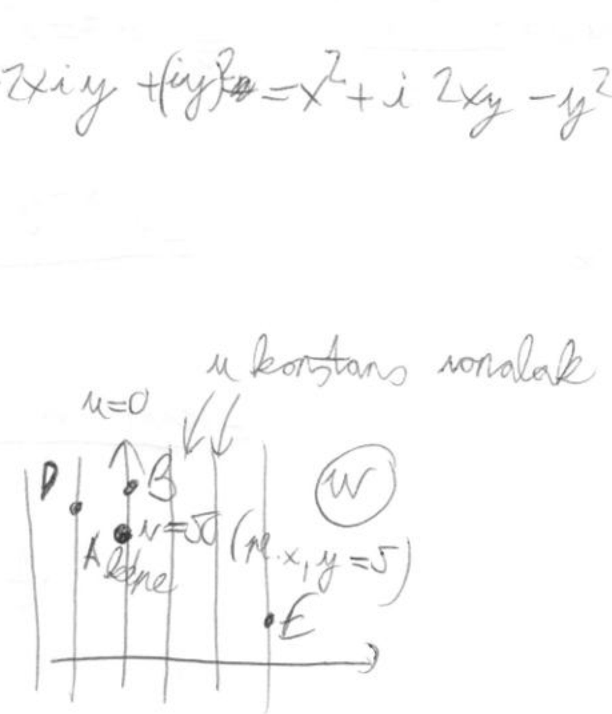
$w=u+iv=z^2=(x+iy)^2=x^2+2xiy+(iy)^2=x^2+i\,2xy-y^2=$

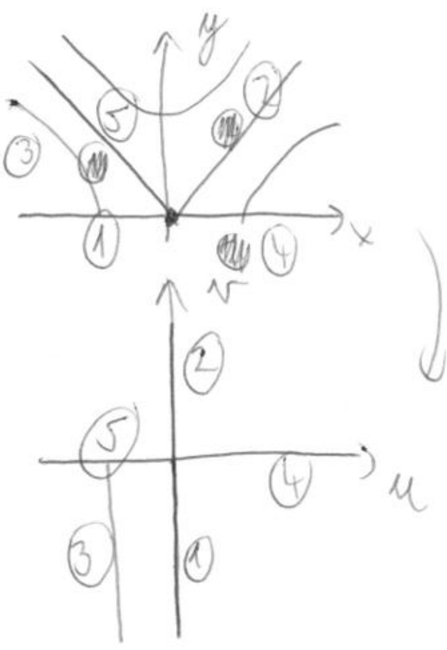
$=(x^2-y^2)+i(2xy)$

$u(x,y)=x^2-y^2$

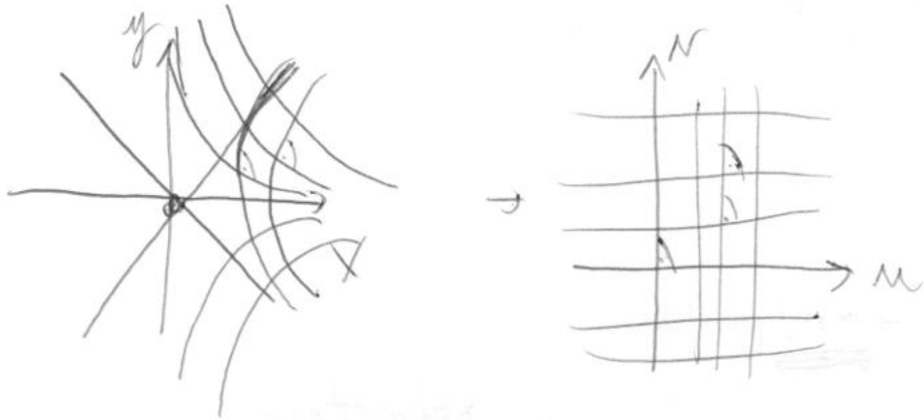
$v(x,y)=2xy$







olyan, mintha
valamilyen transzformációval
elforgatnánk ~~[illegible]~~, kicsavarnánk
őket



<u>konform</u> leképezés → <u>szögtartó</u> leképezés a legtöbb pontban

↳ különleges pontok: néhány pontban nem marad meg a szög

$z = r\cdot e^{i\varphi}$

$w = z^2 = r^2\cdot e^{i2\varphi} \longrightarrow$

2-szeres hossz és szög

~~szinguláris~~ konform
= egy komplex fv. leképezést valósít meg, kivéve néhány különleges (szinguláris) pontot
↓
egyedi

$w = z^2$

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2xy \end{aligned}} \rightarrow y = \frac{v}{2x}$$

$\downarrow$

$$u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2} \quad / \cdot 4x^2$$

$$4x^2 u = 4x^4 - v^2$$

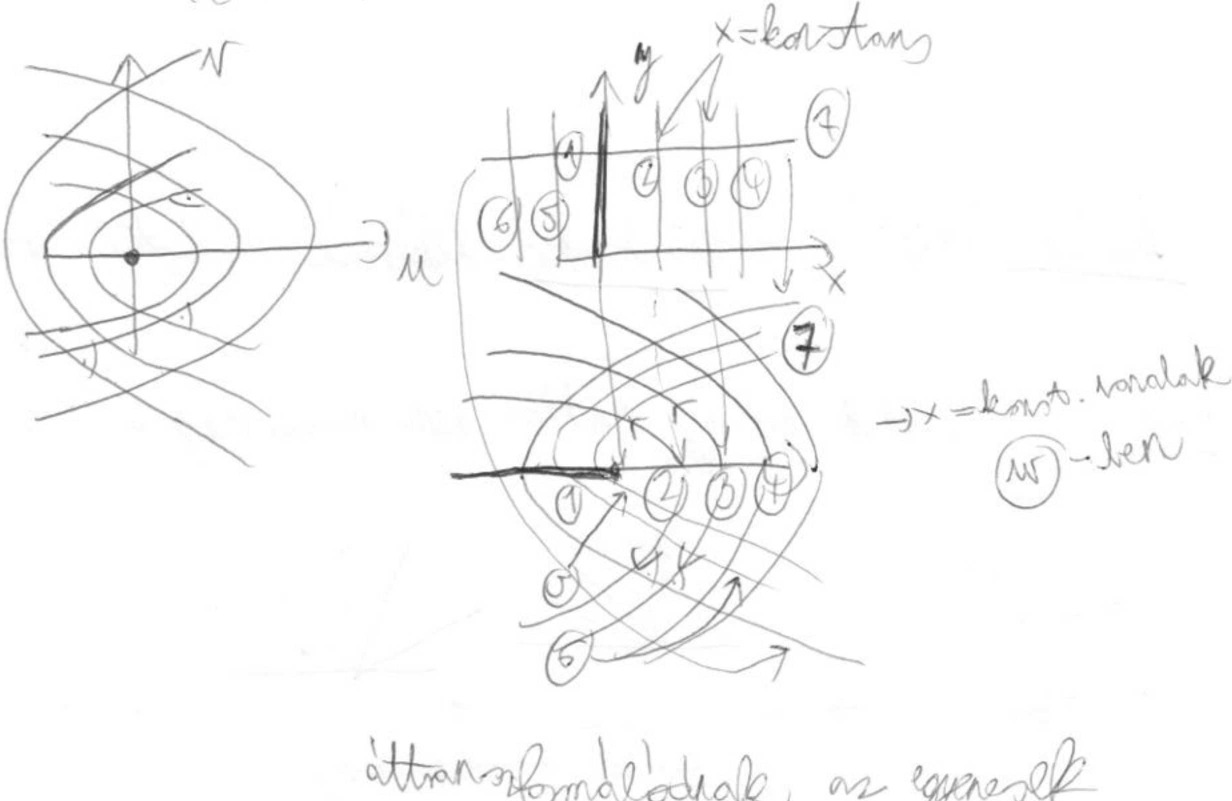
$\downarrow$ másodfokú egy.

$x(u,v)$

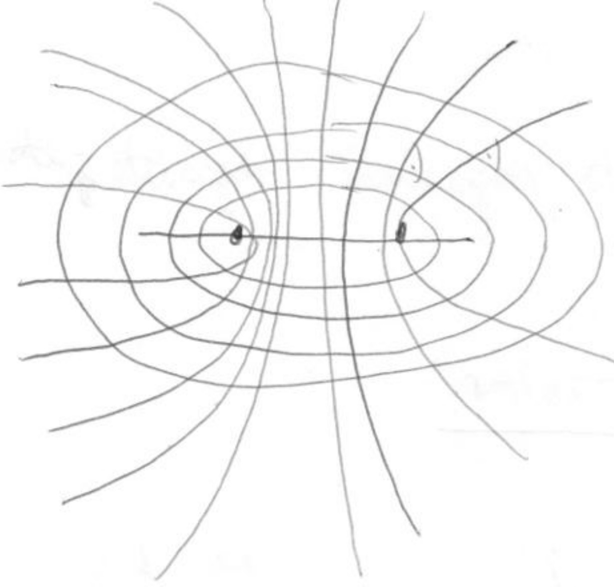
$v^2 = 4x^2 - 4x^2 u$

$x = c$ (konst.)

$v^2 = 4c^2 - 4c^2 u \rightarrow u(v)$ parabola



áttranszformálódnak az egyenesek



→ ez is egy hálózat

↓

minden ponton 1 ellipszis és 1 hiperbola megy át

↕

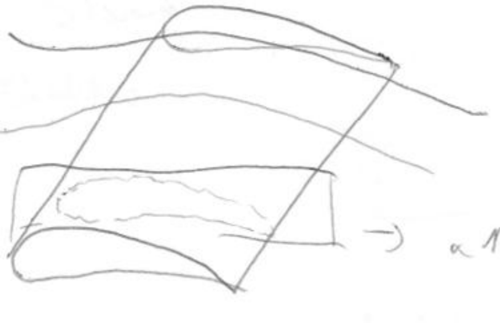
a # minden pontján 1 vízsz., 1 függ. vonal megy át

↓

Mikor van erre szükség?

pl. 2 ponttöltés el. tere ilyen

vagy



→ a metszetek ugyanazok

rep. gépszárny

↓

ezt egy komplex síknak tekintem

↓

milyen komplex fv. írja le az áramlást? 

← a szárny nagy részén ez a fv. írja le az áramlást

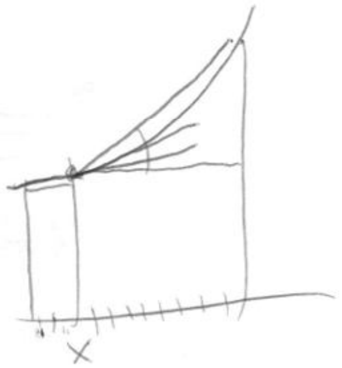
↓

a felhajtóerőt is így számolják

↓

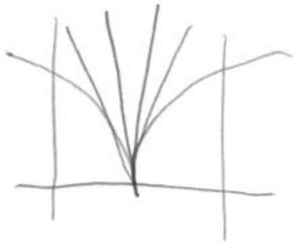
Vagyis komplex fv.-t, mint „rajzolási segédlet"-et alkalmaztuk.

Differenciálás komplex fv.-tanban:

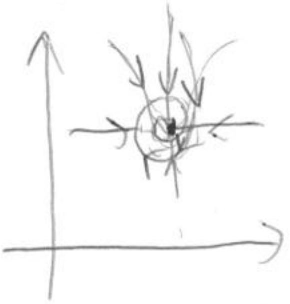


↓
ε lehet ⊕⊖

nincs h.é.:



↓
egy fv. akkor diffható, ha minden ε sorozatra közelít vmihez a meredekség



$$f'(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}}\right)$$

→ akárhogy tartunk egy ponthoz, ~~határérték~~ is tart a h.é.-hez

⇓

Ez nagyon erős feltevés ⇒ komplexben elég kevés fv. deriválható

↳ különleges tulajdonságai vannak ezeknek a diffható fv-eknek

!! **Tétel:**

Ha egy fv. diffható egyszer 1 pontban komplexben, akkor ∞-szer diffható ugyanabban a pontban!

↑ ez az erős áll. (Nem biz.)

(valósban ez nem igaz:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & x\geq 0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ - & x=0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$$)

↓

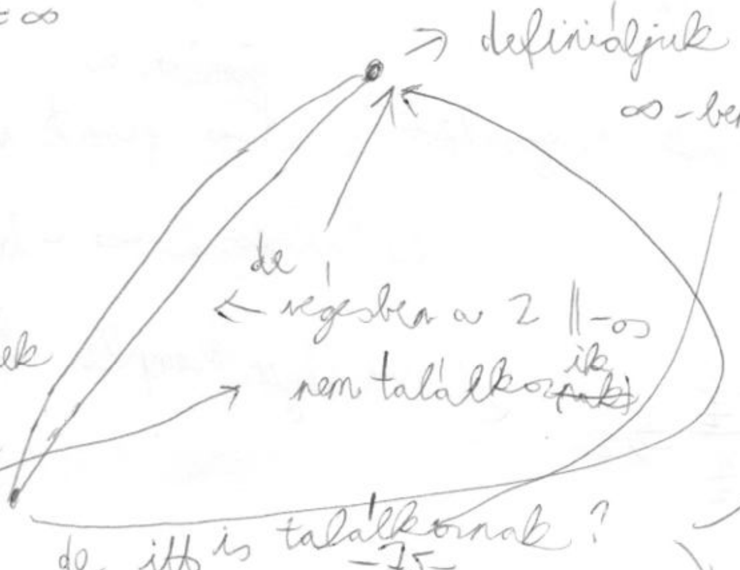
komplex:

1 adott pontban → nem diffható
↘ ∞-szer -||-

Mik vannak értelmezve komplex fv-eknél?

pl. $\frac{1}{\infty} \overset{?}{=} 0$, $\frac{1}{0} \overset{?}{=} \infty$

bmely 2 egyenesnek 1 metszéspontja van



↓
nem ugyanaz → 2 ponton át húzható egyenes

⇓

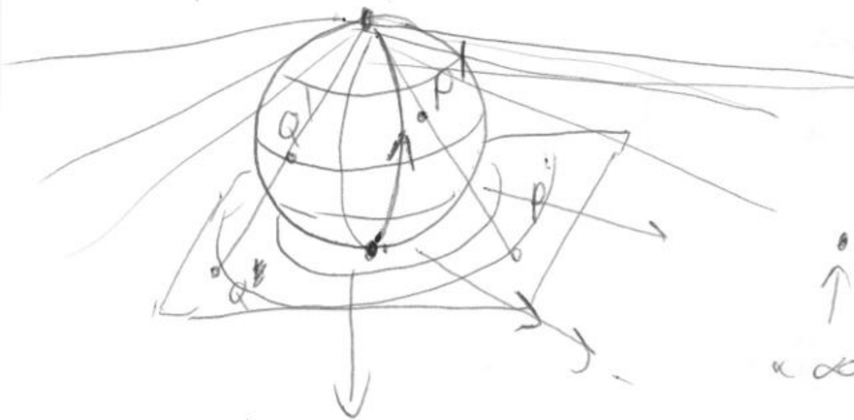
~~vég~~ ∞ távoli pontokat összekötő
∞ távoli egyenes

∞ sok ∞ távoli
pont van

↓

<u>projektív geometria</u>

Komplex síkon: 1 db ∞ távoli pont van



a ∞ távoli pontoknak
1 db pont (É-sark) felel

origó
↓
D → É:

komplex síkon u.ez a
gömbre 0 → ∞
(origó)

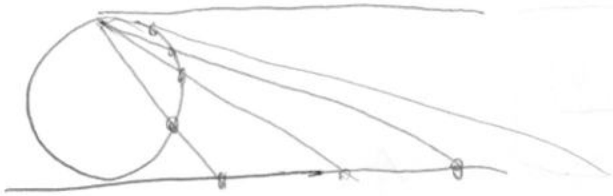
gömbön a
Ha elforgatjuk a gömböt: a ∞ pont végesbe kerül,
és 1 véges a ∞-be

$\frac{1}{z-3}$

↙ van ilyen komplex fv.

$t=\frac{1}{z}$ $\frac{2z-3}{z+1} = \frac{2-\frac{3}{z}}{1+\frac{1}{z}} \Rightarrow 2$

→ Gauss-féle komplex számgömbnek nevezzük ezt a gömböt, aminek pontjai megfelelt.-hetők a komplex sík pontjainak



Differenciálás

~~Pl.~~

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} \right)$$ ~ 2 változós fv-ek deriválása

$\forall \varepsilon_1 .. \varepsilon_n \to 0$

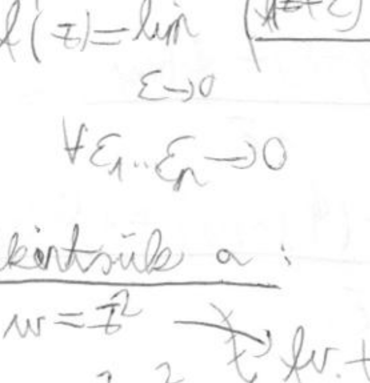
(csak most 2 db 2 vált.-s van)

(pl. tekintsük a:

$w = z^2 \longrightarrow$ fv.-t (lsd. előbb)

$u = x^2 - y^2$

$v = 2xy$)



menjünk az adott pontba $y =$ áll egyenesen

$z = x + iy$
$w = u + iv$

$w = f(z)$
$u = \varphi(x,y)$
$v = \psi(x,y)$

$$f'(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right]=\lim\frac{f(x+\varepsilon,y)-f(x,y)}{\varepsilon}=$$

$$=\lim\left(\frac{\phi(x+\varepsilon,y)+i\psi(x+\varepsilon,y)]-[\phi(x,y)+i\psi(x,y)]}{\varepsilon}\right]=$$

$$=\lim\left[\frac{\phi(x+\varepsilon,y)-\phi(x,y)}{\varepsilon}+i\frac{\psi(x+\varepsilon,y)-\psi(x,y)}{\varepsilon}\right]=$$

$$=f'(z)=\boxed{\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x}}$$

- x = konst. egyenesen:

$z\to x+i(y+\varepsilon)$

$$f'(z)=\lim\frac{f(z+i\varepsilon)-f(z)}{i\varepsilon}=\lim\frac{f(x,y+\varepsilon)-f(x,y)}{i\varepsilon}=$$

$$=\lim\frac{(\phi(x,y+\varepsilon)+i\psi(x,y+\varepsilon)]-(\phi(x,y)+i\psi(x,y))}{i\varepsilon}=$$

$$=\lim\frac{\phi(x,y+\varepsilon)-\phi(x,y)}{i\varepsilon}+\lim\frac{\psi(x,y+\varepsilon)-\psi(x,y)}{\cancel{i}\varepsilon}\cancel{i}=$$

$$=(-i)\cdot\lim\frac{\phi(x,y+\varepsilon)-\phi(x,y)}{\varepsilon}+\lim\frac{\psi(x,y+\varepsilon)-\psi(x,y)}{\varepsilon}=$$

$$\boxed{=(-i)\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}}$$

- Ha $f(z)$ diffható a h.é. egyértelmű!:

$$f'(z)=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}\overset{!}{=}\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\phi}{\partial y}$$ → egyenlőek, ha a valós és Im részek megegyeznek

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}} \qquad \boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}}$$

Cauchy - Riemann $\overset{\text{diff.}}{\vee}$ egyenletek

Áll: ha ez a 2 teljesül, akármilyen módon közelítve az adott pontba, $f(z)$ diffható $\Rightarrow$ ∞-szer diffható

Spec. eset, pl.:

$\Phi = x^2 - y^2 \qquad \Psi = 2xy$

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 2y$ ✓

pl.:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(e^{iy}) = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{\Phi(x,y)} + i\underbrace{(e^x\sin y)}_{\Psi(x,y)}$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) = e^x\cos y$

$\parallel$ ✓

$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y) = e^x\cos y$

$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -e^x\sin y$ $\updownarrow$ ✓

$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^x\sin y$

Ökölszabály:

(fv-eket)

Ha képlettel fel tudom írni a fv-t, akkor teljesülnek a Cauchy-Riemann d.e.-ek (néhány pont kivételével)

↑
(itt. van nehéz szétszedni valós és képzetes részekre a komplex fv-eket)

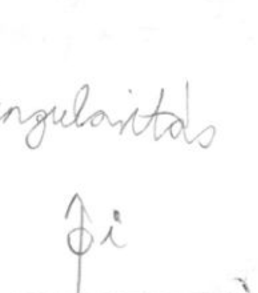
Definíciók:

- Analitikus pont: a fv. ~~egy~~ az adott pontban diffható
- Minden pontban diffható fv. = analitikus fv.
  (? ilyen van: expon., hatványfv.)
- Tartományon analitikus fv.: egy tart ∀ pontjában diffható
- Ha megszámlálhatóan ~~véges~~ ∞ sok pont kivételével analitikus fv. = meromorf fv.
  ↳(vagy véges)

Pl. $\frac{1}{z}$ $z=0$ → szingularitás

$\frac{1}{z^2+1} \to z^2=-1$

$z=\pm i$



$\frac{1}{z^n+a_k z^{n-1}+\ldots}$ → n pontban nincs értelmezve (a nev.-nek ennyi gyöke van)

↳ Nevező zérushelyei: pólusok

$$\frac{z^3-5z+4}{z^2-(9+i)z+(3+i)} \quad \begin{matrix} \to 3 \text{ z.h.} \\ \to 2 \text{ pólus} \end{matrix}$$

Zérus-pólus térkép

o: pólusok

x: zérushelyek

(pl. pólusok, ...)

Áll: Elég megadni néhány pontban a fv. értékét,) ebből tetszőleges fv.-t elő tudunk állítani.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad \leftarrow \text{I. } \frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

(C.-R. de.-ek)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad \leftarrow \text{II. } \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

↑ Young-tétel miatt (2-szer diffható)

$$\boxed{\Delta\phi=0}$$

↑ Laplace

$$\frac{\partial}{\partial y}\text{I}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\text{II}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$0=\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\Delta\psi=0}$$

- harmonikus fv.: a Δ fv. $= 0$

- harmonikus pár:

2 harmonikus fv., melyek kielégítik a Cauchy–Riemann d.e.-eket is.

$\Updownarrow$

difftható komplex fv valós és komplex része harmonikus párt alkotnak

$\uparrow$

Áll: ha „képlettel" leírható, akkor harmonikus párt alkotnak

$\downarrow$

(nem mindig igaz, pl.

$w(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = u + i\cdot 0$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$)

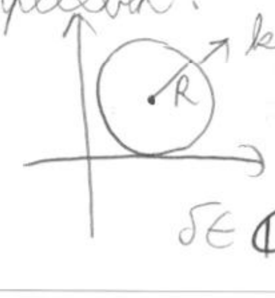
$\downarrow$

„rendes" fv-ekre kell gondolni, pl. sin, cos, exp, ...

Fv. ~~k~~érték közelítése Taylor-sorral:

1) $f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\delta + \frac{1}{2}f''(x)\cdot\delta^2 + \frac{1}{6}f'''(x)+\delta^3 + \ldots \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)\cdot\delta^n + \ldots$

2) komplexben:



→ konvergenciahalma~~z~~zon belül

$f(z+\delta) = f(z) + f'(z)\cdot\delta + \ldots \frac{1}{n!}f^{(n)}(z)\,\delta^n + \ldots$

$\delta \in \mathbb{C}$

Ha $|\delta| < R$ → konvergens a ~~A~~ Taylor-sor, és

$$\text{T.-sor} \xrightarrow[\text{(tart)}]{} \text{fv. érték}$$

Konvergenciakör: ezen belül a fv. T.-sora konvergens

$I \to a$

$I+\delta \to z$ $\quad f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n + \dots$

$|z-a| < R$

konvergencia~~sor~~sugár

3) ∞ a ~~konvergencia Taylor-sor~~:

(0 körül)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

sin z

cos z

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\text{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\text{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^8}{8!} + \frac{z^8}{8!} + \dots$$

$$e^{-iz} = 1 - iz + \frac{z^2}{2!} + i\frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{iz^7}{7!} + \dots$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots$$

↑
komplexre is ugyanígy
értelmezzük a cos-t

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

4) Tetszőleges együtthatók

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

Tetszőleges ~~c-k~~ $\exists$ olyan R sugár, melyre konvergens a sor (még ha 0 is)

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$$

KR: $|z| < 1$

↓
a kör pontjain? → ezzel nem foglalkozunk

5) McLaurin-sor:

$$f(z) = \ldots c_{-n} \frac{1}{z^n} + \ldots c_{-2} \frac{1}{z^2} + \boxed{c_{-1}} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

$R_1 < z < R_2$
↳ van belső KR is (pl. z=0 -ban nem értelmes)

(Komplexben szabad ∞ sorokat tagonként deriválni, átrendezni

...)

$$\underbrace{\boxed{c_{-1}=\text{Res}\, f}}_{\text{reziduum !}}$$ → ez fontos: a fv. reziduma (→ integrálás)

'a' körüli McLaurin-sor:

$$\underbrace{c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}+\dots c_1\frac{1}{z-a}}+c_0+c_1(z-a)+\dots \qquad c_{-k}\frac{1}{z^k}\ /z^k$$

~~sz~~ beszorozzuk z^k-al, ahol ~~[illegible]~~ c_{-k} a legkisebb hatvány e.h.-ja

↑

ha véges sok ⊖ tag van: megszüntethető szingularitás

ha ∞ sok –"– : megszüntethetetlen –"–

polinom nevezőjű (meromorf fv-ek) → megszüntethető szingularitás

↳ akkor 'a' pont körül sorba tudjuk fejteni a fv-t

(ha "vonalmenti" a szing. → kontinuum v ∞ sok szingularitás van

↳ itt nem lehet sorba fejteni

↳ ezekkel mi nem foglalkozunk)

$\underline{v} = \text{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}$

ekvi(potenciális) felületek

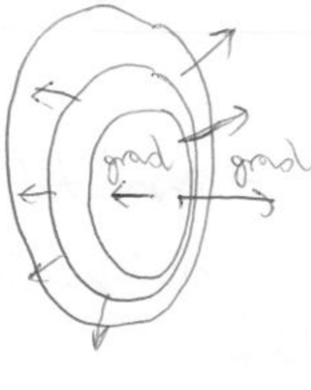
vektorszám.-ban $\phi(\underline{r})$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\phi(\underline{r}+\underline{a}) = \phi(\underline{r}) + (\text{grad}\,\phi) \cdot \underline{a}$$

Egy ~~[illegible]~~ ekvipot. felületen haladva: $\phi(\underline{r}+\underline{a}) = \phi(\underline{r})$

$$\Downarrow$$

$$\text{grad}\,\phi \perp \underline{a}$$



$|\text{grad}\,\phi|$ nagyobb, ha gyorsan változik a fv.

Hasonlóan komplexben:

vehetjük a ϕ és ψ fv-ek gradienseit + az ekvi(...) felületeket

↳ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv.-ek (skalármező)

$\underline{a} = \text{grad}\,\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \text{grad}\,\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix}$

↓

a tér minden pontjában 2 ilyen grad. vektor van

1 adott pontban:

$$\underline{\underline{\underline{a}\cdot\underline{b}}}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\overset{\phi}{\cancel{\psi}}}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$$

$$=$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a}\perp\underline{b}$$

A φ és ψ = konstans vonalhálózatok derékszögben metszik egymást ∀ pontban (∀ ponton csak 1-1 φ, ψ vonal megy át)

↑ mivel a grad ⊥ a konstans vonalra,

eddig ezt néztük

a term. vonalhál.-ban is ⊥-ek

$$\Downarrow$$

szögtartó leképezés

$$f(z+\delta)=f(z)+\overset{C}{\boxed{f'(z)}}\cdot\delta+\dots$$

→ ez most komplex szám ilyenkor elforgat (komplex szorzás: szög összead., absz. érték összeszoroz.)

Kivéve:

Ahol a derivált 0, ott nem viselkedik rendesen a leképezés → nem szögtartó

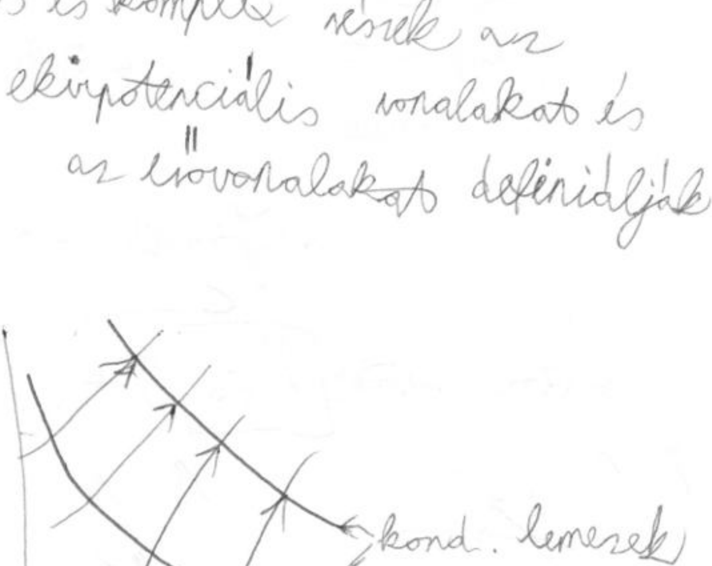
↓

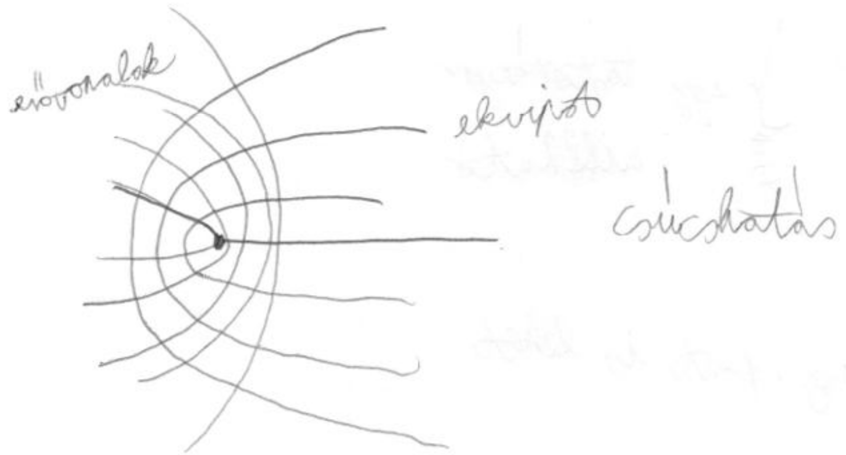
ezek is kül. pontok (pl. $z^2 \to 0$ ~~ban~~ pontban nem szögtartó)

⇓

= a komplex fv. ~~to~~ valós és komplex része 1-1 vektormezőt definiál, melyek ~~nem~~ pontonként merőlegesek
↑ (a grad-ek által)

használat: egy fizikai problémánál pl. def. hatjuk úgy a komplex fv.-t, hogy a valós és komplex részek az ekvipotenciális vonalakat és az erővonalakat definiálják



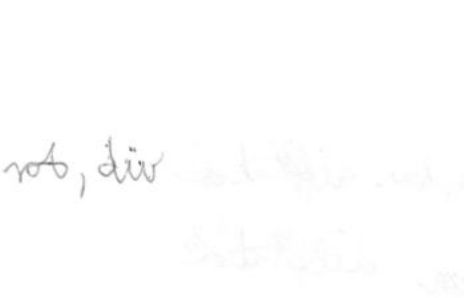


rot, div

7. óra

0) Ism.

$w = f(z)$



konformleképezés (szögtartó)

↑

lokálisan ekvivalens

⇓

egy kis objektum hasonló marad magához (elfordul, nagyítódik, eltolódik, de has. marad)

$$w'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}$$

$\varepsilon \in \mathbb{C}$

$\downarrow$

akárhogyan tart 0-hoz,

igaz ez

reguláris ≈ analitikus } egy tartományon

↕ ⇕

szinguláris diffható

↓

folytonosan ∞ sok sing. pont is lehet

(de ezzel nem fogl.)

Ökölszab.:

- A képlettel leírható fv.-ek ált. ban diffhatók
- $|z|$, z^* -os fv.-ek ált. ban nem diffhatók

$$w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

$$z = x+iy$$

$w = u(x,y) + i\,v(x,y)$ → 2 db 2 vált. fv.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}}$$

Cauchy-Riemann szabály

~~→ ilyenkor diffhatók~~ → ilyenkor diffható a komplex fv.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

$\Delta u=0 \qquad \Delta v=0$

$\downarrow \swarrow$

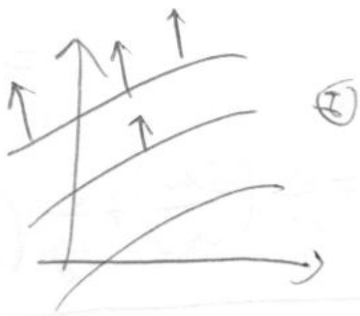
u és v harmonikus fv-ek

$\Downarrow$

harmonikus pár, ha a C.-R.-t is kielégítik

$\Downarrow$

a komplex fv. diffható



$u=\text{const}$

$v=\text{const}$

$\underline{g}=\underline{\nabla}u=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$

$g(x,y)$

$\underline{h}=\underline{\nabla}v=\begin{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$

$\underline{g}\underline{h}=0 \leftarrow$ C.-R.

merőleges vonalhálózatot alkotnak a gradienseik a 2 változós fv-eknek, melyekből a komplex fv. áll

→ maguk a fv-ek is ilyen ⊥-es hálót alkotnak

$$\underline{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}\,\underline{g} = \underline{\nabla} \times \underline{g} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = 0 \leftarrow \underline{g} = \text{grad}\,\underline{u}$$

$$\text{rot grad}\,\varphi = 0$$

~~div~~

$$\text{div}\,\underline{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} g = \text{grad}\,u & \text{rot}\,\underline{g} = 0 & \text{div}\,\underline{g} = 0 \\ h = \text{grad}\,v & \text{rot}\,\underline{h} = 0 & \text{div}\,\underline{h} = 0 \end{array}} \quad \Big\|$$

$$\Downarrow$$

a komplex fv. olyan kétváltozós fv-eket ~~(vektormezőt)~~ definiál, melyek vektormezejének rot, div-ja 0.

$\underline{E}, \underline{B}$

$\operatorname{div} \underline{E} = \rho$

$\operatorname{div} \underline{B} = 0$

$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\operatorname{rot} \underline{B} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \underline{j}$

---

ha $\rho, \underline{j} = 0$ pl. vákuum, szigetelő

\+ stacionárius eset ~ hasonlóan hidrodinamikában

$\operatorname{div} \underline{E} = 0$

$\operatorname{div} \underline{B} = 0$

$\operatorname{rot} \underline{E} = 0$

$\operatorname{rot} \underline{B} = 0$

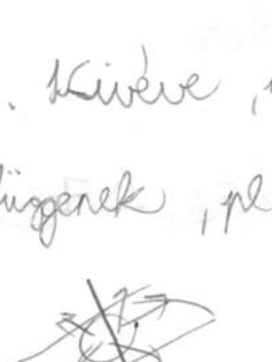
---

de ezek 3 változós fv-ek. Kivéve, ha az egyik változótól nem ~~függ~~ függenek, pl.

h

külö. sík~~(ok)~~ metsze ←

~~te~~k azonosak

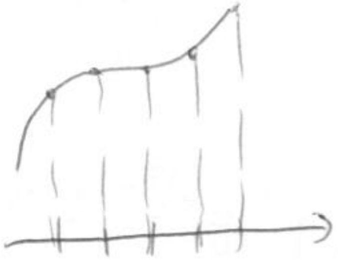


⇓

A komplex fv.-el megoldhatjuk a diffegyenleteket
- de ehhez olyan fv.-t kell keresni, ami a határfeltételeket is kielégíti

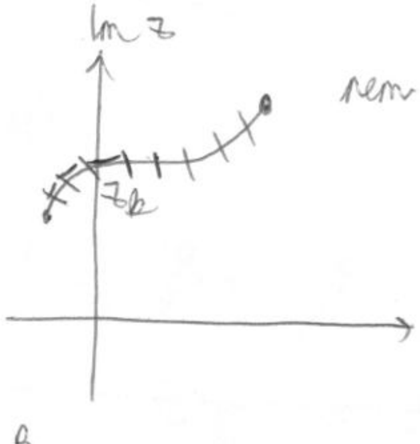
Komplex fv-ek integrálása

$$\int f(x)\,dx = \lim \sum_k f(x_k)\,\Delta x_k$$



↓

akárhogy választhatom az int-ok hosszát, létezzen limesz



nem elég a ~~görbét~~ végpontokat megadni, a görbét is kell, ahogy eljutható oda

$$\int_A^B f(z)\,dz = \lim_{k\to 0} \sum_k f(z_k)\,\Delta z_k$$

(görbe mentén)

↓

függ a görbétől

akkor is függött, kivéve, ha potenciálos volt az erőtér

de most nincs vektortér

↓

$$w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

$$z = x + iy$$

$$dz = dx + i\,dy$$

$$f(z)\,dz = (u + iv)\,(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$$

Vezessünk be 2 új vektormezőt:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \qquad d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}\,d\underline{r} = (u\,dx - v\,dy)$$

$$\underline{b}\,d\underline{r} = (v\,dx + u\,dy)$$

$$f(z)\,dz = (\underline{a}\,d\underline{r}) + i(\underline{b}\,d\underline{r})$$

$$\int f(z)\,dz = \underbrace{\int \underline{a}\,d\underline{r}} + i\Big(\underbrace{\int \underline{b}\,d\underline{r}}\Big)$$

ezek valós vonalintegrálok

↓

$\mathbb{R}^2$-ben egy $\underline{r}$-hez egy $\underline{v}(\underline{r})$-et rendeltünk, és a vonalintegrál~~hoz~~nál ezt néztük.

De most $\underline{r}$-hez $\underline{u}(\underline{r})$-et és $\underline{v}(\underline{r})$-et rendeljük

↓

2db 2 vált. fv. → 2db vonalintegrál

↓

Most lehet-e potenciálos $\underline{a}$ és $\underline{b}$?

$$\underline{a} \overset{?}{=} \underline{\nabla} \phi$$

$$a_x \overset{?}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$a_y \overset{?}{=} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \checkmark \rightarrow \text{ezek egyenlőek (C.-R.)}$$

↓

A reguláris képletű komplex fv-ekre ezek teljesülnek

↓

Nem függ az integrál a görbétől

$$\underline{b} \overset{?}{=} \underline{\nabla} \psi \, ?$$

$$b_x = \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$b_y = \frac{\partial}{\partial y} \psi$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

ha ez igaz

↓

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \checkmark \quad (\text{C.-R.})$$

⇒ Ekkor az egész vonalintegrál nem függ az úttól, csak a végpontoktól.

⇓

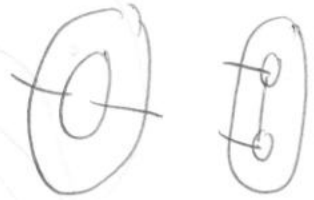
Ha körintegrál 0.

$\oint f(z)\,dz = 0$

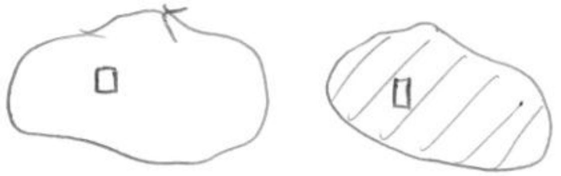
↓

!! és csak akkor igaz, ha egyszeresen összefüggő a tartomány

↑



$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int \text{rot}\,\underline{v}\, df$ Stokes-tétel



↓

ha a tartomány közepében van egy lyuk, akkor ~~egyszeresen~~ nincs ~~rot~~ felületi int.

↓

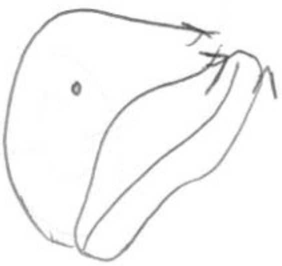
nem igaz a Stokes-tétel

Ha van lyuk:

$\oint \underline{v}\, d\underline{r} \neq \int \overset{0}{\text{rot}\,\underline{v}}\, d\underline{f} = 0$

Ha a tartomány minden pontjában értelmezve van, akkor 0.
↓
reguláris tart.

Egy komplex fv. reguláris tartományon vett integrálja 0.

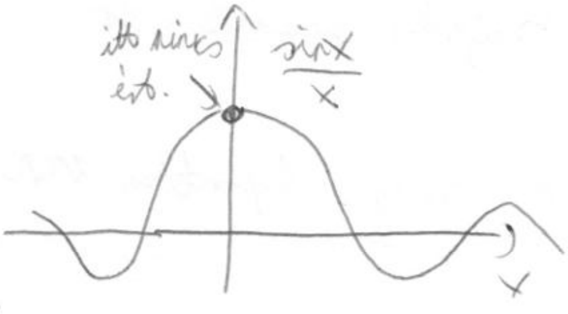


- Egy reguláris fv. körintegrálja 0, ha nincs szingularitás
- Ha van szingularitás, akkor a görbétől is függ a vonalintegrál !!

$\frac{\sin z}{z}$

Szingularitások

1) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ véges határérték a sing.-ban



↙

de $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

↓

Megszüntethető szingularitás

(betömjük a lukat)

2) Pólus: határérték ∞

$\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z-3}$, $\frac{1}{(z-5)^7} \to$ 7-ed rendben tart a ∞-be

↓

z=0-ban sing., és elsőrendben tart a ∞-be

$f(z) = \frac{1}{(z-5)^7} + z^2$

itt a nevező és számlálé is 0-hoz ↑tartott ↓ nem lehetett megszorozni

$(z-5)^7 \cdot f(z) = 1 + z^2 \cdot (z-5)^7$

a szorzófaktorral (ami a fokát megemelte) lehet ~~ ~~ megszüntetni a sing.-t

3) $\lim\limits_{z \to 0} z^n \ln z = 0$

↑ pl. ln

Megszüntethetetlen (lényeges) szingularitás

↳ ilyenkor divergál a fv.

= Mindhárom sing. 1 pontban van

4) Vonalmenti szingularitás

———— → ezzel nem foglalkozunk

Taylor ($\overset{\text{Mc}}{\text{Laurin}}$)-sor

1) $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$

konvergenciasugár
- 1 (pl. minden első 1)
- ∞
- 0 → sehol nem konv.

egész fv.-ek, mindenhol értelmezve vannak

$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$ → a körüli T.-sor

2) McLaurin-sor

$\dots + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 \cdot z^2 + \dots$

$+ c_{-2} \cdot \frac{1}{(z-a)^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{(z-a)} + c_0 + c_1 \cdot (z-a) + \dots$ → $z = a$-ban nincs ért.

$R \geq r$

↓

- konvergenciagyűrű van → nagyon közel sem lehetünk a-hoz, mert akkor $\frac{1}{z-a} \to \infty$
- a gyűrűn kívül már nem konv.

↓

= | Ha a Laurent-sor balra végtelen → lényeges singularitás

= • Ha véges → pólus singularitás

pl. $c_{-k}\frac{1}{(z-a)^k}+\dots \quad \Big/ \cdot (z-a)^k$

↑

megszüntetjük a sing.-t

<u>Legyen:</u>

$g(z)$ reguláris fv.

$f(z)=\frac{g(z)}{z-a}$ ↙ mesterséges singularitás

$\int f(z)$ → Cauchy-féle integrálok

$$\int \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \int \frac{A}{z-a} + \int \frac{B}{z-b}$$

↘ ↓

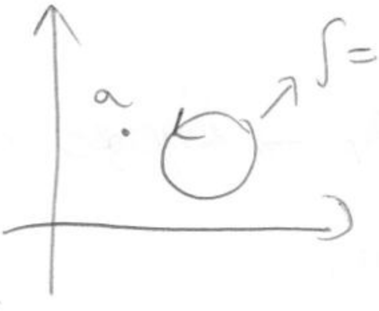
több sing. esetén (polinom)

visszavezethető 1 sing.-ra (ami lehet többedrendű,

pl. $\int \frac{1}{(z-a)^2(z-b)} = \int \frac{A}{(z-a)^2} + \frac{B}{(z-b)}$

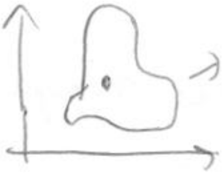
Példa

$\int \frac{1}{z-a}$



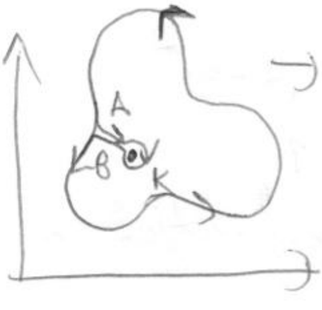
$\int = 0$, mert nincs belül sing.

Ide



$\int \neq 0$

DE



→ ene is 0 az integrál

mert nincs sing.

$$\oint = \int_G + \int_A + \int_{K\circlearrowleft} + \int_B = 0$$

ha A és B egymáshoz nagyon közel van (úgy vettük fel őket)

⇓

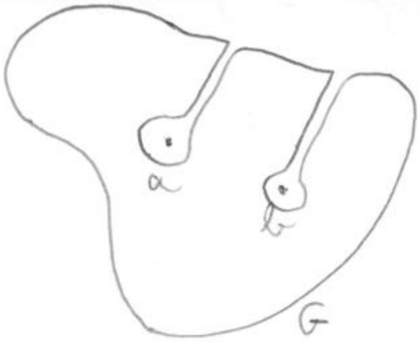
$$\int_A = -\int_B$$

$$\boxed{\int_G = \int_{K\circlearrowright}}$$

a csúnya görbe menti integrál = = kis kör menti int.

$$\int_G = -\int_{K\circlearrowleft} = \int_K$$

Több sing. esetén:

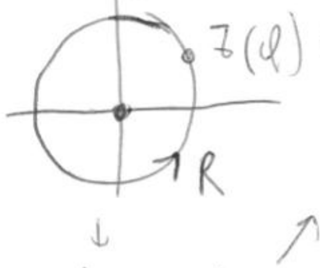


$$\int_G = \int_{K_1} + \int_{K_2}$$

∞ sok pólusnál (pl. sin) ∞ sok kört kell integrálni

pl.

$$f(z)=\frac{1}{z}$$



$z(\varphi)=e^{i\varphi}\cdot R$ $\qquad \frac{dz}{d\varphi}=i e^{i\varphi}\cdot R$

$dz = i e^{i\varphi}d\varphi\cdot R$

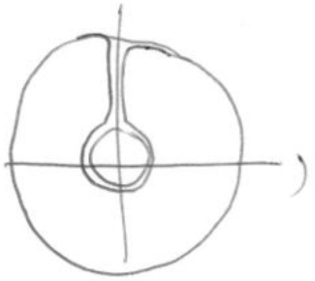
↓ ↗ $\varphi\in[0,2\pi[$

paraméterezés

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{R\cdot e^{i\varphi}}$$

$$\underline{\underline{I}}=\oint f(z)dz=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{\cancel{Re^{i\varphi}}}\cdot i\cancel{R\cdot e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi=\underline{\underline{2\pi i}}\ !!!!$$

R-től függetlenül ugyanannyi az ∫, mert



↓

ennek a hatványaira :

→ Laurent-sor miatt → most szabad tagonként ∫-ni,
ha konv. a sor

$\oint z^n dz = 0$ ha $n > 0$

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) \\ F'(x) &= f(x)\end{aligned}\right\}$$ ez érvényes komplexben is

∮ levezetése másfélén :

→ Erre Newton-Leibniz

$$\int \frac{1}{z^{n+1}} = \left[-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{z^n}\right]_{0°}^{359° \simeq 360°-\varepsilon}$$

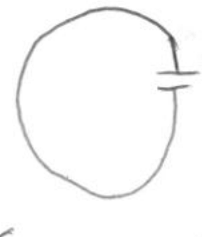
↓

tartunk $\varepsilon \to 0$ -hoz

↓

$\int = 0$

kivéve, ha $\frac{1}{z}$-ről van szó : $n=0$



mert már beláttuk a körintegrálásnál is,

de most kijött Newton-Leibniz-el

$$\oint \frac{1}{z}\,dz = \left(\ln z\right)_{\varphi=0}^{2\pi} = 2\pi i$$

↓

a log nem 1 értékű fv.

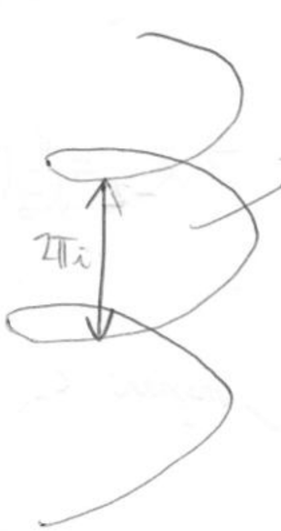
$$\ln z = \ln r + \ln e^{i(\varphi+2k\pi)} = \ln r + i(\varphi+2k\pi) \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$z = r\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}$$

↓

$$\ln z = \ln z + i2\pi\cdot k \rightarrow$$

ugyanazon a határon ($z_1 = z_2$) más értékeket vehet fel a log



→ ha körbemegyünk 1-szer, ennyivel nő a fv-érték

mert

$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 + 2\pi$

de z ugyanaz

⇓

$$\int f(z)\,dz = \dots \underbrace{\oint c_{-n}\frac{1}{z^n} + \oint \dots \oint c_{-2}\frac{1}{z^2}}_{0} + \oint c_{-1}\frac{1}{z} + \underbrace{\oint c_0 + \oint c_1 z + \oint c_2 z^2 + \dots}_{0} \Big) =$$

$$\oint = c_{-1}\oint\frac{dz}{z} = \underline{\underline{2\pi i\, c_{-1}}}$$

$\boxed{c_{-1} = \text{Res}\, f}$ → reziduum (a fv. „maradéka") n-edfokú szingularitás $\left(\frac{1}{(z-a)^n} = f(z) \to\right.$ több zérushely egybeesik$\left.\right)$

$$\dots + c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\cdot\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \Big/ \cdot z^n$$

...

pl. Harmadfokú szingularitás:

$$f(z) = \frac{c_3}{z^3} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \dots$$

$$z^3 \cdot f(z) = c_{-3} + c_{-2} z + c_{-1} z^2 + c_0 z^3 + \dots$$

↑

ha balra véges a hatványsor → megszüntethető sing.

$$\frac{d}{dz}\left(z^3 f(z)\right) = c_{-2} + c_{-1} 2z + c_0 3z^2 + \dots \to c_{-2} = \frac{d}{dz}\left(z^3 f(z)\right)\Big|_{z=0}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 f(z)\right) = c_{-1}\cdot 2 + c_0 \cdot 6z + \dots$$

↙ megint c_{-1} kell nekünk

$$c_{-1} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 f(z)\right)\Big|_{z=0}$$

$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^n \cdot f(z)\right)\Big|_{z=0}}$$

→ n-edfokú sing. esetén a reziduum képlete

(a MacLauren-sor ehóit is így kell kiszámolni)

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\cdot\left(z^n f(z)\right)$$

n = 1-re:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0}\left(z\cdot f(z)\right)$$

→ ha a-ban van sing.:

$$\boxed{c_{-1} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\cdot f(z)\right]}$$

⇓

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \underbrace{c_{-1}}_{\mathrm{Res}(z_n)}$$ → ki tudjuk számolni 1db n-edfokú sing.-os fv. ∫-ját

---

Több sing. esetén: ~~reziduum~~tétel (Cauchy-tétel)

$$\boxed{\oint_{\circlearrowleft} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\, f(z_k)}$$

ahol z_k-k a pólusok

↓ pozitív körüljárásra!

(negatívra ↑ $-2\pi i$ Res) ↓

~~minden~~ pólusra megnézem hol száll el, mennyire száll el, és a reziduumtétellel kiszámítjuk

$$\int \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)\dots} = \int\frac{A}{(z-a)} + \int\frac{B}{(z-b)} + \int\frac{C}{(z-c)} + \dots$$ → ezért lehet szummázni a reziduumokra

↑ visszavezetjük 1 db sing.-ra

↓

csak a görbén belüliekre kell szummázni!

(a többivel nem foglalkozunk → mintha ott nem is lenne sing.

(a görbén belül nincs is))

1) Példa

$$I=\int_0^{2\pi} dx \, \frac{1}{1-2r\cos x+r^2} \quad 0<r<1$$

$\downarrow$

alakítsuk át komplex integrállá!

új változó (helyettesítés)

$$z=e^{ix} \qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$dz=i e^{ix} dx$$

$$dx=\frac{dz}{ie^{ix}}=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$$

$$I=\oint\frac{dz}{iz}\,\frac{1}{1-2r\frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}+r^2}=\oint\frac{dz}{i}\,\frac{1}{z-r(z^2+1)+r^2z} \;\# =$$

mert x $0\to 2\pi$ -ig megy

$$\# = i\oint dz\,\frac{1}{rz^2-(r^2+1)z+r}$$

Hol vannak pólusok?

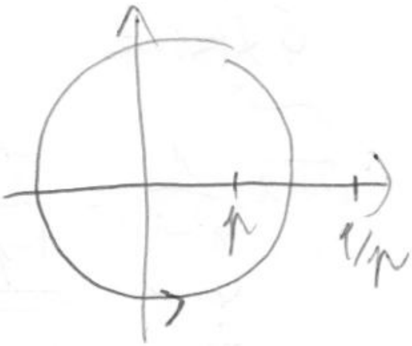
$$rz^2-(r^2+1)z+r=0$$

$$z_{1,2}=\frac{r^2+1\pm\sqrt{(r^2+1)^2-4r^2}}{2r}=\frac{r^2+1\pm\sqrt{r^4+2r^2+1-4r^2}}{2r}=$$

$$=\frac{r^2+1\pm\sqrt{r^4-2r^2+1}}{2r}=\frac{r^2+1\pm(r^2-1)}{2r}$$

$z_1=r$ (+)-ból

$z_2=\frac{1}{r}$ (−)-ból



↙ $0<p<1$

↓

csak a p sing.-t kell nézni

ha

$$\boxed{f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}}$$ alakú, és $h(a)=0 \to$ a-ban pólus

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to a}\left((z-a)\frac{g(z)}{h(z)}\right) = \lim_{z\to a}\left(\frac{g(z)}{h(z)-\underbrace{h(a)}_{=0}}\cdot(z-a)\right) =$$

$$= \lim_{z\to a}\left(\frac{\overset{\text{folytonos}}{g(z)}}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}\right) \to \frac{g(a)}{h'(a)}$$

⇓

||| ha $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ alakú (g folyt., $h(a)=0$ szingularitás ~~csak~~)

!!! akkor $$\boxed{\operatorname{Res} f(a) = \frac{g(a)}{h'(a)}}$$

$$\operatorname*{Res}_{(z\to p)} \frac{1}{pz^2-(p^2+1)z+p} = \frac{1}{(\quad)'}\bigg|_{z=p} = \frac{1}{2pz-(p^2+1)}\bigg|_{z=p} = \frac{1}{p^2-1}$$

↓ csak itt kell nézni a reziduumot

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\oint f\,dz =}\; I = i\oint dz \overbrace{\frac{1}{r z^2-(r^2+1)z+r}}^{f(z)} = i\overbrace{\left(2\pi i \underbrace{\frac{1}{r^2-1}}_{\text{Res}}\right)}^{\oint f(z)\,dz} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{1-r^2}}}$$

2) $$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx \overset{\uparrow}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz =$$

→ hozzáteszünk egy félkört

↓

zárt lesz!

mert $$\text{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+a^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{\text{páratlan}}{\sin x}}{\underset{\text{páros}}{x^2+a^2}}\,dx =$$

$$= \int \text{ptl fv.} = 0$$

↑

szimm. intervallummal

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{\circlearrowleft} - \int_{\curvearrowleft}\right]$$

↓

ennek 0-nak kell lennie ahhoz, hogy ne ∞-t adjunk hozzá

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix} \cdot e^{-y}$$

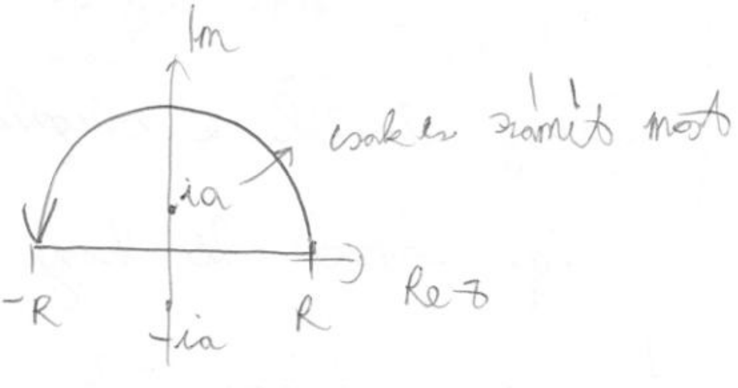
$$\frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = \frac{e^{ix} \boxed{e^{-y}}^{\text{kicsi}}}{\underbrace{x^2+y^2+a^2}_{\text{nagy}}} \to 0$$

$$\oint \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{e^{-a}}{\cancel{2i}\, a} = \frac{\pi \cdot e^{-a}}{a}$$

$z^2 + a^2 = 0$

$z^2 = -a^2$

$z = \pm ia$



$z^2+a^2 = (z+ia)(z-ia)$

általában:

$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

most „a" = ia

$$\operatorname{Res} f(ia) = \lim_{z \to ia} \left(\cancel{(z-ia)} \frac{e^{iz}}{\cancel{(z-ia)}(z+ia)} \right) = \lim_{z \to ia} \frac{e^{iz}}{z+ia} = \frac{e^{i(ia)}}{ia+ia} = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

~~E a görbét~~

⇓

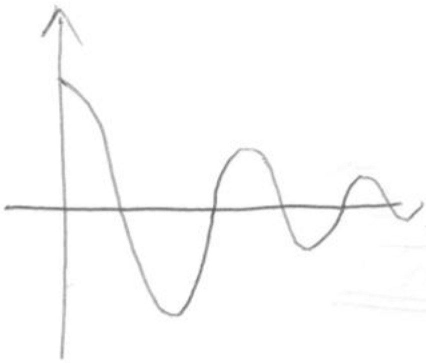
valóst visszavezetjük komplexre (helyettesítés)

→ a tartományt bezárjuk (pozitív) félkörrel,

ami 0-hoz tart az ∫ → Cauchy-tétel ↔ reziduumszámítás

↑ szakadási pontokat keresünk

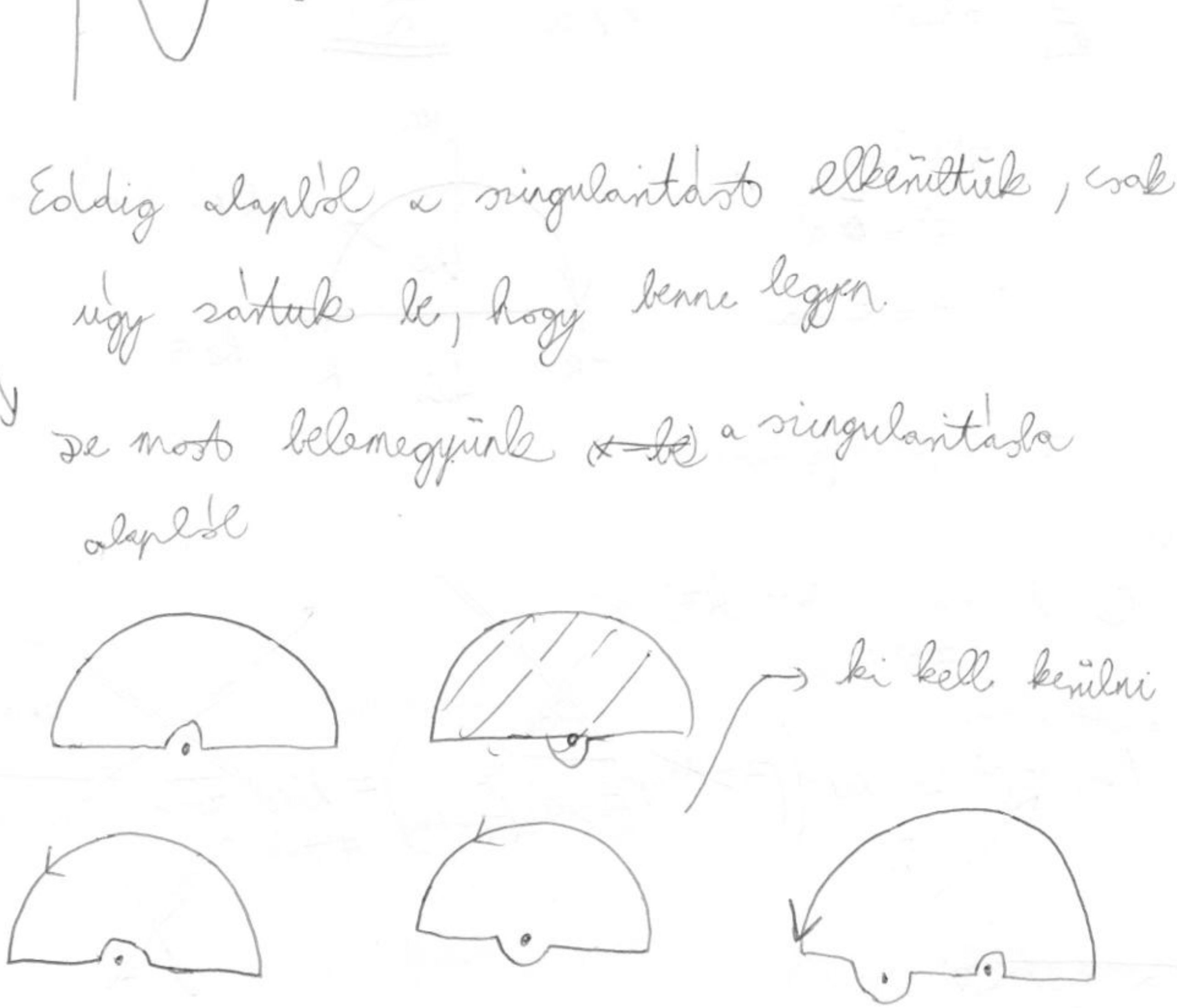
3) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = +$



Eddig alapból a singularitást elkerültük, csak úgy zártuk be, hogy benne legyen.

De most belemegyünk ~~x-be~~ a singularitásba alapból

a)



b) Vagy eltoljuk a szingularitást

$$\frac{\sin x}{x-i\varepsilon}$$

4) $g(z)$ reguláris

a) $f(z)=\frac{g(z)}{z-a}$

$$\oint f(z)\,dz=\oint\frac{g(z)}{z-a}\,dz=2\pi i\ \mathrm{Res}\,f(a)=\underline{\underline{2\pi i\ g(a)}}$$

$$\mathrm{Res}\,f(a)=\lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]=\lim_{z\to a}\cancel{(z-a)}\left(\frac{g(z)}{\cancel{z-a}}\right)=g(a)$$

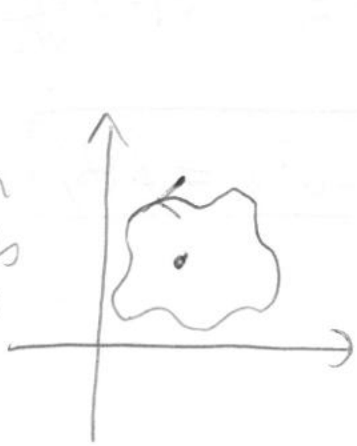
$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{g(z)}{z-a}\,dz=g(a)}$$

b) $g\to f$

$a\to z$

$z\to u$ (betűcsere) → a tart.-on reguláris ez is

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(u)}{u-z}\,du=f(z)}$$



↓

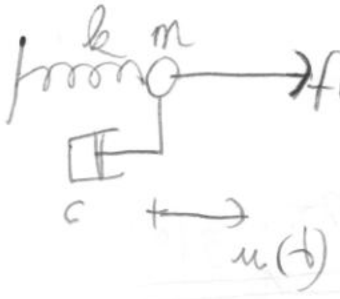
→ a fv. tartományán belüli értékeit megmondják a ~~tartomány~~ peremén lévő értékek

A komplex reguláris fv-eknél erős összefüggés van a fv. értékek között.

8. óra

Gyakorlati alkalmazások

$m, k, c > 0$



(feltesszük, hogy nincs visszahatás a rángatott rendszerre)

$$m\ddot{u}(t) = -k \cdot u(t) - c \cdot \dot{u}(t) + F(t)$$

$$u(0) = u_0$$
$$\dot{u}(0) = v_0$$

$$\ddot{u} = \frac{k}{m}u - \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{F(t)}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 2\beta = \frac{c}{m} \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$\boxed{\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)} \qquad (\beta, \omega_0^2 > 0)$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$\dot{u} = Du$$
$$\ddot{u} = D^2 u$$

$$D^2u+2\beta Du+\omega_0^2u=f(t)$$

$$\underbrace{\left(D^2+2\beta D+\omega_0^2\right)}_{L(D)} u(t)=f(t)$$

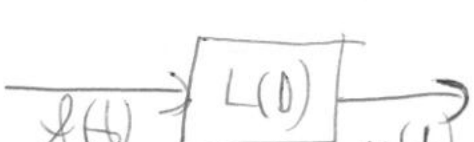
$L(D) \to D$ operátor polinomja

$$L(D)u(t)=f(t)$$

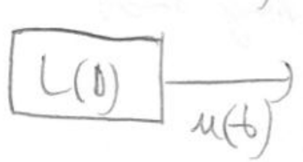
változó ehós pl. a
↑ Schrödi.-egy.

közönséges, lineáris, másodrendű, inhomogén, állandó ehós

(a homogénnek mindig megoldása, hogy $u(t)=0$)



inhomogén



homogén

1) homogén:

$L(D)u(t)=0$

tfh. $u(t)=e^{i\omega t}$ alakú (ω ismeretlen)

$De^{i\omega t}=i\cdot\omega\cdot e^{i\omega t}$ sajátértékprobléma

$D^2e^{i\omega t}=(i\omega)^2e^{i\omega t}$

$D^ne^{i\omega t}=(i\omega)^ne^{i\omega t}$

$$L(D)e^{i\omega t}=\underbrace{L(i\omega)}\cdot\cancel{e^{i\omega t}}=0$$

az op. felveszi
a sajátértékét, ha a
sajátfv.-ével találkozik

$\boxed{L(i\omega)=0}$ karakterisztikus egyenlet

n-edfokú egyenlet → komplexben n gyöke van

$\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ feltesszük, hogy különböznek az ω-k

$\downarrow$ (nincs elfajuló megoldás)

vhogy kiszámoljuk őket (ha $5 \leq$ fokú $\Rightarrow$ numerikus mo. kell)

$e^{i\omega_1 t} \quad e^{i\omega_2 t} \dots e^{i\omega_n t}$

$\downarrow$

ezek lineáris teret (bázist) alkotnak

ált. mo.: ezek összege

$$u(t) = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t} + \dots c_n \cdot e^{i\omega_n t}$$

$c_n \in \mathbb{C}$ ~~ált.~~ tetsz. ehók

$\uparrow$

KF határozza meg őket

$$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$$

$$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta(i\omega) + \omega_0^2 = -\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 = 0$$

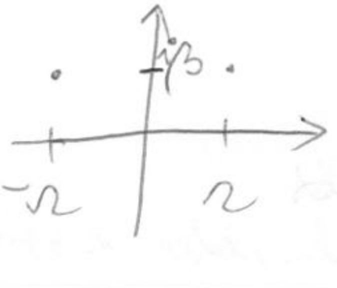
$$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$$ kar. egyenlet ω-ra

$$\omega_{1,2} = \frac{2i\beta \pm \sqrt{(2i\beta)^2 + 4\omega_0^2}}{2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

TFH $\omega_0 > \beta$ (alulcsill. rezgés)

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$$

$$\omega_{1,2} = i\beta \pm \Omega$$



$\beta \oplus$!!! (feltétel)

↳ később fontos lesz

$$e^{i(i\beta+\Omega)t} = e^{-\beta t}\cdot e^{i\Omega t}$$

$$e^{i(i\beta-\Omega)t} = e^{-\beta t}\cdot e^{-i\Omega t}$$

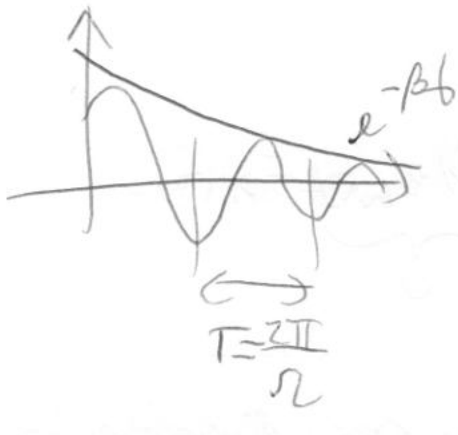
↓

csökken az ampl. és az energia → fűti az olajat a rendszer

~~$u(t)=Ae^{-\beta t}+Be^{-\beta}$~~

$$u(t)=Ae^{-\beta t}\cdot e^{i\Omega t}+\beta\cdot e^{-\beta t}\cdot e^{-i\Omega t}=e^{-\beta t}\left(Ae^{i\Omega t}+Be^{-i\Omega t}\right)=$$

$$=e^{-\beta t}\left(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t\right)$$



↓

partikuláris mo.

ezt a KF-hez illesztjük

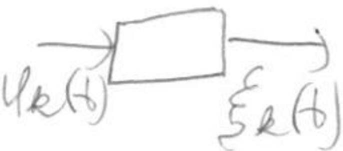
(spec. esetei:

)

2) inhomogén

$$L(D)u(t)=f(t)$$

$f(t)=\sum_k c_k\varphi_k(t)$ φ_k = „egyszerű fv."



$$L(D)\xi_k(t) = \varphi_k(t)$$

$$u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$$

$$L(D)u(t) = L(D)\sum_k c_k\xi_k(t) = \sum_k L(D)\left(c_k\xi_k(t)\right) =$$

$$= \sum_k c_k \cdot \underbrace{\left(L(D)\xi_k(t)\right)}_{\varphi_k(t)} = f(t)$$

Ez az összes mo? Nem.

$$L(D)u_0(t) = 0$$

$$u(t) = \sum_k c_k\xi_k(t) + u_0(t)$$

$$L(D)u(t) = \underbrace{L(D)\left(\sum c_k\xi_k(t)\right)}_{f(t)} + \underbrace{L(D)u_0(t)}_{0} = f(t)$$

↳ A homogén egyenlet végtelen sok megoldását hozzáadhatjuk az ~~(f(t))~~ u(t) inhom. megoldásokhoz

↓

Ált. mo.: ~~ált~~ inhomogén partikuláris + homogén ált.

↓

2 féle mo. → Fourier
→ Green

A) mo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta(t-\tau) = f(\tau)$$

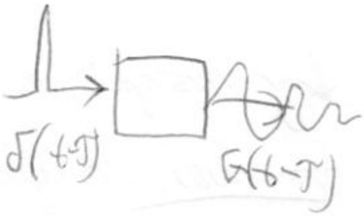
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \delta(t-\tau)$$ → f(t)-t felbontottuk egyszerűbb fv-ekre (Dirac-deltákra)

$k \to \tau$

$\sum_k \to \int d\tau$

$c_k \to f(\tau)$

$\varphi_k(t) \to \delta(t-\tau)$



$$\xi_k(t) \to G(t-\tau)$$

$L(D)\, G(t-\tau) = \delta(t-\tau)$ → elég 1 pontban megoldani a δ-ra adott választ

$L(D)\, G(t) = \delta(t)$

↓ máskor is ~~ennyi~~ ilyen lesz a válasz

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$$

$$L(D) = L(D_t) \int d\tau\, f(\tau) G(t-\tau) = \int d\tau\, f(\tau) \overbrace{L(D_t)\, G(t-\tau)}^{\delta(t-\tau)} = \overset{f(t)}{\cancel{\int d\tau\, f(\tau)\, L(D)}}$$

A Green-fv. meghatározása:

... (később!!)

B) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, F(\omega) e^{i\omega t}$

$k \to \omega$

$\sum_k \to \int d\omega$

$c_k \to f(\omega)$ $\qquad \left(F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) e^{-i\omega t} \right)$ most tudjuk a Fourier-elvokat

$\varphi_k \to e^{i\omega t}$

átviteli fv.

$? = C(\omega) e^{i\omega t} = \xi(t)$

(előbb-utóbb ω frekvenciával fog rezegni a rendszer, de lesznek csillapódó tranziens rezgés-komponensek is az elején)

$C e^{i\omega t}$

$\mathrm{Re}\left(A e^{-i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t - \varphi)} \right)$

$A \cdot \cos(\omega t - \varphi)$ → lesz mekkora fázisa

$$L(D)\left(C(\omega)\, e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$$

$$C(\omega)\underbrace{\left(L(D)\, e^{i\omega t}\right)}_{L(i\omega)\cdot e^{i\omega t}} = e^{i\omega t}$$

$$C(\omega)\cdot L(i\omega) = 1$$

$$C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$ → meghatároztuk egyszerűen az átviteli fv.-t

~ inhomogén:

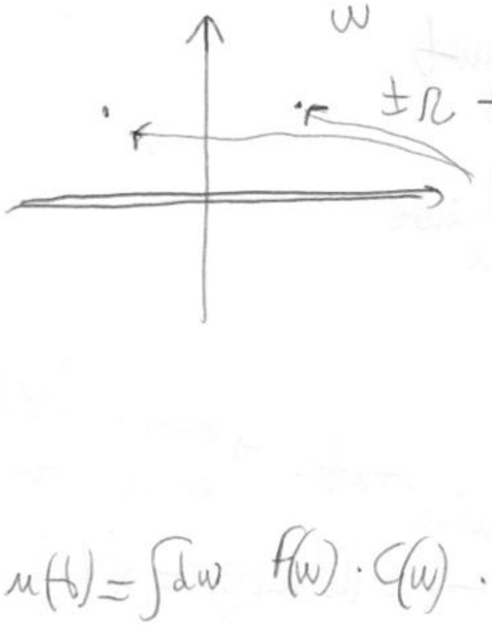
$$\boxed{A}\boxed{x} = b$$

$x = A^{-1}b$ → van inverz, ha det ≠ 0

homogén:

$$\boxed{A x} = 0$$

nemtriviális mo. van, ha det = 0



Most ω valós

$L(i\omega)$ itt 0,
de most ezeken
nem megyünk át

$$u(t) = \int d\omega\, f(\omega)\cdot C(\omega)\cdot e^{i\omega t}$$

ell.:

$$L(D)\,u(t) = L(D)\int d\omega\, f(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t} = \int d\omega\, f(\omega)\, C(\omega)\, \overbrace{L(D)e^{i\omega t}}^{\overbrace{L(i\omega)}^{1}\cdot e^{i\omega t}} =$$

$$= \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t} = f(t) \checkmark$$

Recept: Fourier-trafó mo.

$$L(D) \to L(i\omega) \to G(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$

$$u(t) = \int d\omega\, F(\omega) \cdot \frac{1}{L(i\omega)}\, e^{i\omega t} \to F(\omega)\text{-t elvileg meg tudjuk adni,}$$

gyakorlatilag ez elég nehéz

<u>Kicsit másképp:</u>

$$L(D_t)\, u(t) = f(t)$$

$$f(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$u(t) = \int d\omega\, U(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$L(D) \int d\omega\, U(\omega) e^{i\omega t} = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\int d\omega\, U(\omega)\, \underbrace{L(D) e^{i\omega t}}_{L(i\omega)} = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$U(\omega) \cdot L(i\omega) = F(\omega) \xleftrightarrow{\text{Fourier-trafó.}} L(D)\, u(t) = f(t)$$

→ Fourier-térben a Fourier-transzformáltakra igaz ugyanaz az összefüggés

$$U(\omega) = \frac{F(\omega)}{L(i\omega)}$$

visszatrafó

$$u(t) = \int d\omega\, F(\omega) \frac{1}{L(i\omega)}\, e^{i\omega t}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(t) = \int d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau) \\ u(t) = \int d\omega\, F(\omega) \frac{1}{L(i\omega)} e^{i\omega t} \end{array}\right\} \text{ ugyanazok}$$

$$\uparrow$$

$$u(t) = \int d\omega\, F(\omega) \cdot G(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt\, f(t)\, e^{-i\omega t} \equiv \frac{1}{2\pi} \int d\tau\, f(\tau)\, e^{-i\omega \tau}$$

$$\int d\omega \left(\frac{1}{2\pi} \int d\tau\, f(\tau) e^{-i\omega\tau} \right) G(\omega) e^{i\omega t} =$$

$$= \int d\tau\, f(\tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int d\omega\, G(\omega) e^{i\omega t} \cdot e^{-i\omega\tau} \right) = \int d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int d\omega\, G(\omega)\, e^{i\omega(t-\tau)}} = G(t-\tau)$$

Megkaptuk a Green-fv-t !!

! A Green-fv.-t az átviteli fv. Fourier-trafójaként kapjuk meg
↓ előző (Fourier) módszerben használt

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{L(i\omega)}$$ → polinom, aminek zérushelyei vannak

↓ ↙

ezt komplexben számoljuk ki

$$L(D)\, u(t) = f(t)$$

$$u(t) = \int d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$$

$$u(t) = \int d\omega\, f(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$L(D) \to L(i\omega) \to C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)} \to G(t)$$

$\swarrow$

különböző diffegyenleteknél ez
az L eltérő → más lesz a Green-fv.

Most spec.: $\ddot{u} + 2\beta \dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$

$$\beta, \omega_0^2 > 0$$

$$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$$

$$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = -\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 =$$

$$= (\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\beta\omega)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}$$

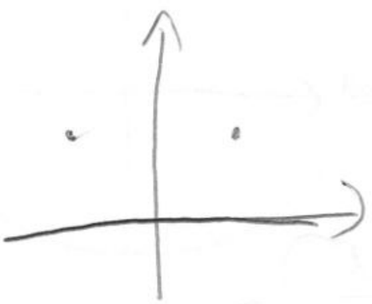
$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

komplex síkon,

pólusok: $w_1 = \Omega + i\beta$

$w_2 = -\Omega + i\beta$

$L(iw_1) = L(iw_2) = 0$



reziduum-tétel

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\, f(z_k)$$

pólus

1. rendű pólusnál

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = \mathrm{Res}\, f(z_k)$$

(ha $f(z)$ véges)

↓

Res $= 0$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt} \frac{1}{w^2 - 2i\beta w + w_0^2} =$$

msz:

pólusok

$$w^2 - 2i\beta w + w_0^2 = (w - w_1)(w - w_2)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt} \frac{1}{(w - w_1)(w - w_2)}$$

msz.:

$$\frac{1}{(w-w_1)(w-w_2)} = \frac{A}{w-w_1} + \frac{B}{w-w_2} = \frac{A(w-w_2) + B(w-w_1)}{(w-w_1)\cdot(w-w_2)}$$

$$= \frac{(A+B)w - Aw_2 - Bw_1}{(w-w_1)(w-w_2)}$$

$$\left.\begin{aligned} &A+B=0 \\ &-Aw_2-Bw_1=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &B=-A \\ &-Aw_2+Aw_1=1 \\ &A(w_1-w_2)=1 \\ &A=\frac{1}{w_1-w_2}=\frac{1}{2\Omega} \\ &B=\frac{1}{w_2-w_1}=-\frac{1}{2\Omega} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2\Omega}\frac{1}{w-w_1}-\frac{1}{2\Omega}\frac{1}{w-w_2}$$

$$\Downarrow$$

$$G(t)=-\frac{1}{2\pi}\int dw\, e^{iwt}\left[\frac{1}{2\Omega}\frac{1}{w-w_1}-\frac{1}{2\Omega}\frac{1}{w-w_2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi\Omega}\left(\underbrace{\int\frac{dw\, e^{iwt}}{w-w_2}}-\int\frac{dw\, e^{iwt}}{w-w_1}\right)$$

$w=w'+iw''$ $(w', w' \in \mathbb{R})$

$e^{i(w'+iw'')t}=e^{iw't}\cdot\boxed{e^{-w''t}}$

Lezárjuk az integrálási utat

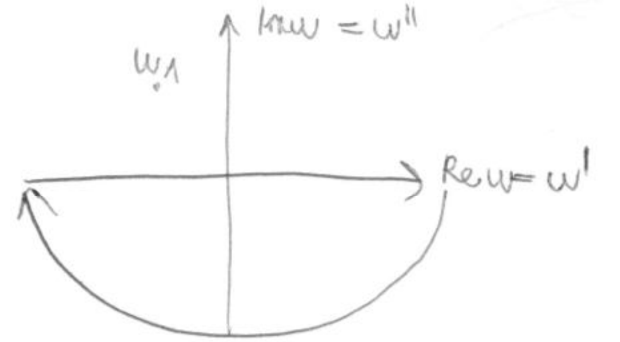
→ azt szeretnénk, hogy ez kicsi legyen (eltűnjön a ∩ -re vett integrál)

a) $t<0$ ↗ lefelé kell lezárni az int. vonalat, hogy a

$\downarrow$ ↓ ez teljesüljön

$w''<0$ $\quad -w''t<0$

Minél nagyobb a kör (w''), annál kisebb lesz ez az int. ↘ ilyenkor tűnik el $\int_{\frown} dw\,\frac{e^{iwt}}{\dots} \xrightarrow[\infty]{w} 0$



$$\int_{\longrightarrow} = \cancel{\oint} \lim_{R\to\infty} \int_{\cup} \qquad \left(\int_{\cup} \Rightarrow 0\right)$$

$\Vert$

0, mert nem zártunk be pólust

$t<0 \rightarrow G(t)=0 \quad \rightarrow$ t-től függ a Green-fv !!!!

b) $t>0 \rightarrow w''>0$

$-w''t<0$ most $w''>0$ kell nekünk, hogy eltűnjön a lezárási vonal ⌒

⇓

felfelé kell lezárni

de ekkor a pólust is bezártuk!

$$\to \int = \lim_{R\to\infty} \int_{\cup}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_2}\,d\omega = \lim_{R\to\infty} \oint \frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_2} = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega_2}\right) =$$

$$= 2\pi i \lim_{\omega\to\omega_2} \cancel{(\omega-\omega_2)} \frac{e^{i\omega t}}{\cancel{\omega-\omega_2}} = 2\pi i\, e^{i\omega_2 t}$$

$$\int = 2\pi i\, e^{i\omega_2 t}$$

$$\Downarrow$$

$$G(t) = \frac{1}{4\pi\Omega}\left(2\pi i\, e^{i\omega_2 t} - 2\pi i\, e^{i\omega_1 t}\right) = \frac{i}{2\Omega}\left(e^{i\omega_2 t} - e^{i\omega_1 t}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\Omega}\left[e^{i(-\Omega+i\beta)t} - e^{i(\Omega+i\beta)t}\right] = \frac{i}{2\Omega}\left(e^{-i\Omega t-\beta t} - e^{i\Omega t-\beta t}\right) =$$

$$= \frac{i}{2\Omega} e^{-\beta t} \underbrace{\left(e^{-i\Omega t} - e^{+i\Omega t}\right)}_{-2i\sin\Omega t} = e^{-\beta t}\sin\Omega t \cdot \frac{\cancel{-2}\cancel{i}\cdot\cancel{i}}{\cancel{2}\Omega} =$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{\Omega}\cdot\sin\Omega t$$

$$\boxed{G(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{e^{-\beta t}\sin\Omega t}{\Omega} & t>0 \end{cases}}$$ → a Green-fv. t-től függ

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; f(\tau)\; G(t-\tau)$$

↓

a τ időpillanatban jövő impulzusra hogyan ~~egy~~ reagál a rendszer.

dτ −∞ → +∞ -ig megy

↓

a jövő~~ből is~~ben érkező jelre is reagál a rendszer?

$$L(D)\,G(t) = \delta(t)$$

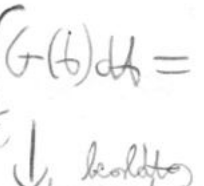
$$\ddot{G} + 2\beta\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t) \quad \Big/ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \ddot{G}(t)\,dt + 2\beta\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dot{G}(t)\,dt + \omega_0^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt = 1$$

$$\dot{G}(t)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + 2\beta\,\underbrace{G(t)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}}_{G(\varepsilon)-G(-\varepsilon)\ \xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ 0} + \omega_0^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G(t)\,dt = 1$$

G ~~folytonos~~, korlátos fv, és nincs ugrása

↓ korlátos



$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\dot{G}(\varepsilon) - \dot{G}(-\varepsilon)\right] = 1 \quad \Uparrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0} G(t)\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \to 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G(t)\,dt$$

$$\boxed{\dot G(+0)-\dot G(-0)=1}$$

G-nek törése van!

~~(G deriváltja) nem folytonos~~!

↓ fizikai jelentés:

rövid idő alatt véges impulzusváltozás

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} dT\, f(T)\; G(t-T)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} dT\, f_1(T)\; G(t-T)$$ → ez így jó lenne (mitől kapjuk a jeleket)

↓ nem jósol

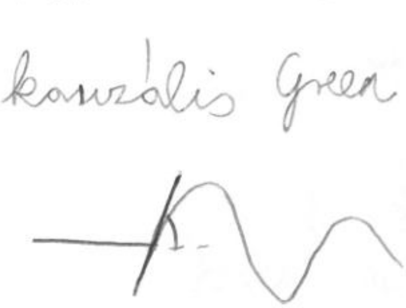
$$\Downarrow$$

ha $T>t \to t-T<0 \to G=0$

↓

- a reziduumtételes számolás ahhoz vezet, ami nem sérti az oksági viszonyt → a pólusok miatt a fizikai követelmények megjelennek

kauzális Green-fv.



hullámegyenletet is meg lehet oldani Green-fv.-el:

↓ csak itt 4 változó lesz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\Delta u=0$$

- homogén egyenlet → hullámterjedés
- inhomogén egyenlet ⇒ hullámkeltés

C(ω) átviteli fv

$$C=Ae^{-i\varphi}$$

$$C(\omega)=A(\omega)\cdot e^{-i\varphi\omega}$$

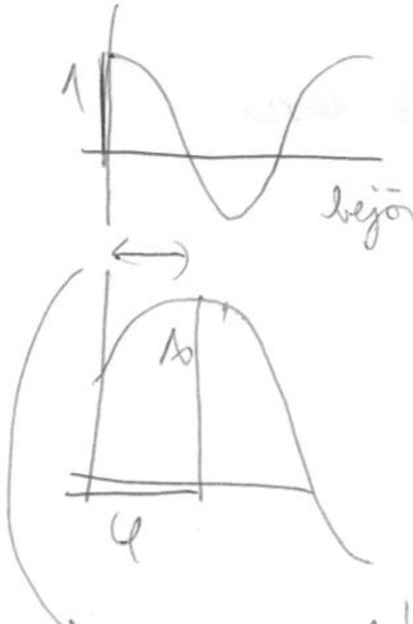
↓ $\cos\omega t$

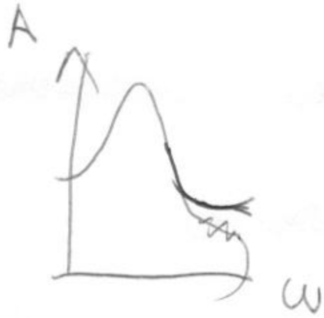
$$\mathrm{Re}\left(A(\omega)\,e^{-i\varphi(\omega)}\,e^{i\omega t}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\;A(\omega)\,e^{i(\omega t-\varphi(\omega))}$$

$$=A(\omega)\cos(\omega t-\varphi(\omega))$$

cos ωt

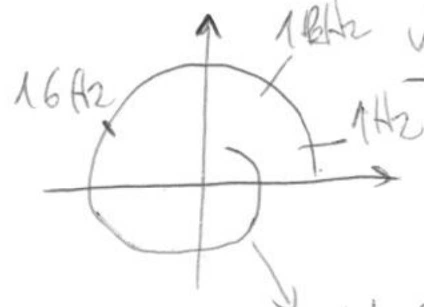




van valami fáziskésés

vagy másik lehetőség

$C(\omega)=A(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$



Nyquist-diagram

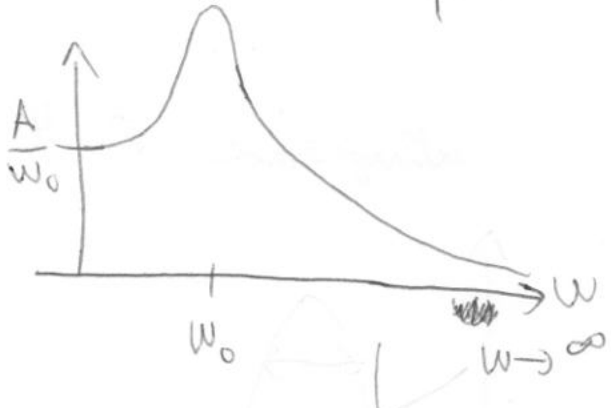
a távolság $A(\omega)$-t adja meg,
a szög a fázist

$$C(\omega)=\frac{-1}{\omega^2-2i\omega\beta+\omega_0^2}=\frac{-1}{(\omega^2-\omega_0^2)+2i\beta\omega}$$

$A(\omega)=|C(\omega)|$ $\quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a+ib}\right)$

$A(\omega)^2=|C(\omega)|^2 \; \overset{\|}{\frac{1}{|a+b|^2}}=\frac{1}{a^2+b^2}$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$



rezonanciagörbe

↓

magas frekvencián nem lesz nagy az amplitúdó

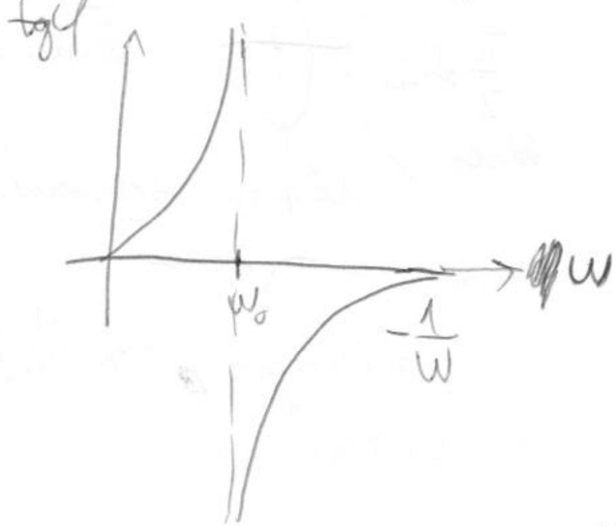
$$\frac{1}{a+ib}=Ae^{-i\varphi}$$

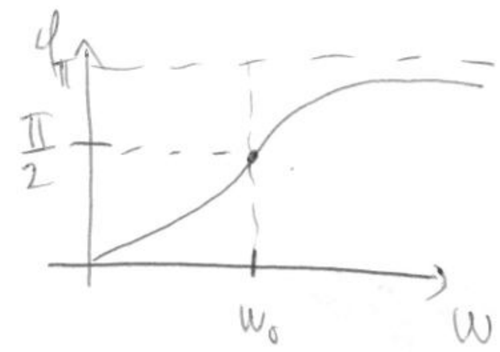
mi $Ae^{-i\varphi}$ -t adtunk meg

↓

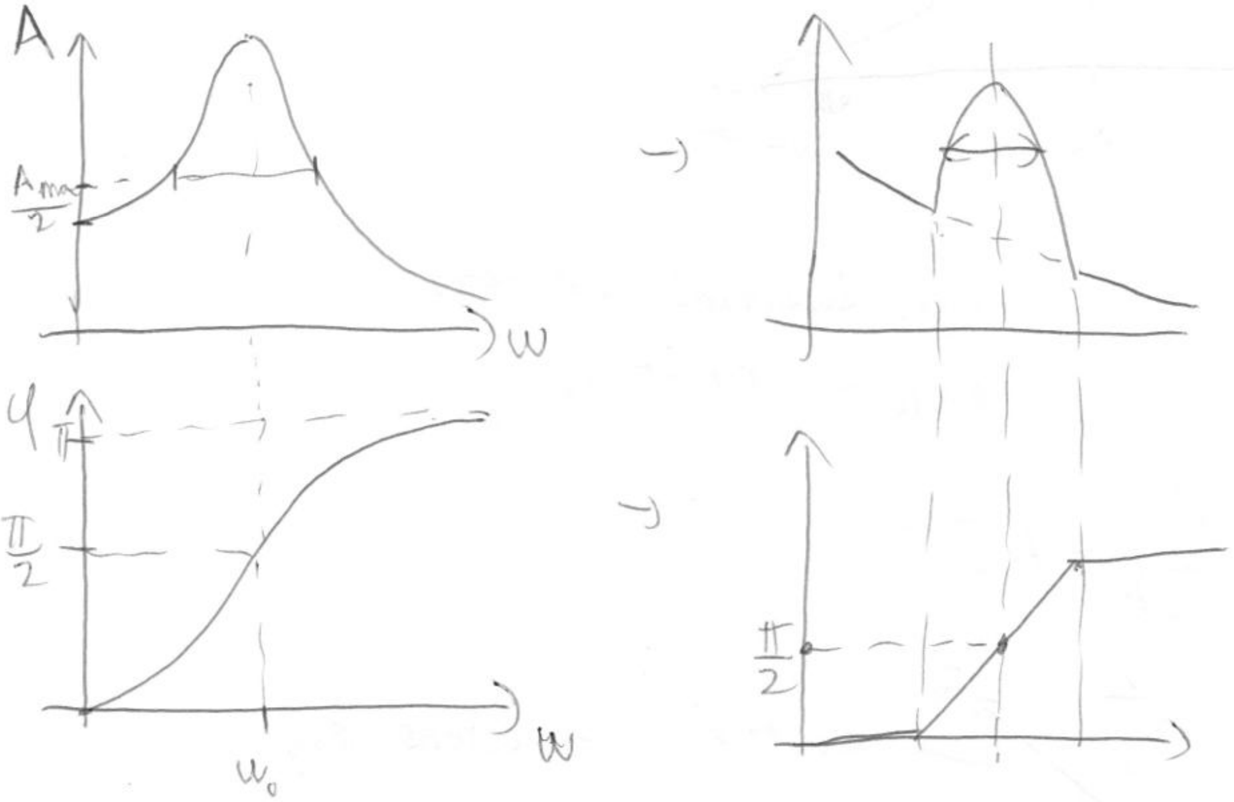
nem C-nek, hanem $\frac{1}{C}$ -nek lesz a szöge

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

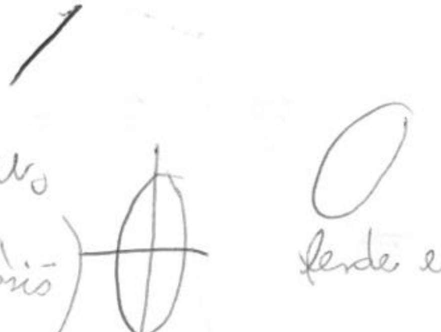




villanymérnöki közelítés



ω ~ 0 azonos fázis

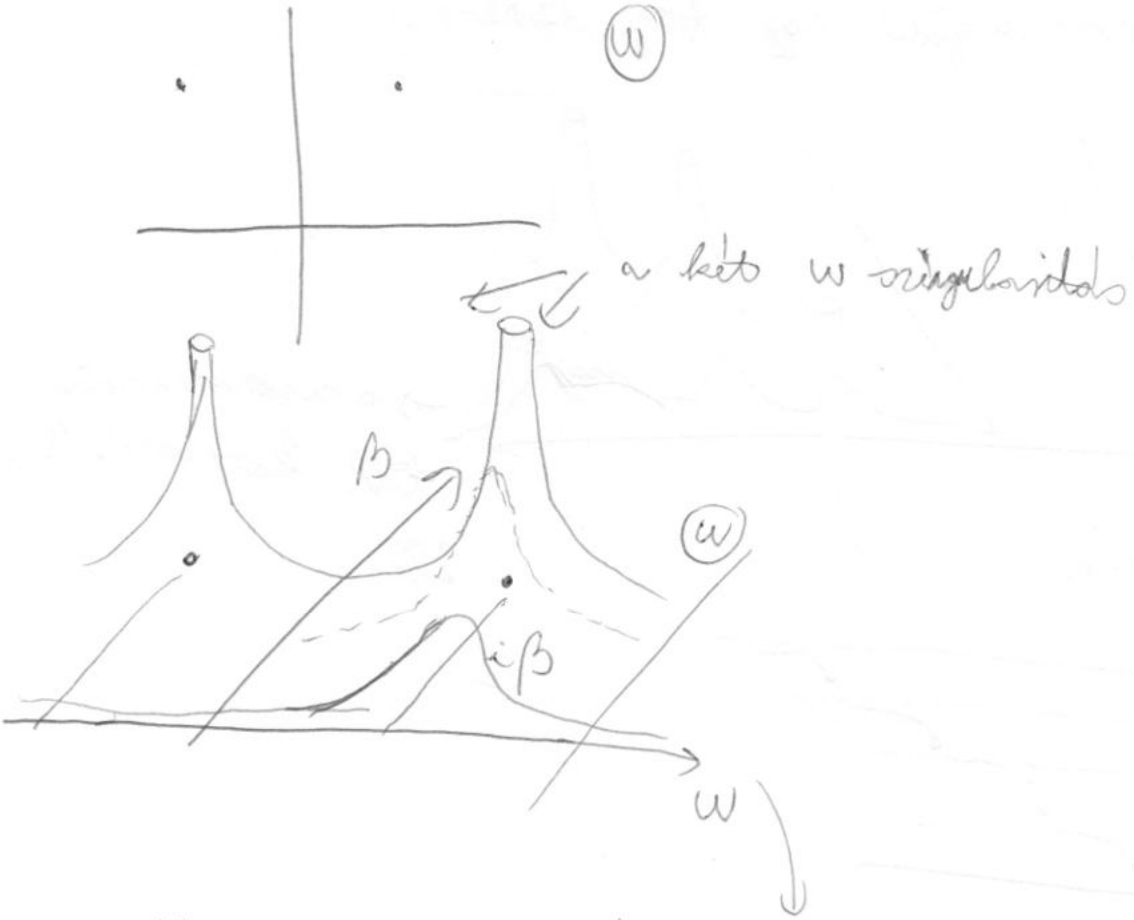


ω ~ ω₀

$\frac{\pi}{2}$ fázis késés

ferde ellipszis

$\underbrace{\text{ellipszis} \rightarrow \text{rezonancián}}_{\text{Lissajous-görbék}}$



amikor megyünk a valós egyenesen → metszet

↓

a rezonanciagörbe magassága függ attól, mekkora a β

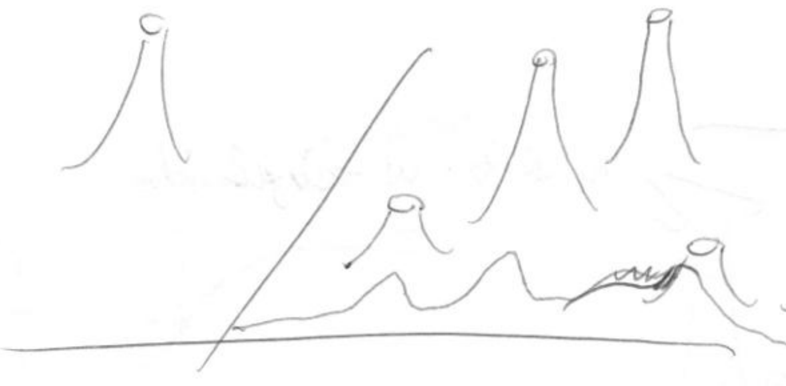
$$C(\omega) = \frac{-1}{\omega^2 - 2i\omega\beta + \omega_0^2}$$

Ha sok sing. van

$$C(\omega) = \frac{1}{\omega^{42} + \dots} = \frac{1}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\dots(\omega-\omega_{42})} = \frac{A_1}{\omega-\omega_1} + \frac{B}{\omega-\omega_2} + \dots \frac{Z}{\omega-\omega_{42}}$$

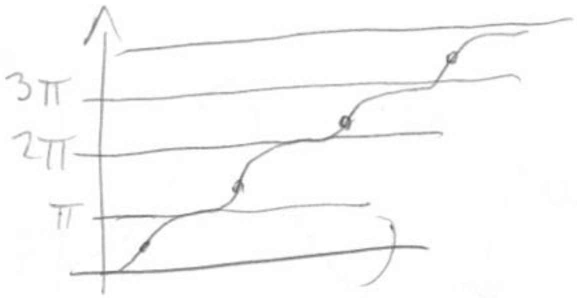
↓

→ rezonanciagörbe így fog kinézni



→ a rezonanciagörbe több komponensből áll

fáziskép



⇓

ugyanazt fejezi ki, mint a Res-tétel:

a pólusok (rendszer biz. mennyiségei) meghatározzák a rezonanciagörbe (fv.) viselkedését, és fordítva

↓

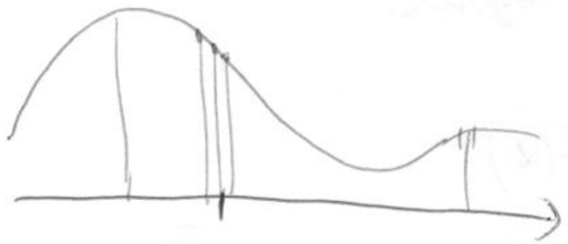
érdekesség: kvantummechanikában is rezonanciagörbéket mérnek → ebből határozzák meg a rendszert leíró diffegyenleteket

9. óra

Szélsőértékkeresés (bev. a variációszámításhoz)

Fv-ek szélsőértéke

1)



$y = f(x)$

$f'(x)$

$f'(x) = 0$

$\downarrow$

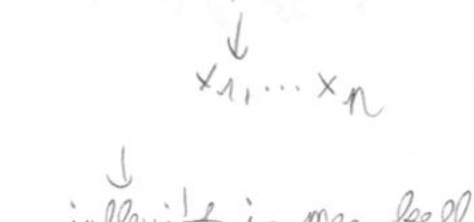
$x_1, \dots x_n$

$\downarrow$

inflexiót is meg kell nézni

pl. x^3-nél $f'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ de itt nincs szélsőérték!!

2) $z = f(x,y)$ bmilyen irányban nem változik a fv.érték!!



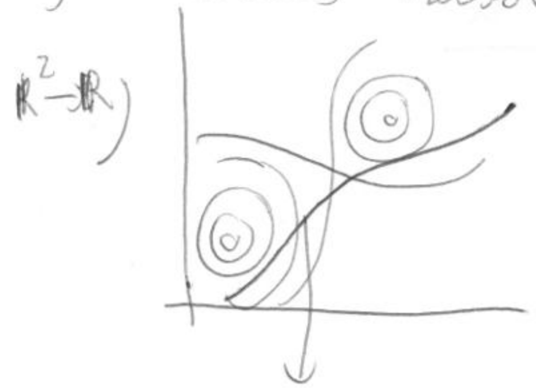
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = g(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = h(x,y) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{szélsőértékek} \\ \rightarrow (x_1, y_1) \\ (x_2, y_2) \\ \vdots \end{array}$$

egyenletrendszer
x-re, y-ra

~~3) Feltételes~~

n változó esetén n db parc. derivált

3) Feltételes szélsőértékkeresés: 0-ra redukált



ennek
hol volt
maximuma

$\varphi(x,y)=0 \rightarrow$ adott egy mellékfeltétel x, y között

$\downarrow$

$\exists\, y(x)$ ~~feltétele~~ kifejezése

$z = f(x, y(x)) = F(x)$

$\downarrow$

ennek már keressük
az x szerinti szélsőértékét

de ha nem tudjuk kifejezni φ-ből ~~vagy~~ $y(x)$-et!

Lagrange-multiplikátor

$$G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \lambda = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} & \varphi(x,y) = 0 \end{array}\right\} (x, y, \lambda)$$

---

3 egyenletes egy. rendszer $\rightarrow$ x, y. kifejezése

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$f(x,y,z,u,v) \to$ 6D-s (5 vált. + fv érték)

$$\left.\begin{aligned} MF_1 \quad & \varphi(x,y,z,u,v)=0 \\ MF_2 \quad & \psi(x,y,z,u,v)=0 \end{aligned}\right\}$$ ezek 1-1-el csökkentik a dimenziószámot

(~~szemléletes~~) jelentés: a 6D-s térben
a mellékfeltételek 5D-s hiperfelületeket alkotnak
ezek metszete 4D-s

$\Downarrow$

ilyenkor:

$G(x,y,z,u,v,\lambda,\mu) = f + \lambda\varphi + \mu\cdot\psi \to$ 2 db multiplikátor

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} \qquad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = \varphi(\ldots) \overset{!}{=} 0$$ $\to x,y,z,u,v,\lambda,\mu$ kifejezése

$$\frac{\partial G}{\partial u} \qquad \frac{\partial G}{\partial \mu} = \psi(\ldots) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}$$

↳ így általában ki lehet fejezni a változókat

→ lokális maximumkeresés

Variációszámítás

1) Most fv-eket vizsgálunk vektorok helyett

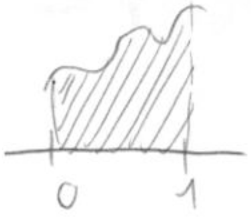
$\Phi \overset{\exists}{\cancel{\to}} f$

$\Phi \to \mathbb{R}$ fv-hez számot rendel: funkcionál

pl. fv → fv. maximuma (egy szám)

fv → fv. min.-a.

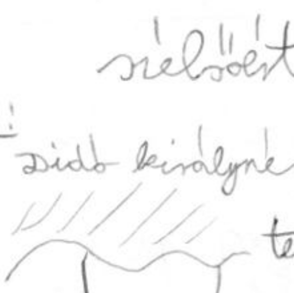
fv →



= Variációszámítás: ~~az~~ a fv-t keressük, amire a fv-en értelmezett fv-nek (funkcionál) szélsőértéke van

2) Pl.:

a) Didó királynő:



→

(0,a)

↓

2 pont között keressük a maximális területet

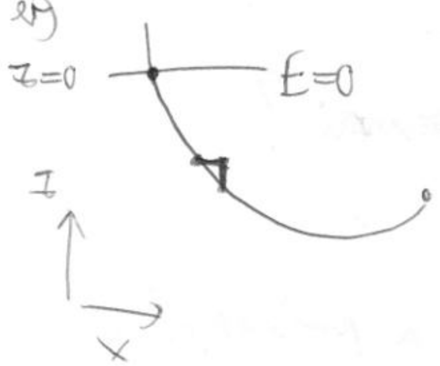
$T = \int_0^a f(x)\,dx = T[f]$ funkcionál

Mf: $\int \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \overset{!}{=} L = \text{áll}$

↓

ennek a szélsőértékét keressük

e)



$z = f(x)$ → ~~a~~zt az $f(x)$-et keressük, melyre min. idő alatt ér le

$$E = \frac{m}{2}v^2 + mgz$$

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \qquad \frac{dz}{dx} = f'(x)$$

$$ds^2 = dx^2 + f'(x)^2 dx^2 = \qquad dz = f'(x)\cdot dx$$

$$= dx^2\left(1+f'(x)^2\right)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1+f'(x)^2}$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1+f'(x)^2\right) + mgf(x)$$

$$\frac{2}{m}\left(E - mg\,f(x)\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(1+f'(x)^2\right)$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}\frac{E-mgf(x)}{1+f'(x)^2}} = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = dx\sqrt{\frac{m}{2}\frac{1+f'(x)^2}{E-mgf(x)}}$$

$$T = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{\alpha} dx\sqrt{\dots} = T[f]$$

↗ adott fv.-re ez egy szám

↓ teljes idő

↓

3) – Hogy kell ennek a szélsőértékét megkeresni?

↓

Egy differenciálegyenletet rendelünk a problémához, amit megoldhatunk

(szélsőértékfeladat → szám keresése → algebr. egy. → szám
variációszám → fv. −||− → diff. egy. → fv.)

$$\underbrace{T[f]}_{\text{funkcionál}}=\int_a^b dx\, L\left(f(x), f'(x), x\right)$$

vmilyen bony.

↘ x szerinti integrálját rendeli f-hez

Mechanikában:

$t \quad q(t) \quad \dot{q} \quad \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t) = S[q]$ → ugyanaz a feladat

S: hatásintegrál

L: J mértékegység

S: Js −||−

- $T[f_1, f_2 \ldots f_n] = \int dx\, L(f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots f_n, f_n', x)$
- ezek akár több változótól is függhetnek
  ↳ térelmélet $f(x,y,z,t) = f(\underline{r},t)$

↓
- Többdim.-ban többdimenziós integrál (4D-s integrál)
  ↳ parcdiffegy. rendszert adnak

- $L(f, f', f'', f''', \dots x)$ → fizikában ilyen nincs (még), de matematikában létezik

általánosítások:

= több fv., több vált., magasabb deriváltak

funkcionál: konkrét szám adott fv-re

~~(4) fun~~

4) Hamilton-féle módszer (Lagrange-formalizmus)

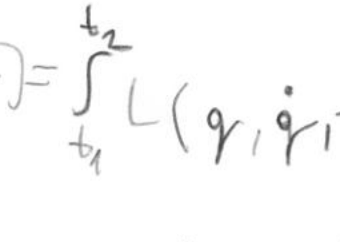
$q(t)$

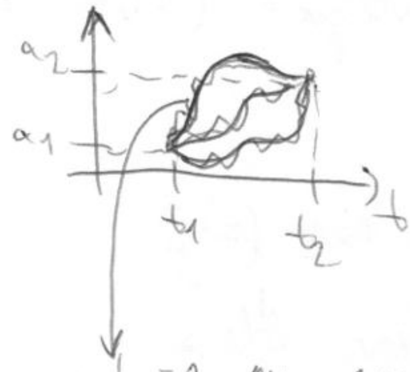
$L(q, \dot{q}, t)$ (mechanikában $L = K - V$)

most L tetszőleges fv.

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$ q: folyt., diffható fv.

Hamiltoni módszernél: t_1, t_2 adott (2 perem)

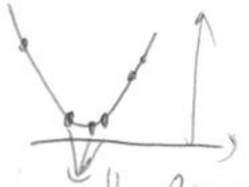




nézzük meg egy adott pályán a funkcionál

(szomszédos pályára (variált pálya) → változott-e a funkcionál

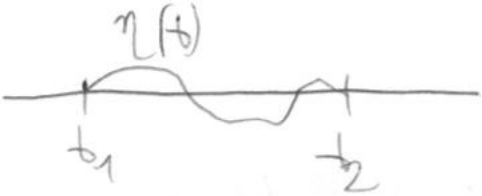
(



első közelítésben nem változik)

↓

ez így bonyolult



$\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$ η: rögzített fv.

$q'(t)=\underbrace{q(t)}+\varepsilon\eta(t)$ → kicsit megváltoztatjuk a fv-t

↓ variált fv.

$q(t_1)=q(t_2)=0$

ε fv-e adott q-ra / η-ra

$$S[q']=\int_{t_1}^{t_2}dt\, L(q+\varepsilon\eta,\dot q+\varepsilon\dot\eta,t)=S(\varepsilon)$$

↓

mennyi lesz most a funkcionál?

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \frac{d}{d\varepsilon} L(q+\varepsilon\eta, \dot{q}+\varepsilon\dot{\eta}, t) =$$

$f(x_k(t))$ → összetett fv. deriváltja

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon}(q+\varepsilon\eta)}_{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon}(\dot{q}+\varepsilon\dot{\eta})}_{\dot{\eta}} \right) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \eta + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{f} \cdot \underbrace{\dot{\eta}}_{\dot{\eta}} \right) \overset{!}{=} 0$$ akármilyen ε-ra szélsőértéke van

Ha pont a szélsőértéket keresem $\frac{dS}{d\varepsilon} = 0$

msz: $(f\eta)^{\cdot} = \dot{f}\eta + f \cdot \dot{\eta}$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \eta + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \eta\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \cdot \eta \right] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \eta(t) \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0,\ \text{mert}} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right) \eta(t) = 0$$

$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

$\forall g$-re (g tetszőleges)

↑

↓ η-t tetszőlegesnek választom

akkor lesz $\forall \eta$-ra 0 ~~(ha)~~ ha az $\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\eta(t)$ integrálban:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$ Euler-Lagrange d.e. (ELE)

~~Rövidebb levezetés~~: Más jelöléssel:

$L(q, \dot{q}, t)$

$\frac{\partial L}{\partial q} = Q(q, \dot{q}, t)$ → általánosított erő

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p(q, \dot{q}, t)$ → —ıı— imp.

$\int dt \left(Q \cdot \eta + \dot{\eta} \cdot p\right) = 0$

$\int (Q - \dot{p})\, \eta\, dt = 0$

$Q - \dot{p} = 0$

$\dot{p} = Q$

rövidebb levezetés:

$q \to q+\delta q$ → ha $q(t_1)=q(t_2)$ volt

akkor $(q+\delta q)(t_1)=(q+\delta q)(t_2)=0$

$$\Downarrow$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2)=0$$

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$$

$$\delta S = S[q+\delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q+\delta q, \dot q + (\delta q)^{\cdot}, t) -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot q,t) =$$

Taylor-sor

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\cancel{L(q,\dot q,t)} + \frac{\partial L}{\partial q}\Big|_{\delta q=0} \cdot\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big|_{\delta q=0}\cdot \delta \dot q\right] - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \cancel{L(q,\dot q,t)} =$$

msz.:

$(\delta q)^{\cdot} = \delta(\dot q)$ → δq a fv megváltoztatása

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(Q\,\delta q + \overbrace{(p\,\delta q)^{\cdot} - \dot p\,\delta q}^{\text{parc. int.}}\right) =$$

$$= p\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\,(Q-\dot p)\,\delta q(t) \overset{!}{=} 0$$

$\boxed{\dot p = Q}$ → ez egy másodrendű diffegyenlet

(ált. imp.)$^{\cdot}$ = ált. erő

a 2 ekvivalens egymással

↓

a diff. egyenletek eredeti nyelve kauzális:

kezdeti értékeket kell megadni

↓

eredetileg a probléma megfogalmazása a peremértékeket adta meg

↳ céloksági (teleologikus) megfogalmazása

a végén már a ~~szélső~~ peremértékekkel nem foglalkozunk → ált.-an szélsőértéke van az adott ~~funk~~ pályára a funkcionálnak

ZH. 2011. 12.20 (kedd) 11–14 h !

megj.: Didó királynő

→ ha a 2 pont kül. távolságra van egymástól

↓

megoldjuk paraméteresen ~~M~~ s-re ELE-t → a megoldás s fv-e lesz

Magasabb deriváltak:

$$S = \int dt\, L(q, \dot q, \ddot q, t)$$

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ $\qquad Q = \frac{\partial L}{\partial q} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$

$\delta \dot q(t_1) = \delta \dot q(t_2) = 0$ $\qquad z = \frac{\partial L}{\partial \ddot q}$

$$\delta S = S[q+\delta q] - S[q] = \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\delta \dot q + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \ddot q\right) =$$

$$= \int dt \,(Q\delta q + p\delta \dot q + z\cdot\delta \ddot q = \int dt \,\Big(Q\delta q + \underbrace{(p\delta q)^{\cdot}}_{} - \dot p\delta q +$$

$$+ \underbrace{(z\delta \dot q)^{\cdot}}_{} - \dot z\delta \dot q =$$

$(p\delta \dot q) = (p\delta q)^{\cdot} - \dot p\delta q$

$z\delta \ddot q = (z\cdot\delta \dot q)^{\cdot} - \dot z\delta \dot q$

~~$= (p\delta q + z\delta \dot q)\Big|_{t_1}^{t_2}$~~

$$= \underbrace{(p\delta q + z\delta \dot q)}_{\overset{!}{=}0}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int dt\,(Q\delta q - \dot p\delta q - \dot z\delta \dot q) =$$

$$= \int dt\,\left[Q\delta q - \dot p\,\delta q - (\dot z\delta q)^{\cdot} + \ddot z\,\delta q\right] = (\dot z\delta q)\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int dt\,(Q - \dot p + \ddot z)\,\delta q \overset{!}{=} 0 \quad \forall(\delta q)\text{-ra}$$

$$Q - \dot p + \ddot z = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right) = 0}$$ ELE

→ 4. deriváltat is tartalmaz

$\downarrow$

(n. deriváltra):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) + \ldots + (-1)^n \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^n \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right) = 0}$$

- Több változóra:

$$q_k(t) \to k = 1 \ldots f$$

$$\underbrace{L(q_k, \dot{q}_k, t)}_{2f+1}$$ f szab. fokok száma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

$$\left.\begin{array}{l} q_k \to q_k + \delta q_k(t) \\ \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \end{array}\right\} \forall q_k\text{-ra}$$

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt\, L(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k, t) -$$

$$- L(q_k, \dot{q}_k, t) = \int dt \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) =$$

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ált. kanonikus impulzus

$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ ált. erő

$$=\sum_{k=1}^{l}\int dt\,\left(Q_k\delta q_k+p_k\delta\dot q_k\right)=\sum_{k=1}^{l}\int dt\,\left(Q_k\delta q_k+\left(p_k\delta q_k\right)^{\cdot}-\right.$$

$$\left.-\dot p_k\delta q_k\right)=\sum_{k=1}^{l}\Big(\underbrace{\left[\left(p_k\delta q_k\right)\right]_{t_1}^{t_2}}_{0}+\int dt\left(Q_k-\dot p_k\right)\delta q_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{l}\int dt\left(Q_k-\dot p_k\right)\delta q_k(t)\overset{!}{=}0$$

$\forall(\delta q_k)$-ra

$\downarrow$

különn-külön mindegyik integrál 0 ($\forall\,\delta q_k$-ra

szélsőérték)

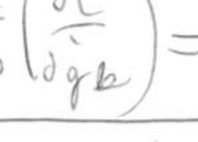
$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_k}}$$

$k=1\ldots l$

ez akkor nem igaz, ha van kényszer

pl. dróton mozgás



konfiguráció tér 6 dim.-s

$$(\underline{r}_1-\underline{r}_2)^2=l^2\qquad(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2\overset{!}{=}0$$

$\xleftarrow{\hspace{3cm}}$ $\downarrow$ $\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)=0$

↓

6D-s térben 5D-s hiperfelület (altér)

↓

nem függetlenek a vált.-k

↓ ↘

kifejezem valamelyik derékszögű!! k.-t

más koordinátákat veszek!

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_1 = \overset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\underline{R}} + \frac{l}{2}\underline{n} \quad \nearrow n(\theta,\varphi)$$

$$\underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{l}{2\underline{n}}$$

$$\underline{r}_1 - \underline{r}_2 = l\underline{n}$$

$$|\underline{r}_1 - \underline{r}_2| = l$$

⇓

x, y, z, θ, φ: független kordináták

⇓

ha egymástól független változókat választunk, így lesz az ELE

↓

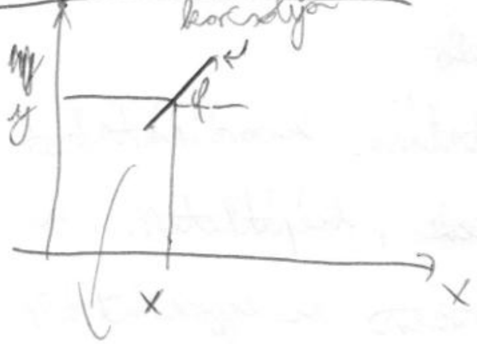
általánosított kordinátá~~kat~~

↓

- ilyenkor gondolkozni kell a k. választáson, utána a derékksz.-eket kifejezni ezekből
- de utána automatikus a példa

~~(derékksz)~~

Anholonom kényszer

– 

Ha a sebességben van kényszer

csak az akt. szög irányába mozdulhat el!

$$\frac{dy}{dx} = tg\varphi$$

$$dy \cos\varphi - dx \sin\varphi = 0 \quad /:dt$$

$$\dot{y} \cos\varphi - \dot{x} \sin\varphi = 0$$

– kör középpontjának megadása

$$dx = R d\varphi$$

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}$$

= a sebességek (koord.-k deriváltjai) között van összefüggés

holonom kényszer ~~rendszer~~ $\xrightarrow{\text{deriválás}}$ anholonom kényszer

$\xleftarrow{\text{integrálás}}$ nem mindig lehet

ha megfelelő általános koordinátákat veszek, beépíthetem a kényszert az egyenletekbe, és nem kell vele külön foglalkozni

$x = l\sin\varphi$

$z = -l\cos\varphi$

$\dot{x} = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$\dot{z} = l\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = l^2\dot{\varphi}^2$

$L = K - V$

$K = \frac{m}{2}v^2 = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$

$V = +mgz = -mgl\cos\varphi$

$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m^2\dot{\varphi}$

$Q = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$

$\dot{p} = ml^2\ddot{\varphi} = Q = -mgl\sin\varphi$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

Lagrange -multiplikátor

→ egy ponton túl

a madzagra ránehezedne a golyó, de ezt nem bírja a madzag (nem tud tolni)

↓

ferde hajítás

$r(t)$

$\varphi(t)$

$x = r\sin\varphi$

z ~~y~~ $= -r\cos\varphi$

$\dot{x} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\dot{z} = -\dot{r}\cos\varphi + r\dot{\varphi}\sin\varphi$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2$

$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$

$V = mgz = -mgr\cos\varphi$

$L = K - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos\varphi$

↓

ha r és φ is változhat, akkor ez a ~~szabad~~ ferde hajítás (csak példában)

$\boxed{\text{DE + kényszer:}}$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2\right)+mgr\cos\varphi = L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi)$$

$$\boxed{\phi = r - l \overset{!}{=} 0} \rightarrow \text{kényszer}$$

$$L' = L + \lambda(t)\cdot\phi(r,\varphi) = L'(r,\dot r,\varphi,\dot\varphi,\lambda,\cancel{\dot\lambda})$$

↓
módosított Lagrange-fv

↓
így kezelem, mint több változós (3 vált.) rendszer

$$\frac{\partial L'}{\partial r}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot r} \quad \Bigg| \quad \frac{\partial L'}{\partial \varphi}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot\varphi} \quad \Bigg| \quad \underbrace{\frac{\partial L'}{\partial \lambda}}_{\phi(r,\varphi)=0}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot\lambda}\right) \quad !!$$

$$L'=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2\right)+mgr\cos\varphi+\lambda(r-l)$$

$r-l=0$ → mozgásegyenletként jelenik meg

$$p_r=\frac{\partial L'}{\partial \dot r}=m\dot r \quad Q_r=\frac{\partial L'}{\partial r}=mr\dot\varphi^2+mg\cos\varphi+\lambda$$

$$\dot p_r=m\ddot r$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L'}{\partial \dot\varphi}=mr^2\cdot\dot\varphi \quad Q_\varphi=\frac{\partial L'}{\partial \varphi}=-mgr\sin\varphi$$

$$\dot p_\varphi=\left(mr^2\dot\varphi\right)^{\cdot}$$

$$p_\lambda=\frac{\partial L'}{\partial \dot\lambda}=0 \qquad Q_\lambda=\frac{\partial L'}{\partial \lambda}=\phi=r-l$$

$$m\ddot r=mr\dot\varphi^2+mg\cos\varphi+\textcircled{\lambda}$$ kötélerő!!

$$\left(mr^2\cdot\dot\varphi\right)^{\cdot}=-mgr\sin\varphi$$

$$r-l=0$$

$r = l \to \dot{r} = 0 \to \ddot{r} = 0$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \to \varphi(t) \to \dot{\varphi}(t)$$

ugyanazokat a mozgásegyenleteket kaptuk

$$0 = ml\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \overset{+}{\cancel{=}} \lambda$$

$\downarrow$

$\to \lambda = \dots$

$\downarrow$

akkor szakad meg a mozgás, ha $\lambda < 0$ lesz

VAGY:

$$E = K + V = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = \frac{mv_0^2}{2} - mgl$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{g}{l}(1-\cos\varphi)$$

$\lambda(v_0, \varphi) \to$ milyen kezdősebességnél milyen szögnél válik 0-vá λ

Ált.-ban a kényszerekkel nem foglalkozunk, de amikor fontos a kényszer (pl. kötél nem tud tolni, ...)

↳ Lagrange-multiplikátorral kényszert építek be, de továbbra is ált. koordinátákkal írom le a rendszert

a Lagrange - multipl. nagysága a kényszere jellemző
↓
kinetosztatika : kényszer~~erőkkel~~ foglalkozik
erőkkel

Ha: $L(q, \dot{q}, t) = \dot{q}$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 1$

$Q = \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$\dot{p} = \dot{1} = 0$

$\boxed{0=0}$

↓

minden fv. esetén felveszi a szélsőértéket

$S = \int L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}\, dt = q \Big|_{t_1}^{t_2} = q_2 - q_1 = \text{konst.}$

↙

S-nek mindenhol szélsőértéke van

$L(q, \dot{q}, t) = q$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$Q = \frac{\partial L}{\partial q} = 1$

$\dot{p} = 0$

$\dot{p} = Q$

$\boxed{0=1}$ → ez nem egy algebrai egyenlet, hanem annak a feltétele, hogy ~~a fv.~~ szélsőértéke legyen egy adott fv-re a funkc.-nak

↙

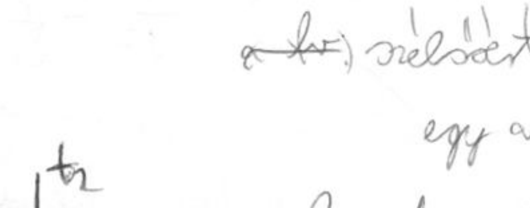
pl. ferde lejtőn
↓
~~L(t)~~ nincs stacionárius megoldás

$L(q, \dot{q}, t) = \sin q$

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

$Q = \frac{\partial L}{\partial q} = \cos q$

$\dot{p}\,\cancel{p} = 0 \quad 0 = \cos q$



$L' = L + \frac{df}{dt}$

$S' = \int L' dt = \int L dt + \int \frac{df}{dt} dt = S + \underbrace{f(t_2) - f(t_1)}_{K}$

$\downarrow$

ha a Lagrange-fv-hez egy teljes deriváltat → ilyen pl. a +konstans is
adunk hozzá, a szélsőérték helye nem vált.

$\Downarrow$

ugyanazt a rendszert írja le ugyanazzal
~ mozgásegyenlettel

10. óra

0) ism. $q_k(t)$ → melyikre lesz szélsőértéke a hatásnak

$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_k, \dot{q}_k, t) = S[q_k]$

→ az eredmény egy d.e. lesz, melyet a szélsőértékhez tartó pályák elégítenek ki

$\delta S = 0$

$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$

$\dot{p}_k = Q_k$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}} \qquad k=1, \dots f\text{-re}$$

ELE

$r_k = r_k\left(q(t), \dot q, t\right)$

ez teljes derivált!

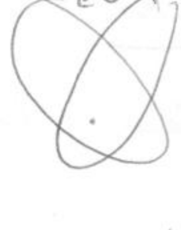
a belső fv-eket $(q, \dot q)$ is deriválni kell

1) ~~Lehetséges:~~ Ciklikus koordináta

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$ → pl. ellipszisnél

⇕ rendszernek forgásszimmetriája van

mindkettő mo.



⇓

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right) = \dot p_1 = 0$

$\underline{\underline{p_1 = \text{konstans}}}$ (megmar. tétel)

↑

(hogy mennyi a konstans, azt a KF-ek mondják meg

a diffegy. „első integrálja" → csak első deriváltak szerepelnek benne

pl. Kepler-probléma

$E = \text{áll}$ $\quad N = \text{áll}$

$\dot r, \dot\varphi$-ra egyenlet (elsőrendű d.e.)

ciklikus koordinátához tart. impulzus = mozgásállandó!

- ha minden koord. ciklikus → elsőrendű d.e.
- ha nem -||- , átalakítható koord. transzformációkkal a feladat úgy, hogy ciklikusak legyenek.

2) Beltrami-fv. (Hamilton-fv.)

$$B(q, \dot q, t) = \underbrace{\sum_k p_k \dot q_k}_{!!!} - L$$

$$\frac{dB}{dt} = \sum_k \dot p_k \dot q_k + p_k \ddot q_k - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \ddot q_k \right)$$

$$= \sum_k \cancel{p_k} \underbrace{\left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right)}_{\equiv 0} \ddot q_k + \sum_k \underbrace{\left(\dot p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right)}_{} \dot q_k = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\left(p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \right)$

akkor egyenlőek, ha teljesülnek az

← EL-ek

csak a valódi mozgáspályákra teljesül

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

ha $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dB}{dt} = 0 \rightarrow B = \text{áll.}$

Mikkor függ a L. explicit az időtől?

$L = K - V$ ~~$\in K(\dot{q})$~~

↑↗

explicite $q, \dot{q}$ -tól függenek,

kivéve, ha $V(\dots t)$ vagy $K(\dots t)$

↑

expl.

↓

időben nem eltolásinvariáns rendszer:

pl. mozgó bolygó / töltés potenciálja, tömeg változik (kámfor), ...

- autonóm rendszer = zárt rendszer:

nem hat kölcsön a külvilággal

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \to \boxed{B = \text{konst}}$ megmaradási tétel

B a rendszer energiája

energia: ~~az~~ a rendszert jellemző áll., ha az időbeli eltolásinvariáns

(ha $B \neq$ áll, akkor is B-t ~~[illegible]~~ nevezik energiának)

$B \leftrightarrow$ Energia = áll

időbeli invar.

p = impulzus = áll

forgásinvariancia

Általános koordináták:

3) $\phi_l(x_i \dots) = 0$ → van vmilyen kényszerfeltétel a koord.-k között

$x_i: i=1,2,\dots 3N$

q_k: ill $\underbrace{k=1 \dots f}_{\text{szab. fokok}} \leq 3N$ → N db golyó esetén 3·N koordináta

$x_i(q_k)$

↓

elképzelhető, hogy kevesebbel is leírható, mint 3N

pl. inga

$x = l\cdot\sin\varphi$

$y = l\cdot\cos\varphi$

de l = áll

↓

$\varphi(t)$ ált. k.

majom $l(t) = l_0 - at$

$x = l(t)\cdot\sin\varphi(t)$

$z = -l(t)\cdot\cos\varphi(t)$

$\dot x = \dot l \sin\varphi + l\cos\varphi\cdot\dot\varphi$

↓

ilyenkor l is változik

$\boxed{x_i(q_k) \text{ a kényszerből megkapható!}}$

$$v_i = \dot x_i = \frac{d}{dt} x_i(q_k(t),t) = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\cdot \dot q_k$$

→ q_k általános koordináták

minden golyóra igaz

↓

$x_i^a(q_k,t)$

$$\dot x_i^a = \frac{\partial x_i^a}{\partial t} + \sum_k \frac{x_i^a}{\partial q_k}\dot q_k$$

$a=1\dots N$

$i=1..3$

$$v_a^2 = \sum_{i=1}^{3} \dot x_i^a \dot x_i^a = \sum_i \left(\frac{\partial x_i^a}{\partial t}\right)^2 + 2\sum_i \frac{\partial x_i^a}{\partial t}\cdot \sum_k \frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}\dot q_k +$$

$$+\sum_i\left(\sum_k \frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}\cdot\dot q_k\right)\left(\sum_l \frac{\partial x_i^a}{\partial q_l}\cdot\dot q_l\right)$$

$\downarrow$

a. golyó kinetikus energiája:

$$K=\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a v_a^2}{2}=\sum_a \frac{m_a}{2}\sum_i\left(\frac{\partial x_i^a}{\partial t}\right)^2+\sum_a m_a\sum_i\frac{\partial x_i^a}{\partial t}\sum_k\frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}\cdot\dot q_k+$$

$$+\sum_a\frac{m_a}{2}\sum_i\sum_k\sum_l\frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial x_i^a}{\partial q_l}\cdot\dot q_k\cdot\dot q_l$$

$$V(x(a,t))=V(\underset{\nearrow}{q},t)$$ → van, amikor ez szebb, pl.

ált. k.

$$k\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=k\cdot\frac{q}{\boxed{r}}$$

↗ polárban

a Lagrange ált. koordinátákkal felírva

$$L=K-V$$

$$L=\frac{1}{2}\sum_a\sum_l\overbrace{\left(\sum_a m_a\sum_i\frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial x_i^a}{\partial q_l}\right)}^{g_{kl}(q,t)}\cdot\dot q_k\cdot\dot q_l+$$

$$+\sum_k\left(\underbrace{\sum_a m_a\frac{\partial x_i^a}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_i^a}{\partial q_k}}_{A_k(q,t)}\right)\dot q_k+\underbrace{\left[\sum_a\frac{m_a}{2}\sum_i\left(\frac{\partial x_i^a}{\partial t}\right)^2-V(q,t)\right]}_{W(q,t)}$$

$x(q,t)$ → x_i^a-k ki vannak fejezve q-val

$$L=\frac{1}{2}\sum_k\sum_l \underbrace{g_{kl}}_{g:\ \text{metrikus tenzor}}(q,t)\,\dot q_k\dot q_l+\sum_k A_k(q,t)\,\dot q_k+W(q,t)$$

$g_{kl}=g_{lk}$ (szimm.)

↓

a Lagrange-fv. ált. alakja:

fizikában csak ilyen L. jöhet ki (mat-ban lehet más is ~~[illegible]~~)

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$$

$$L=\frac{1}{2}\sum_l\sum_m g_{lm}(q,t)\,\dot q_l\dot q_m+\sum_l A_l(q,t)\,\dot q_l+W(q,t)$$

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}=\frac{1}{2}\sum_l\sum_m g_{lm}\frac{\partial}{\partial \dot q_k}(\dot q_l\dot q_m)+\sum_l A_l\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_k}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_l\sum_m g_{lm}\Big(\underbrace{\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_k}}_{\delta_{kl}}\cdot\dot q_m+\dot q_l\underbrace{\frac{\partial \dot q_m}{\partial \dot q_k}}_{\delta_{km}}\Big)+\sum_l A_l\underbrace{\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_k}}_{\delta_{kl}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_l\sum_m g_{lm}(\delta_{kl}\cdot\dot q_m+\delta_{km}\dot q_l)+\sum_l A_l\delta_{kl}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_m g_{km}\dot q_m+\frac{1}{2}\sum_l \underbrace{g_{lk}}_{=g_{kl}}\dot q_l+A_k=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_l g_{kl}\dot{q}_l + \frac{1}{2}\sum_l g_{kl}\cdot\dot{q}_l + A_k =$$

$$= \boxed{\sum_l g_{kl}\cdot\dot{q}_l + A_k = p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}$$

az imp. legált. alakja

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_l\sum_m \frac{\partial g_{lm}}{\partial q_k}\dot{q}_l\dot{q}_m + \sum_l \frac{\partial A_l(q,t)}{\partial q_k}\cdot\dot{q}_l + \frac{\partial W}{\partial q_k}$$

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_l g_{kl}\cdot\dot{q}_l + A_k\right) = \sum_l g_{kl}(q,t)\,\ddot{q}_l + \dot{q}_l\left(\frac{d}{dt}g_{kl}(q,t)\right) +$$

$$+ \frac{d}{dt}A_k(q,t) = \sum_l g_{kl}(q,t)\cdot\ddot{q}_l + \sum_l \dot{q}_l\left(\frac{\partial g_{kl}(q,t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \sum_m \frac{\partial g_{kl}(q,t)}{\partial q_m}\cdot\dot{q}_m\right) + \frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial q_l}\dot{q}_l$$

— Mozgásegyenlet ELE-ből:

$$\boxed{0 = \dot{p}_k - Q_k} = \sum_l g_{kl}\ddot{q}_l + \sum_l\sum_m \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_m}\dot{q}_l\dot{q}_m - \sum_l\sum_m \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lm}}{\partial q_k}\cdot$$

$$\cdot\dot{q}_l\dot{q}_m + \sum_l \dot{q}_l\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial q_l} - \frac{\partial A_l}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0$$

~~$\sum_l g_{kl}(q,t)\,\ddot q_l + \sum$~~ Γ_{klm}

$$\sum_l g_{kl}(q,t)\,\ddot q_l = \sum_l \sum_m \boxed{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{lm}(q,t)}{\partial q_k} - \frac{\partial g_{kl}(q,t)}{\partial q_m}\right)}\dot q_l\,\dot q_m +$$

$$+ \sum_l \left(\boxed{\frac{\partial A_l}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_l}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right)\dot q_l + \boxed{\left(\frac{\partial W}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k(q,t)}{\partial t}\right)}$$

$$\Gamma_{klm} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{lm}}{\partial q_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_m} \qquad Z_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}$$

$$f_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_l}$$

$$\sum_l g_{kl}(q,t)\cdot\ddot q_l = \sum_l\sum_m \Gamma_{klm}\,\dot q_l\,\dot q_m + \sum_l\left(f_{kl} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right)\cdot\dot q_l + Z_k$$

$$\underbrace{\boxed{g_{kl}}}\ \boxed{\ddot q}$$

ált. ban van inverze ~~(és 0)~~

↑

det ≠ 0 (ált. ban det > 0)

de van úgy, hogy nincs inverz!

$\det g = 0$

↳ ezzel nem foglalkoztak a $\overset{!}{19}$. században

Dirac csinálta meg a $\overset{!}{20}$. században

$g(q,t)$ + bizonyos pontokban (q-kban) nincs inverze

<u>Most</u> Tfh. g invertálható, és $\underline{\underline{g}}^{-1} = \underline{\underline{h}}$

$\cdot \sum_k h_{pk}$

$$\sum_k h_{pk} g_{kl} = (hg)_{pl} = I_{pl} = \delta_{pl}$$

mozgásegyenlet
átt. koor.-kal

$$\underline{\underline{\ddot{q}_p = \sum_k \sum_l \sum_m h_{pk} \Gamma_{klm} \dot{q}_l \dot{q}_m + \sum_k \sum_l h_{pk} \left(F_{kl} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial t}\right) \dot{q}_l}}$$

$$\underline{\underline{+ \sum_k h_{pk} Z_k}}$$

legáltalánosabb mech. probléma

↓ ha g^{-1} ∃

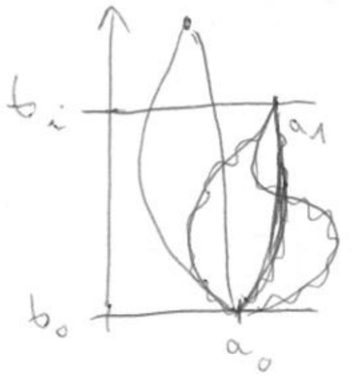
$\ddot{q}_p$ explicite kifejezhető, ha g invertálható

↳ numerikusan meg lehet oldani

→ Frenkel Andor: ← mi van, ha g nem invertálható

Mat. módsz.: ZH dec 22. csüt. 10^{00}

UV jan. 6. péntek 14^{00}



↓

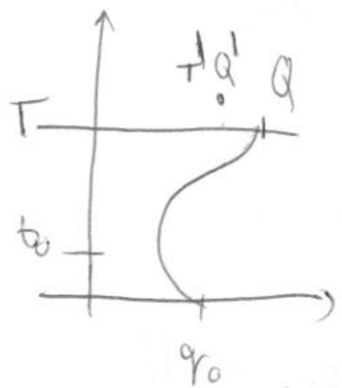
rögzítjük t_0-t, és a tér minden pontjába megnézem, melyikre lesz ott minimális a hatás

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\dot{q}(t),t)\,dt$$

↓

legoptimálisabb útvonal a végpont fv.-ében

$S(q_2,t_2)$



$S(T,Q)$ (Hamilton-féle első principális fv.)

Legyen T, T' kis időkülönbség, és Q, Q' is kis kül.:

$S(T,Q)$ és $S(T',Q')$ ~~(ki)~~-re ~~Q~~ minimális utak

$q(t)$ $q'(t)$

mindkettő kielégíti ~~(=)~~ az ELE-t.

$$\delta S = S' - S = \int_{t_0}^{T'} dt\, L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) - \int_{t_0}^{T} dt\, L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) =$$

$$= \underbrace{\int_{T}^{T'} dt L(q' \dots)}_{\approx L \cdot \delta T} + \int_{t_0}^{T} dt \left[L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) \right] =$$

$$q'_k(t) = q_k(t) + \xi_k(t)$$

$$= L \delta T + \int_{t_0}^{T} dt \left[L(q + \xi, \dot{q} + \dot{\xi}, t) - L(q, \dot{q}, t) \right] =$$

sorfejtés L-re $(q, \dot{q}, t)$-ben

$$= L \delta T + \int_{t_0}^{T} dt \left[\left(\cancel{L(q\, \dot{q}\, t)} + \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{Q_k} \xi_k + \sum_k \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \cdot \dot{\xi}_k \right) - \cancel{L(q, \dot{q}, t)} \right] \cdot$$

$$\delta S = L \delta T + \sum_k \int_{t_0}^{T} dt \left[Q_k \xi_k(t) + \underbrace{p_k \cdot \dot{\xi}_k(t)}_{(p_k \cdot \xi_k)^{\cdot} - \dot{p}_k \xi_k} \right] =$$

$$= L \delta T + \sum_k \int_{t_0}^{T} dt \left[(p_k \xi_k)^{\cdot} + \underbrace{(Q_k - \dot{p}_k)}_{0} \xi_k(t) \right] =$$

mert q_k kielégíti ELE-t !!

$$= L \delta T + \sum_k (p_k \cdot \xi_k) \Big|_{t_0}^{T} = L\, \delta T + \sum_r p_k \cdot \boxed{\xi_k(T)}$$

$\xi_k |_{t_0} = 0$ ⟶ 16a

~~$(\xi_k = \ldots Q - q)$~~

(megj.: q a végpontban = Q)

$$q'(T') = q(T') + \xi(T') \quad \Big/ - q(T)$$

~~$q'(T')\,q(T)$~~

$$\underbrace{q'(T') - q(T)}_{\delta Q} = \underbrace{q(T + \delta T) - q(T)}_{\dot{q}(T)\cdot\delta T} + \xi(T')$$

$$\xi(T') = \delta Q - \dot{q}(T)\,\delta T$$
$$\overset{\shortparallel}{\xi(T)}$$

$$dS = L\,\delta T + \sum_k p_k\left(\delta Q_k - \dot{q}_k\,\delta T\right) = \sum_k p_k\,\delta Q_k + \underbrace{\left(L - \sum_k p_k\,\dot{q}_k\right)}_{-B}\delta T$$

$$\boxed{\delta S = \sum_k p_k\,\delta q_k - B\,\delta t}$$

Variációszámítás határképletek → hogy változik az optimális pálya) ha a végpontokat arrébb megyünk

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k} \quad \boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -B}$$

$L\,(q, \dot{q}, t)$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q, \dot{q}, t) = \sum_l g_{kl}\,(q, t) \cdot \dot{q}_l + A_k$$

$\rightarrow \dot{q}\,(p, q, t)$

$$B = \sum p_k \dot{q}_k - L\,(q\, \dot{q}\, t) = B\,(q, \dot{q}\, t) = H\,(p, q, t)$$

más változók fv.-eként van kifejezve a Beltrami ≡ Hamilton fv

$u \cdot \frac{\partial L}{\partial u} - L$ ← Legendre-transzformáció
változócsere

$$\delta S = \sum_k p_k \delta q_k - H\, \delta t$$

$S(q_k, t)$

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

$\frac{\partial}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$$

Hamilton-féle kanonikus egyenlet
(Hamilton-formalizmus)

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \\ \boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}} \end{array}\right\}$$ 2f darab elsőrendű d.e ⟷ ELE: f db másodrendű

↓

~~nem mg~~

a mechanika egy másfajta mat. leírása

↳ nem mindegyikből lehet kvantum.-t csinálni, de a Hamilton-form.-ból igen

~~$\delta S = \sum$~~

$$\delta S = \sum_k p_k \delta q_k - H \delta t$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad \leftarrow \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$$

$$\boxed{-\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)}$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet

pl. $L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - V(\underline{r}) = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{3} \dot{x}_k \dot{x}_k - V(\underline{r})$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k$$

↓ invertáljuk

$\dot{x}_k = \frac{p_k}{m}$ → a seb.-et az imp.-al fejezzük ki

$$B = \sum p_k \dot{x}_k - L = \sum m \dot{x}_k \dot{x}_k - \left(\frac{1}{2}\sum m \dot{x}_k \dot{x}_k - V\right) = \frac{1}{2}\sum m \dot{x}_k \dot{x}_k + V =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r}) = H$$

$$\boxed{-\frac{\partial S(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+V(x,y,z)}$$

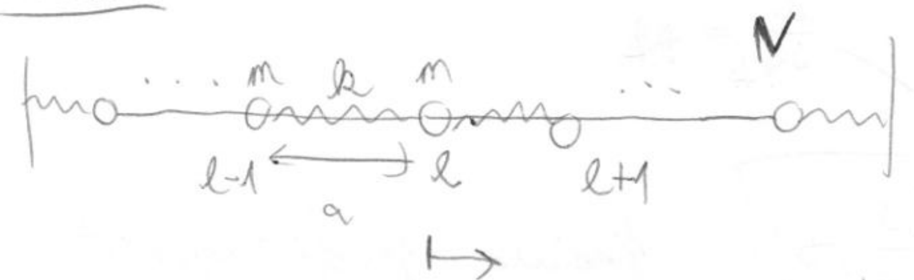
Hamilton-Jacobi egyenlet

↓

1db egyenlet, de parcdiff.

$S(x,y,z,t)$ a valódi mozgást leíró hatás

Példa:



$u_l(t)$ → az egyensúlyi helyzettől mért kitérés

$$m\ddot{u}_l(t) = k\left[u_{l+1}(t)-u_l(t)\right] - k\left(u_l(t)-u_{l-1}(t)\right)$$

(ökölszabály: u_l egyenletében u_l ⊖ előjellel szerepel)

$$m\ddot{u}_l(t) = k\left(u_{l+1}-2u_l+u_{l-1}\right)$$

↑

másodrendű d.e. rendszer

Ugyanez Lagrange-formalizmussal:

$$\sum_l m\frac{\dot{u}_l^2}{2} - \sum_l k\frac{(u_{l+1}-u_l)^2}{2} = L(u_1, u_2, \dots u_N; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots \dot{u}_N)$$

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_l} = m\dot{u}_l$$

$$\dot{p}_l = m\ddot{u}_l$$

$$||$$

$$Q_l = \frac{\partial L}{\partial u_l} = k(u_{l+1}-u_l) - k(u_l - u_{l-1}) = m\ddot{u}_l$$

↳ ugyanazt kaptuk ✓

– Tartsunk ∞-hez a ~~m~~ golyók számával, de $m_{össz}$ = áll

$$m \to \frac{m}{K}$$

$$a \to \frac{a}{K} \qquad \frac{m}{a} = \rho = \text{konst.}$$

$$k \to k\cdot K \qquad ka = B = \text{konst.}$$

↑

erősebb lesz

a rugóállandó

mozgásegyenlet /: a

↓

$$\frac{m}{a}\cdot\ddot{u}_l = \frac{k}{a}(u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1})$$

$$\rho\cdot\ddot{u}_l = k\cdot a\,\frac{\frac{u_{l+1}-u_l}{a} - \frac{u_l-u_{l-1}}{a}}{a}$$

Lagrange:

$$L = \sum_l a \left(\underset{\underset{\rho}{\uparrow}}{\frac{m}{a}} \frac{\dot{u}_l^2}{2} - \frac{\overset{B}{\boxed{ka}}}{2} \left(\frac{u_{l+1}-u_l}{a} \right)^2 \right)$$

$$L = \sum_l a \left(\rho \cdot \frac{\dot{u}_l^2}{2} - \frac{B}{2} \left(\frac{u_{l+1}-u_l}{a} \right)^2 \right)$$

Ha $K \to \infty$, $a \to 0$

$u_l(t)$ helyett $\underset{\underset{x \text{ helyen } \cancel{\text{van}} \text{ lévő golyó}}{\uparrow}}{u(x,t)}$ → (az már nem jellemzi a golyót, hogy hanyadik)

~ Fourier-nél átmenet

$$u_{l+1}(t) - u_l(t) = u(x+a,t) - u(x,t)$$

$$\frac{u_{l+1}-u_l}{a} = \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \to \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$L = \sum_l a \cdot \left[\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$a = dx$$

$$L = \int dx \left(\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)$$

Mozgásegy.:

$$\rho \ddot{u}_l = ka \frac{\overset{\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx)}{\boxed{\frac{u_{l+1}-u_l}{a}}} - \overset{\frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\boxed{\frac{u_l-u_{l-1}}{a}}}}{a} = k \cdot a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$c^2 = \frac{B}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$ hullámegyenlet

$$\updownarrow$$

$$L = \int dx \underbrace{\left(\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{B}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)}_{\mathcal{L}}$$

$\mathcal{L}$: Lagrange-sűrűségfv.

$$[\mathcal{L}] = \frac{Nm}{m^3} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

↓

folytonos anyagokra:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \int d^3\underline{r}\, \mathcal{L} \\ S &= \int dt\, L = \int dt \int d^3\underline{r}\, \mathcal{L} \end{aligned}}$$

↓

mezőelméletekre (EM mező, folyt. közegek)

↓

térben eloszló mennyiségek

ilyen Lagrange-sűrűségfv.-el írhatjuk le a rendszert

$$L\left(q_k(t), \dot{q}_k(t), t\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\boxed{\phi_a}(\underline{r},t), \frac{\partial \phi_a}{\partial t}, \underline{\nabla}\phi_a, t, \underline{r}\right)$$

hullámzó mennyiség [most u volt (kitérés)], de lehet más is (pl. E)]

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \phi_a}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla \phi_a)}\right)}$$

ELE – mezőkre

másodrendű parc. diff. egyenlet

↕

elektromágnesség (Maxwell) → $\frac{\partial B}{\partial t}$

hidrodinamika ″ → $\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}$

de ELE-ből ← itt csak elsőrendű egyenletek voltak
kihozható (pl. elektrom. → A, U bevez.)

Euler-Lagrange egyenlet univerzális, a fizikában minden ilyenre vezethető vissza

11. óra

Vektoranalízis

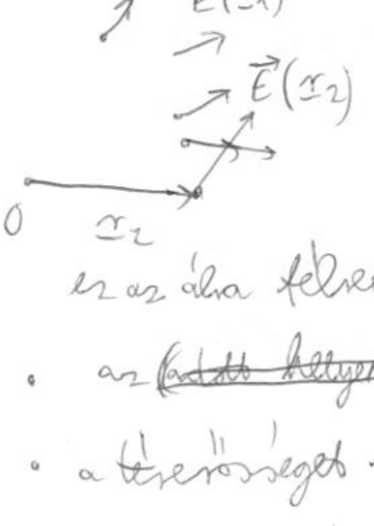
1) Bevezetés, ~~(vektoranalízis)~~:

a) vektor-, skalár- és tenzormezőkkel foglalkozik

↓ É.T.: a ~~tér~~ ($\mathbb{R}^3$), vagy felület ($\mathbb{R}^2$), esetleg görbe ($\mathbb{R}$)

↳ az oda mutató vektorokkal (helyvektorral) jellemezzük az ~~adott~~ pontot

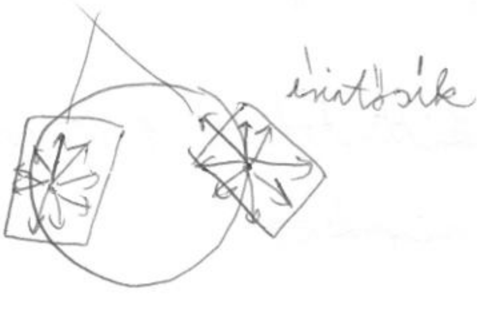
(ezeket úgy képzeljük el, hogy egy n ~~ált~~ D-s térbe vannak ágyazva, de ez nem kell → ált.-al)

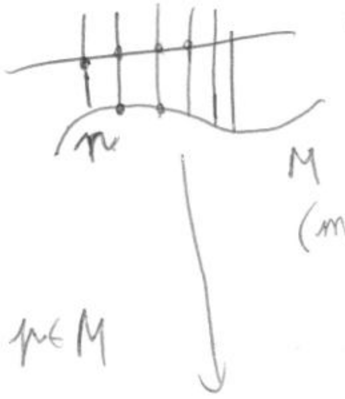


ez az ábra félrevezető:

- az ~~(adott helyen lévő)~~ térerősségvektorok nem metszik egymást
- a térerősséget nem méterben mérjük

= valójában más D-ban kéne lerajzolni $\vec{E}$-t





a szellővel adjuk meg a vektor nagyságát

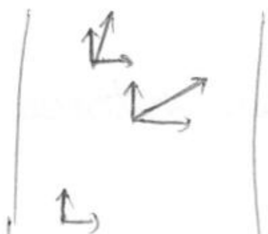
M (sokaság)
(manyfold)

minden ponthoz egy vektort rendelünk

b) $\vec{v}$ reprezentáció, bázisválasztás

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

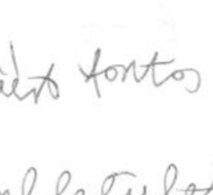
ezeket a vektorokat nem lehet eltolni → nem olyanok, mint az algebrai vektorok



→ valójában nem csak 1 bázis van, hanem minden pontban van egy lokális bázis

Miért fontos ez?

Gömbfelületen pl. a lokális bázis máshogy néz ki!

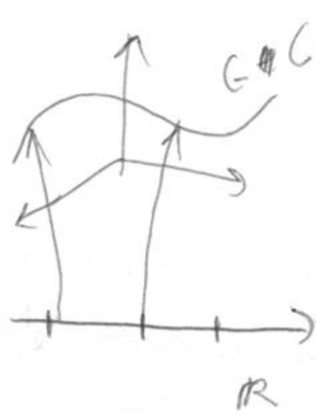


de lehet pl. kitüntetett pontokhoz igazítani a bázisokat

2) Paraméterezés:

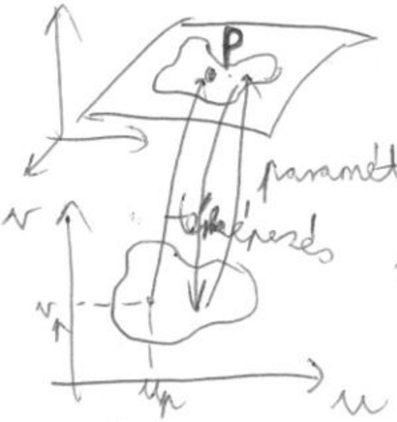
→ (ha egy altérről van szó, akkor az eredeti koordináták a felületen nem függetlenek → kell általános k.-at választani, amik függetlenek)

- pl. görbe



→ keressük egy kölcsönösen egyértelmű leképezést egy 1D-s par. tartomány és a görbe között, pl. az adott görben, mint pályán történő mozgás alapján

- felület



felület

2D-s par. tart.

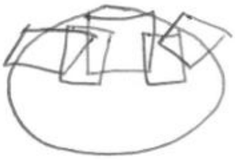
$M \ni p(u,v)$

- gömbfelület

a térképezés elrontja a folytonosságot!

ezek valójában szomszédosak

ha több térkép van → atlasz



~~$(M \ni p(u,v))$~~

$F \subset \mathbb{R}^3$

$\underline{r}(x,y,z)$

$\uparrow$

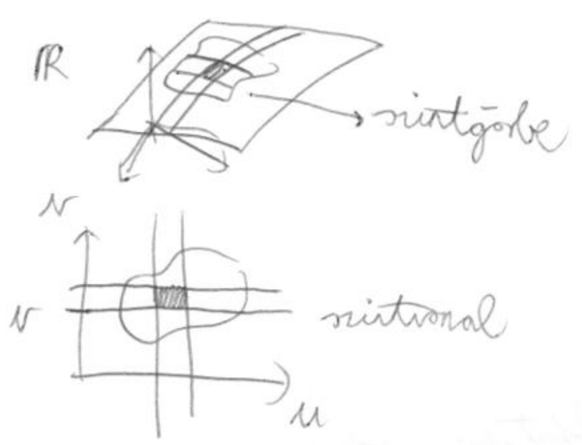
(u,v)

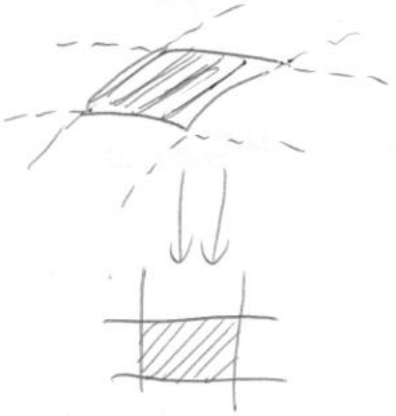
$$\left.\begin{array}{l} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{array}\right\} \rightarrow$$ ezeket a fv.-eket megadva lehet ért. a felületi, ... integrálokat is

↓

így már le tudjuk írni a felületen értelmezett fv.-t is

$$T(P) \rightarrow T(x,y,z)$$
$$\searrow T(u,v)$$





a térképet osztjuk fel kis darabokra, mert az egyszerűbb, de ezzel együtt a felületet is kis darabokra osztottuk

→ megfelelően sűrűn választott vonalkázással a felületen paralelogrammák lesznek az u,v síkon lévő téglalapok

→ adott kis paralelogr.-hoz lokális bázist választhatunk

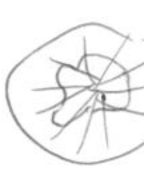
ez az u,v síkon
↑ sima

adott pontban az ott átmenő ~~(szintv.)~~ vonalak érintői hat. meg a lok. bázist

ortogonális bázis

Mi van, ha ~~a~~ vhol sok vonal metszi egymást?

É-sark

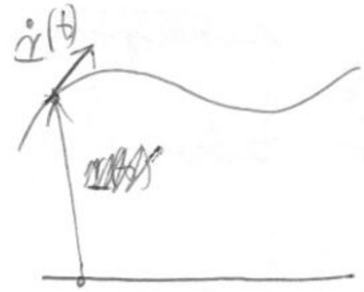


D-sark

egy tetszőleges vektort (pl. szélerősség) ezek segítségével adjuk meg

(

hajózáshoz használták a térképezést)



↗ ez az eredeti felület!!

$\underline{r}(u,v)$

↓

ezek lesznek a lok. bázisok:

$$\left(\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial r(u,v)}{\partial u}\right) = \left(\underline{e}_1, \underline{e}_2\right)$$

pl. hengerfelület

$\underline{r}(z,\varphi)$

$$\begin{matrix} x(z,\varphi) = \\ y(z,\varphi) = \\ z(z,\varphi) = \end{matrix} \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial z}\right| = 1 \qquad \left|\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right| = R$$

↓

nem azonos a mértékegységük → ez baj → az adott ponthoz rendelt vektor koordinátáit más m. egységben kéne megadni

$$\underline{v} = v_\varphi \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right) + v_z \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

ha azonos mértékegységű bázis vektorokat választunk

↓

nem lesz indexes írásmód!

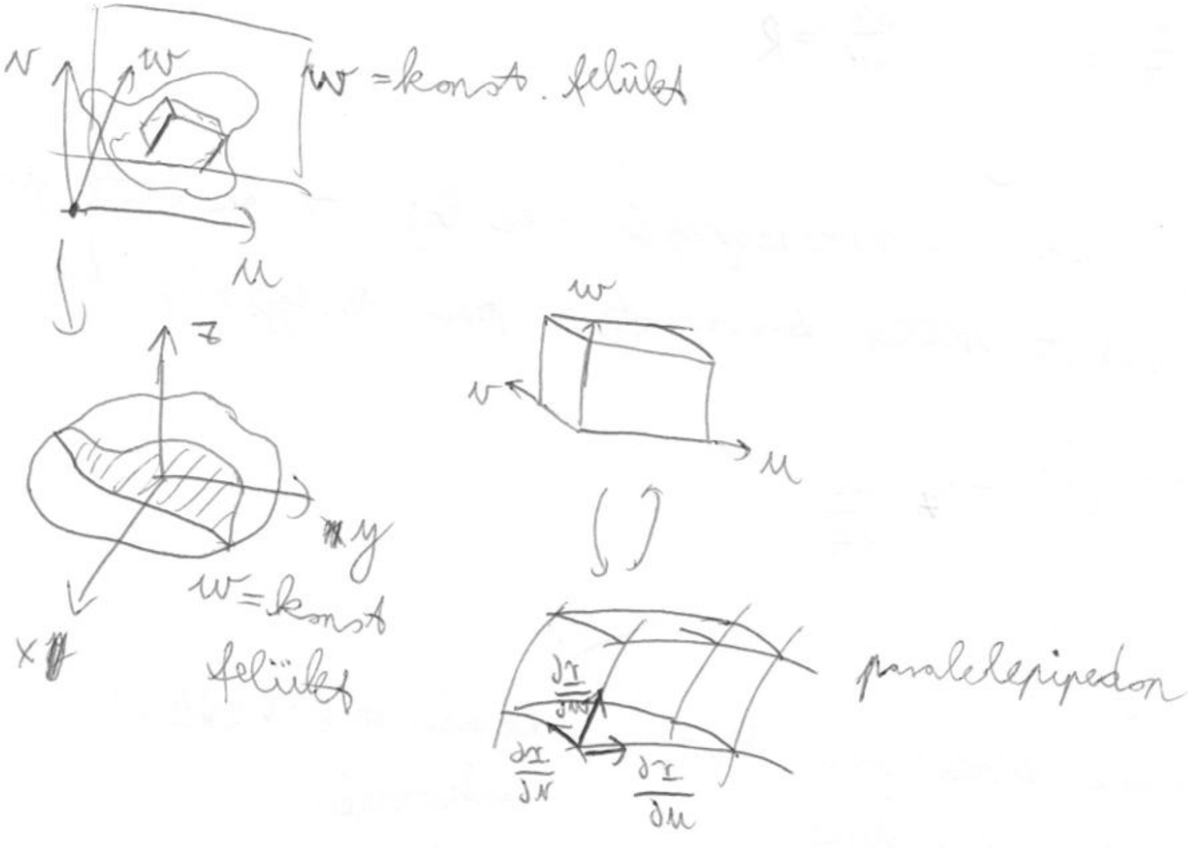
ha más m.e.-ű b.vektorokat választunk
- lesz indexes írásmód
- de a vektormező vektorainak k.-ái más mértékegységűek lesznek

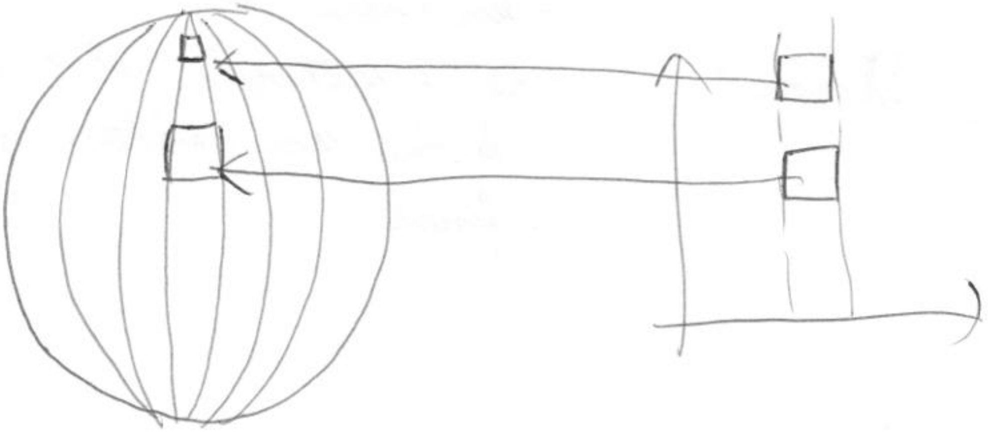
↓

ezt választjuk

ált.-ban szeretnénk lokálisan ortogonális k.rendszert választani !!!

mindenhol van
ortonormált bázis





a valóságbeli és térképbeli területek eltérnek
↳ a térképen u. akkora területek a valóságban másmekkorák

- hasonlóan térben is

→ van egy átszámítás a területek/térfogatok között

$$r(u,v,w) = \begin{cases} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = J(u,v,w)$$

→ ez pont a paralelepipedon térfogata → ennyivel nagyobb a valós térfogat a leképezett kis kockánál

csak $\frac{1}{du\,dv\,dw}$ ↗

Jacobi-det.

↓ mi a valós térfogatot akarjuk megkapni

$$dV = dx\,dy\,dz = J(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

↓ ahol a Jacobi kicsi, ott a valós térfogat is kicsi, ha $du \cdot dv \cdot dw =$ áll

pl. gömbnél

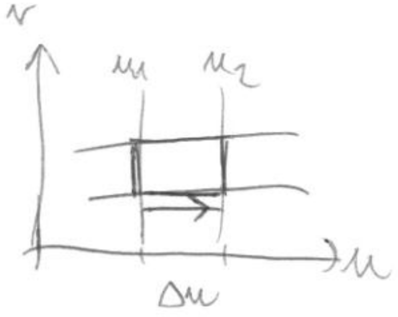
$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

$J = r^2 \sin\theta$

J kicsi: ahol r kicsi (Föld KP-ja) / $\sin\theta$ kicsi (sarkokon)



$$\Delta \underline{r}^{(1)} = \frac{\partial r(\underline{u},\underline{v})}{\partial u}\Delta u$$ → r változása

$v = \text{konst. mentén}$

$$\Delta \underline{r}^{(2)} = \frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v}\Delta v$$

ha $\Delta \underline{r}^{(1)} \perp \Delta \underline{r}^{(2)}$

(nagyon kis $\Delta u, \Delta v$-t veszünk)

⇓

$$\Delta A = |\Delta \underline{r}^{(1)}|\,|\Delta \underline{r}^{(2)}| = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| \Delta u \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| \Delta v$$

$$h_1(u,v) = \left|\frac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u}\right|$$

$$h_2(u,v) = \left|\frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\right|$$

$$\Delta A = \boxed{h_1 \cdot h_2}\,\Delta u\,\Delta v$$

↓

ortogonális görbe k. rendszerben ez lesz a torz. tényező

~~ez a Jacobi 2D-ben~~ ↳ „Jacobi" 2D-ben, ha merőlegesek
lok.!
a bázisok

Ált.-os 3D-s k.rendszer

$$\left.\begin{array}{l} x_1\,(q_1, q_2, q_3) \\ x_2\,(\text{— || —}) \\ x_3\,(\text{— || —}) \end{array}\right\}\ x(q)$$

ha ortogonálisak:

$$h_1 = \left|\frac{\partial r}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial r}{\partial q_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$h_k = \left|\frac{\partial r}{\partial q_k}\right| = \quad \dots$$

Ha ferdén metszik egymást a vonalak ∠

$$g_{kl}(q) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_l} = g_{lk} \quad (\text{Young miatt})$$

– eddig: $\left.\begin{array}{l} h_1 = \sqrt{g_{11}} \\ h_2 = \sqrt{g_{22}} \\ h_3 = \sqrt{g_{33}} \end{array}\right\}$ a Jacobi-diagonális $\begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$

– most: Jacobi → nem diagonális

nem ortogonális bázisoknál $\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

Kom-Kom: Mat. kézikönyv műszakiaknak

↳ ált., nem ortogonális k. rendszerek

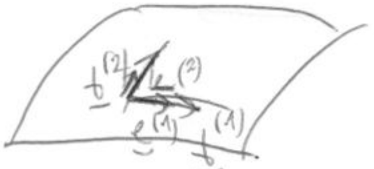
$\underline{t}^{(k)} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q_k}$ → $\underline{t}^{(k)}$ minden pontban egy vektor, de nem egységvektor!

$$\boxed{\underline{e}_k := \frac{\underline{t}^{(k)}}{h_k} = \frac{\underline{t}^{(k)}}{|\underline{t}^{(k)}|}} \qquad h_k = |\underline{t}^{(k)}|$$

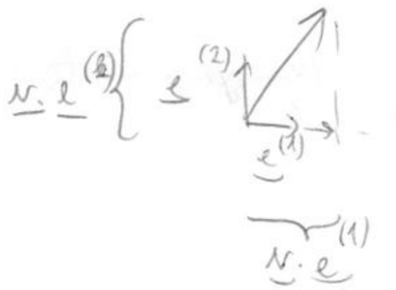
$|\underline{e}^{(k)}| = 1$

→ (már vannak egységvektoraink, de nem szabad elfelejteni, hogy az eredeti térfogatot, területet csak a normálási tényezővel kaphatjuk meg)

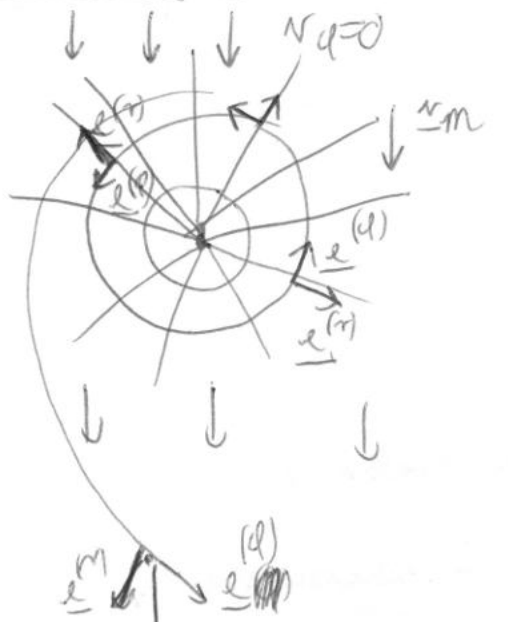
normáljuk



$v_k = \underline{v} \cdot \underline{e}^{(k)}$



polárkoord.: $\underline{v}_m$



$\underline{v}$-ben ez is függ $\underline{r}$-től!

$$\boxed{\underline{v}(\underline{r}) = \sum_k v_k(\underline{r})\, \underline{e}^k(\underline{r})}$$

↳ a meteorok sebessége (iránya sem) nem vált., de mivel lokálisan más a bázis, a komponensek változnak!!

~~$(=)\ \boxed{\underline{v}(\underline{r}) = \sum_k v_k(\underline{r})\, \underline{e}^k(\underline{r})}$~~

Vektormező differenciálása:

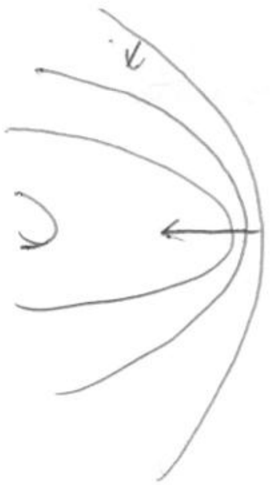
$\Phi(\underline{r})$

1/a)

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, \Delta x$$

$$\Phi(\underline{r}+\Delta\underline{r}) \approx \Phi(\underline{r}) + \underbrace{\underline{g}(\underline{r})}_{\text{grad}\,\Phi \quad (\underline{\nabla}\Phi)} \Delta \underline{r}$$

legnagyobb meredekség irányába mutat



ahol sűrűbbek a vonalak, nagyobb a gradiens

$$\text{grad}\,\Phi = \underline{\nabla}\,\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\underline{\nabla}} \Phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\underline{r}) = \Phi(x, y, z)$$

$\phi(\underline{r}) \to \underline{g}(\underline{r})$ → létezik-e ~~adott~~ $\underline{g}(r)$-hez $\phi(r)$,
~~hogy~~ melynek gradiense $\underline{g}$

b) ↳ $\underline{w}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\, \underline{g} = \underline{\nabla} \times \underline{g}$

ha rot $= 0$, létezik ↙

⇓ (+ ha egyszeresen összefüggő a tartomány)
(csillagszerű halmaz)

rot grad $\phi = 0$

$$(\nabla\phi)_k = \partial_k \phi$$

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$(\nabla \times g)_k = \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} \partial_l g_m$$

c) $\mathrm{div}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \underline{v} = \sum_k \partial_k v_k$

div rot $= 0$ → ha div $= 0$ → ~~[illegible]~~ rotáció az erőtér

$\Delta\phi = \mathrm{div\,grad}\, \phi = \underline{\nabla}\, \underline{\nabla} \phi = \underline{\nabla}^2 \phi$

d) $\left(\Delta \underline{u}(r)\right)_k = \Delta\left(u_k(\underline{r})\right)$

↳ csak Descartes-ben !!!

a Laplace-t nem a vektor komponenseire kell külön-külön alk. általában (görbe k. rendszer)

$$\nabla\left(\nabla \underline{u}(r)\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \underline{u}\right) + \Delta u$$

$$\text{grad div}\,\underline{u} = \text{rot rot}\,\underline{u} + \Delta \underline{u}$$

↓ ↙

ezzel ki lehet számolni a Laplace-t

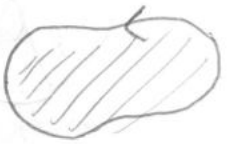
ált. k.rendszerre

2) Gauss-tétel:

$$\oint \underline{v}\, d\underline{f} = \int \text{div}\,\underline{v}\, dV$$

3) Stokes-tétel:

$$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int \text{rot}\,\underline{v}\, d\underline{f}$$



↑

előjelszabály: jobbkézsz.

↳ körbejárás esetén $d\underline{f}$ felfelé mutat

4) Alkalmazás ∫-ban:

a)

$$\Delta \underline{r}^{(1)} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \Delta q_1 = \underline{t}^{(1)} \Delta q_1$$

$$\Delta s^{(1)} = |\Delta \underline{r}^{(1)}| = |\underline{t}^{(1)}| \Delta q_1 = h_1 \Delta q_1$$

$$ds^{(1)} = h_1 \, dq_1$$

$$ds^{(2)} = h_2 \, dq_2$$

$$ds^{(3)} = h_3 \, dq_3$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underset{\smile}{t}^{(1)} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_1 = |\underline{t}^{(1)}| = R$$

$$\underset{\smile}{t}^{(2)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h_2 = |\underline{t}^{(2)}| = 1$$

$ds = R\,d\varphi$

$s = R\,d\varphi$

b) <u>Derékszögűben:</u>

$$\underline{\underline{ds^2}} = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2 =$$

$$g_{kl} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_l} \qquad = \underline{\underline{\sum_k h_k^2 dq_k^2}}$$

c) ált. eset: ds

$$d\underline{r} = \sum_k \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} dq_k$$ → Taylor-sor

$$d\underline{r} = \sum_l \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_l} dq_l$$

$$ds^2 = d\underline{r}\, d\underline{r} = \sum_k \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} dq_k \sum_l \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_l} dq_l = \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_l} \right) \cdot dq_k dq_l =$$

$$= \boxed{\sum_k \sum_l g_{kl}\, dx_k dx_l}$$

dV görbe k.r.-ben

d) $$dV = ds^{(1)} ds^{(2)} ds^{(3)} = \underbrace{(h_1 h_2 h_3)}_{\text{Jacobi-det.}} dq_1 d_2 dq_3$$

gradiens görbe k.r.-ben

e) $$d\phi = \underbrace{\underline{\text{grad}\, \phi}}_{\underline{g}} \cdot d\underline{r} \qquad d\underline{r} = \sum_k \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} dq_k = \sum_k \underline{t}^{(k)} dq_k =$$

$$= \sum_k \underline{e}^{(k)} h_k \cdot dq_k$$

$$d\phi = \underline{g}\, d\underline{r} = \underline{g} \sum_k \underline{e}^{(k)} h_k dq_k = d\phi = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial q_k} dq_k$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_k} = \underbrace{(\underline{g} \cdot \underline{e}^{(k)})}_{g_k} \cdot h_k \cancel{= d}$$

~~(↳ most az a [illegible] rendszerbeli változók szerint megváltozást szeretnénk megkapni)~~

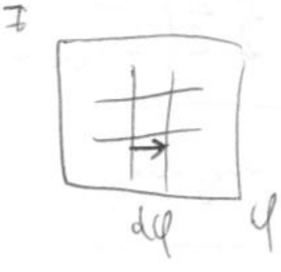
$$\boxed{g_k = (\text{grad}\, \phi)_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial q_k}}$$ a görbe koordinátarendszerbeli gradiens komponensei

↳ valójában a gradiens ϕ ~~az~~ $\underline{r}$ szerinti megváltozását írja le, de a rendszerbeli változók ~~az~~ segítségével

↓
jelentése:

$dx \approx d\varphi$, DE $dx \neq d\varphi$

$$\underline{\underline{dx = r\,d\varphi}}$$



$$(\text{grad}\,\phi)_\varphi = \frac{d\phi}{r\,d\varphi} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$(\text{grad}\,\phi)_k = \underbrace{\frac{1}{h_k}\,\frac{\partial\phi}{\partial q_k}}$$

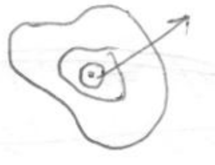
itt nincs Σ !!

↳ nem érvényes az indexes írásmód

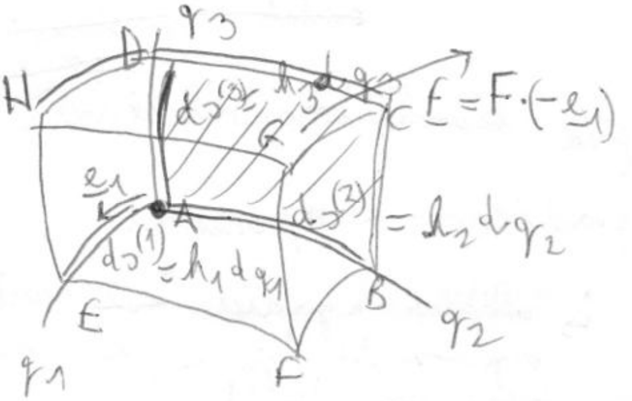
f) divergencia görbe k. r.-ben:

$$\oint d\underline{f}\,\underline{v} = \int dV\,\text{div}\,v \approx \Delta V\cdot\text{div}\,\underline{v}$$

$$\text{div}\,\underline{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\oint \underline{v}\,d\underline{f}\right)$$



csökkentjük a felületet



$$\int_{(ABCD)} \text{a hátsó lapra} = \underbrace{\underline{v}\left(-\underline{e}^{(1)}\right) \underbrace{ds^{(2)}\, ds^{(3)}}_{dA}}_{\underline{v}\,\cdot\, d\underline{F}} = -\underbrace{\left(\underline{v}\,\underline{e}^{(1)}\right)}_{v_1} h_2\, dq_2\, h_3\, dq_3 =$$

$d\underline{F} = \underline{n}\, dA$

$$= -\underbrace{\left(v_1 h_2 h_3\right)}_{q_1\text{-ben}} dq_2\, dq_3$$

$\underline{v}$ -t $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}$ (a lok. KR.) szerint írjuk

első lapra vett $\int$:

~~EFCA~~ (EFGH)

$$\underline{v}\,\underline{e}^{(1)}\, ds^{(2)}\, ds^{(3)} = \underbrace{\left(v_1 h_2 h_3\right)}_{} dq_2\, dq_3$$

→ NEM szabad h_2, h_3-t kiemelni, mert az egység vektor is függ $\underline{r}$-től!

|| $q_1 + dq_1$-ben más lesz $\underline{v}$ 1. komponense is, és h_2, h_3 is ||!!

$$(EFGH) + (ABCD) = \left[\left(v_1 h_2 h_3\right)(q_1 + dq_1) - \left(v_1 h_2 h_3\right)(q_1)\right] dq_2\, dq_3 =$$

$$= \left[\cancel{\left(v_1 h_2 h_3\right)(q_1)} + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(v_1 h_2 h_3\right) dq_1 - \cancel{\left(v_1 h_2 h_3\right)(q_1)}\right] dq_2\, dq_3 =$$

$$= \frac{\partial\left(v_1 h_2 h_3\right)}{\partial q_1}\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

$\int$ AEHD lapra

$$\underline{v}\left(-\underline{e}^{(2)}\right) ds^{(1)}\, ds^{(3)} = -v_2\, h_1\, dq_1\, h_3\, dq_3 = -\underbrace{\left(v_2 h_1 h_3\right)}_{q_2\text{-nél}} dq_1\, dq_3$$

$\int$ BCG~~H~~F

$$\underline{v}\left(\underline{e}^{(2)}\right) ds^{(1)}\, ds^{(2)} = \underbrace{v_2 h_1 h_3}_{q_2 + dq_2\text{-nél}}\, dq_1\, dq_3$$

$$BCGF + AEHD = \left[\left(v_2\, h_1 h_3\right)(q_2 + dq_2) - \left(v_2 h_1 h_3\right)(q_2)\right] dq_1\, dq_3$$

$$= \frac{\partial(v_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} dq_2$$

$$CDAG + ABFE = \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} dq_3 dq_1 dq_2$$

$$\oint \underline{v} d\underline{f} = \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial v_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3$$

$$\Delta V = ds^{(1)} ds^{(2)} ds^{(3)} = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 dq_2 dq_3$$

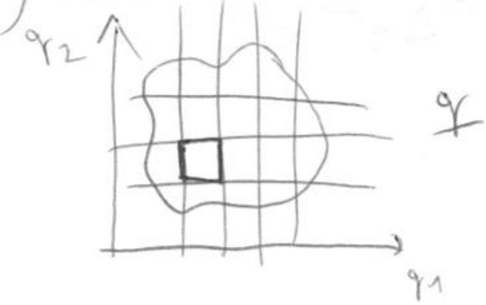
$$\boxed{\operatorname{div} \underline{v}} = \frac{1}{\Delta V} \oint \underline{v} d\underline{f} = \boxed{\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right]}$$

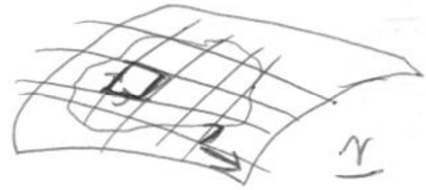
ha $h_1, h_2, h_3 = 1$

↳ $\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{\partial v_3}{\partial q_3}$ → $\perp$-ű rendszer

12. óra

0) Ism:





ortogonális görbe k. rendszer

$\underline{r}(q\ldots)$

$\underline{t}^{(k)} = \frac{\partial r}{\partial q_k}(q\ldots)$

$h_k = |\underline{t}^{k}|$ (Lamé - együttható)

$\underline{e}^{(k)} = \frac{\underline{t}^{(k)}}{h_k}$

$\underline{e}^{(k)} \underline{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

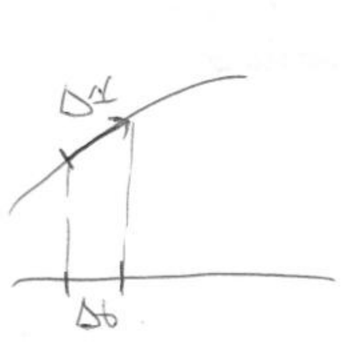
$|\underline{e}^{(k)}| = 1$

$e^{(k)}(q)$!!

↓

$e^{(k)}$ függ q-tól → helyről helyre mások a kis bázisok

$\underline{v} = \sum_k v_k(q) \underline{e}^{(k)}(q)$



$\underline{\dot{r}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

$\Delta\underline{r} = \underline{\dot{r}}(t)\,dt$

$\Delta s = |\Delta\underline{r}| = |\underline{\dot{r}}(t)|\Delta t$

fontos: ha leképezett

↓ rendszerben

egységnyit

megyünk,

az eredetiben

nem egységnyit !!

$\Delta s^{(1)} = |\Delta r^{(1)}| = |\frac{\partial r}{\partial q_1}\Delta q_1| = |\underline{t}^{(1)}\Delta q_1| = h_1 \Delta q_1$

$$\boxed{\Delta s^{(k)} = h_k(q)\,\Delta q_k}$$

$\phi(\underline{r})$

gradiens ↑

$\phi(\underline{r}+\Delta\underline{r})-\phi(\underline{r})=\underline{g}(\underline{r})\Delta\underline{r}=\cancel{\sum_k g}\,\underline{g}\sum \underline{e}^{(k)}\Delta s^{(k)}=$

$$=\sum_k g_k \Delta s^{(k)}=\sum g_k h_k \Delta q_k$$

$\sum \frac{\partial\phi}{\partial q_k}\Delta q_k$

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_k}=g_k h_k \qquad h_k=\Bigg|\overbrace{\frac{\partial\underline{r}}{\partial q_k}(q)}^{\underline{t}^{(k)}}\Bigg|$$

$$\boxed{(\mathrm{grad}\,\phi)_k=\frac{1}{h_k}\frac{\partial\phi}{\partial q_k}}$$ gradiens görbe k. rendszerben

(↳ másképp $\frac{\partial\phi}{\partial r_k}=\frac{\partial\phi}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial r_k}$)

$$\mathrm{div}\,\underline{v}=\lim_{|\Delta V|\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint \underbrace{\underline{v}\,d\underline{f}}_{\underline{v}\cdot\underline{n}\,dA}$$

itt 1 egységnyit veszünk

↓ ~~ez~~ már nem 1 egységnyi lesz

↓

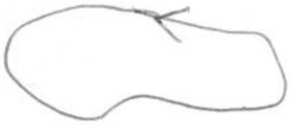
térfogatszámítással

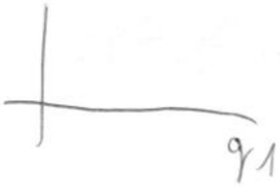
$$\mathrm{div}\,\underline{v}=\frac{1}{h_1h_2h_3\cancel{dq_1dq_2dq_3}}\left(\frac{\partial(v_1h_2h_3)}{\partial q_1}\cdot\cancel{dq_1dq_2}dq_3+\dots\right)$$

$$\operatorname{div}\underline{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial v_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \dots\right)$$

1) Rotáció kiszámítása

$$\oint \underline{v}\, d\underline{r} = \int \operatorname{rot}\underline{v}\, d\underline{f}$$





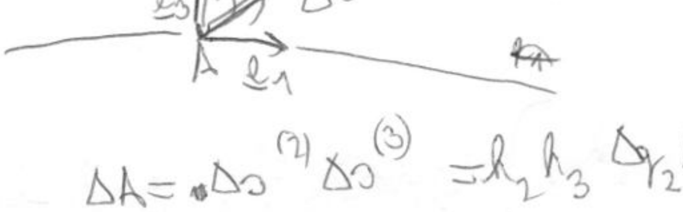
1. komponens:

$$\overset{!}{d\underline{f}} = \underline{e}^{(1)} dA$$

$$\underline{w} = \operatorname{rot}\underline{v}$$

$$\underline{w}\, d\underline{f} = \underline{w} \cdot \underline{e}^{(1)} dA = w_1\, dA$$

$$w_1 = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{1}{\Delta A} \oint \underline{v}\, d\underline{r}$$



$$\Delta A = \Delta s^{(2)} \Delta s^{(3)} = h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3$$

- $$\int_A^B \underline{v}\, d\underline{r}^{A\to B} = \int \underline{v} \cdot e^{(2)} \Delta s^{(2)} \simeq v_2 \Delta s_2 = v_2 \cdot h_2 \Delta q_2 \Big|_{q_3 \text{ helyen}}$$

- $\int_D^C v\,dr^{C\to D} = \ldots = v_2\,h_2\,\Delta q_2\Big|_{q_3+\Delta q_3 \text{ helyen}} =$

$$v_2 h_2\,(q_3+\Delta q_3) \underset{\uparrow \text{ sorfejtés}}{=} v_2\,h_2\,(q_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 h_2)\,\Delta q_3$$

$$\int_C^D = \left(-v_2 h_2(q_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 h_2)\,\Delta q_3\right)\cdot\Delta q_2$$

$$\rightarrow \left(\int_A^B + \int_C^D\right) = -\frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 h_2)\,\Delta q_3\,\Delta q_2$$

- $\int_A^D \underline{v}\,d\underline{r} \approx \underline{v}\,\Delta\underline{r}^{(3)} = \underline{v}\,\underline{e}^{(3)}\,\Delta s^{(3)} = v_3\,\Delta s^{(3)} = \boxed{v_3\cdot h_3}\,\Delta q_3$

- $\int_B^C \underline{v}\,d\underline{r} = (v_3 h_3)_{q_2+\Delta q_2}\cdot\Delta q_3 = \left[(v_3 h_3)(q_2) \overset{\text{helyen}}{+} \frac{\partial\, v_3 h_3}{\partial q_2}\cdot\Delta q_2\right]\Delta q_3$

- $\int_D^A \underline{v}\,d\underline{r} = -v_3\,h_3\,(q_2)\,\Delta q_3$

$$\rightarrow \int_B^C + \int_D^A = \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2}\cdot\Delta q_2\,\Delta q_3$$

$$\oint v\,dr = \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A\right) = \left(\frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_3}\right)\Delta q_2\,\Delta q_3$$

$$(\operatorname{rot}\underline{v})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(v_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(v_2 h_2)\right] \Rightarrow (\operatorname{rot}\underline{v})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(v_1 h_1)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$(\operatorname{rot}\underline{v})_2 = \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(v_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(v_3 h_3)\right]$$

☺

$$(\text{grad}\,\phi)_k = \frac{1}{h_k}\frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

$$\text{div}\,\underline{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right]$$

$$\text{rot}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_3}\right) \\ \frac{1}{h_1 h_3}\left(\frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 h_3)}{\partial q_1}\right) \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial(v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 h_1)}{\partial q_2}\right) \end{pmatrix}$$

($h_1, h_2, h_3 \to$ Descartes)

2) Laplace:

$$\Delta \phi = \text{div grad}\,\phi$$

$$\phi \to \underline{v} = \text{grad}\,\phi$$

$$\boxed{\Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}\right)\right)}$$

ált. lan. h_1, h_2, h_3-t ismerjük adott KR-ben

pl. div kiszámításánál $\partial v_1 h_2 h_3 = h_2 h_3 \cdot \partial v_1 + v_1 \cdot \partial(h_2 h_3)$

$\uparrow$ $\nearrow$

| és annak felel meg, hogy az egységvektorokat is deriválni kell $\underline{v} = \sum v_k(q) \cdot \underline{e}^{(k)}(q)$

3) vektor Laplace-a → nem div grad:

$\underline{u} = \Delta v$

Descartes-ban: $u_k = \Delta(v_k)$

görbében nem ez a def!

$$\boxed{\Delta \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \text{rot rot } \underline{v}}$$

↑

Navier-Stokes-tétel:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\underline{v}\nabla)\underline{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta \underline{v} + \ldots$$

centripetális erő

⇓

a nyomáskülönbség kiegyenlíti a centrip. erőt

~~Cou~~ Couette áramlás

$\eta(\Delta v)_\varphi = 0$

↓

ha $\eta = 0$ → Euler-féle id. folyadékegyenlet

ha $\eta \neq 0$ → az egyenlet nem függ η-tól → furcsaság

↗ ebben a példában

← az egyenlet nem analitikusan függ

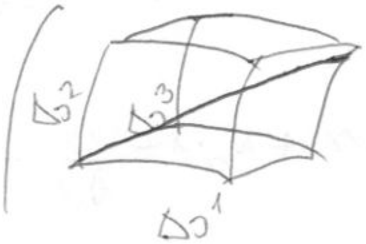
↓

Re:

Reynolds-szám: $Re = \frac{l v \ldots}{\eta}$ → ha $\eta \to 0$ → $Re \to \infty$ → turbulens lesz az áramlás

$\overset{Re}{\eta}(\Delta v) = 0$ $\underset{\downarrow \to \infty}{}$

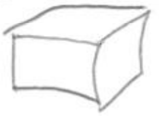
4)



= ívelem^2

$$(\Delta s)^2 = (\Delta s^1)^2 + (\Delta s^2)^2 + (\Delta s^3)^2 = h_1^2 \Delta q_1^2 + h_2^2 \Delta q_2^2 + h_3^2 \Delta q_3^2$$

Görbe-k. r.-ben ált.-ban



$$\sum_k \sum_l g_{kl}(a)\, \Delta q_k \Delta q_l$$

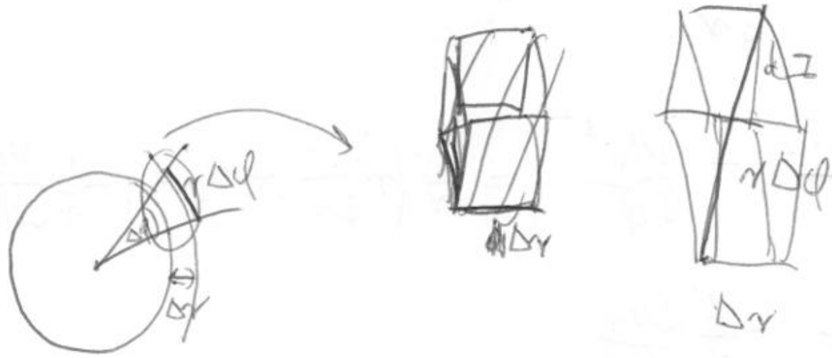
kvadratikus alak

$$\begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

metrikus tenzor

→ h_1, h_2, h_3 ebből leolvasható

5) Hengerkoordinátarendszer (r, φ, z)



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$\Rightarrow h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$!!

↙ ugyanezeket kapjuk, ha $\mathbf{r}$-et r, φ és z szerint deriváljuk

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1, \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = r, \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| = 1$$

$$(\mathrm{grad}\,\phi)_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$(\mathrm{grad}\,\phi)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

$$(\mathrm{grad}\,\phi)_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{div}\,\underline{v}}} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(v_r \cdot r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z \cdot r)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\cdot r + v_r \cdot 1 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] =$$

$$\underline{\underline{= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}}$$

v ismeretlen (adott vektortér), de r, φ, θ-t ismerjük

$e^{(k)}(\varphi)$ emiatt

Tisztán radiális vektortérnél:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{D-1}{r} v_r} \quad D \text{ dimenzióban}$$

$$\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\right)$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \cdot v_\varphi)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}(v_r) - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (v_\varphi \cdot r)}{\partial r} - \frac{\partial v_r \cdot 1}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{r}\left(r \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\varphi \cdot 1\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}$$

ELL.: mértékegység: v-nek minden komponensének ~~[illegible]~~ u.az a fiz. ~~m~~ dimenziója → így vezettük be a fogalmakat

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

(Sz) Laplace-t kiszámolni grad div − rot rot alapján vektorra

$\downarrow$

Eredmény:

$\underline{u} = \Delta\underline{v}$

$$u_r = \Delta(v_r) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{v_r}{r^2}$$

$$u_\varphi = \Delta(v_\varphi) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2}$$

$$u_z = \Delta(v_z)$$

$\downarrow$

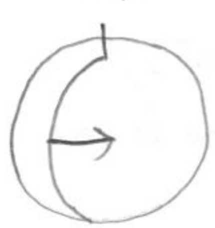
pl. hengerben való áramlás, ~~[illegible]~~ EM hullám vékony csőben való terjedése

↑ összemérhető az átmérővel

6) Gömbk. rendszer (r, φ, θ)

↳ elrontjuk a szimm.-t

→ kitüntetünk egy átlót is, ahonnan a szöget mérjük



$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

$\underline{r}(r, \theta, \varphi)$ → most nem adjuk meg a metrikus tenzort, hanem mi magunk számoljuk ki h_1, h_2, h_3-t

$$\underline{t}^{(k)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}$$

$$h_k = |\underline{t}^{(k)}|$$

θ = konst. felület (kúp)

$$\underline{t}^{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad h_1 = 1$$

$$\underline{t}^{\theta} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \cos\varphi \\ r\cos\theta \sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \quad h_2 = r$$

$$\underline{t}^{\varphi} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \sin\varphi \\ r\sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_3 = r\sin\theta$$

φ = konst felületek

$$dV = h_1 h_2 h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \text{Jacobi-det.}$$

$$(\text{grad}\,\phi)_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta, \varphi)$$

$$(\text{grad}\,\phi)_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \phi}(r, \theta, \varphi)$$

$$(\text{grad}\,\phi)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

→ $r=0$-ban (középpont) és $\sin\theta = 0$-ban (É,D sark) nincs értelme ennek

$$\boxed{\operatorname{div} v} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(v_r \cdot r^2 \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(v_\theta\, r \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(v_\varphi r\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\sin\theta\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} r^2 + v_r \cdot 2r\right) + r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\sin\theta + v_\theta \cos\theta\right) + r\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right] =$$

$$\boxed{= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}}$$

bázisvektorok deriváltjaiból

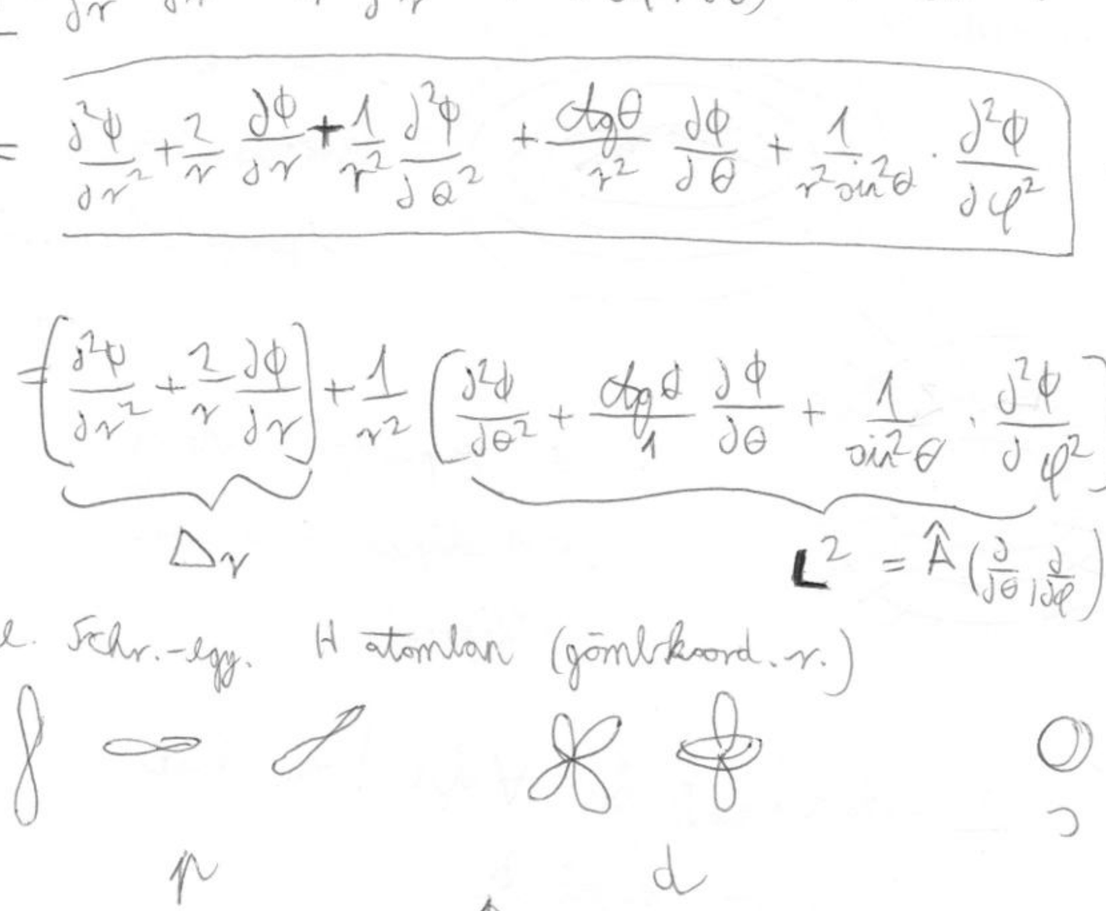
Laplace gömbiben !!

$$\boxed{\Delta\phi} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\right)$$

$$\boxed{= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right]}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{1}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}}_{\mathbf{L}^2 = \hat{A}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)}\right]$$

↳ pl. Schr.-egy. H atomban (gömbkoord. r.)



↑ ezek az A operátor

$Af(\theta,\varphi) = \lambda f(\theta,\varphi)$ s. fv-ei = gömbfv-ek

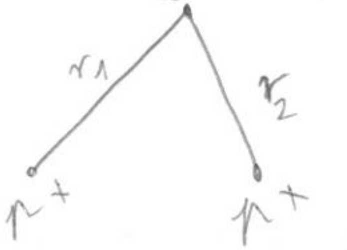
$\underline{u} = \Delta \underline{v}$

$$u_r = \Delta(v_r) - \frac{2}{r^2}\left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

$$u_\theta = \Delta(v_\theta) + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

$$u_\varphi = \Delta(v_\varphi) + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg}\theta \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2\sin\theta}\right]$$

7) Elliptikus k.r.

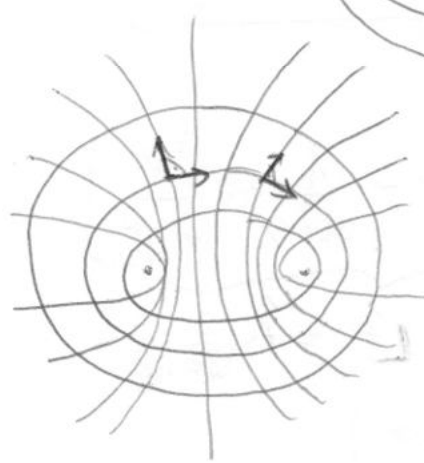


$$L = \frac{m}{2}v^2 + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2}$$

$r_1 + r_2 = a$ → ellipszis

$r_1 - r_2 = 2p$ → hiperbola

a sík minden pontján átmegy 1 (és csak 1) ellipszis



a sík ∀ pontján átmegy csak 1 hiperbola és csak 1 ellipszis

↓

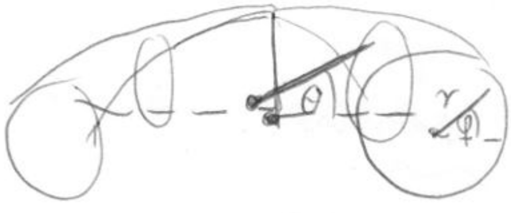
ezek is ⊥-et zárnak be ∀hol! → ez fontos

↳ eddig is ilyeneket néztünk

$$\begin{tikzcd}
x(\alpha, \rho, \varphi) & & \\
y(\alpha, \rho, \varphi) \arrow[r] & \underline{b}^{(k)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k} \arrow[d] & \\
z(\alpha, \rho, \varphi) & h_k(\alpha, \rho, \varphi) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
\text{grad} & \text{div} & \text{rot} & \Delta & \Delta \underline{r}
\end{tikzcd}$$

f) Tórusz k.r.

↳ ez is ∀hol ⦝ű

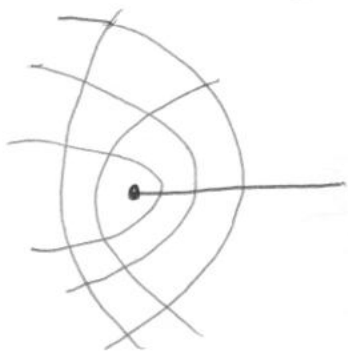


↓

általában a határfeltételek miatt választunk ilyen k.r.-t, vagy integrálási tartomány egyszerűsége miatt

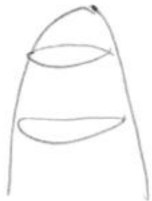
g) $w(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ → komplex fv.tan

$\Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$



10)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



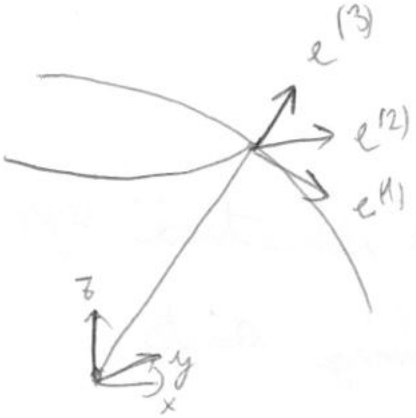
$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1$$

$\downarrow$ ...

param. függően lehet ellipszoid, 1 vagy 2 köpenyű hiperboloid:

x, y, z -t (u, v, w) -vel fejezzük ki

11)



eredeti bázis

$$\underset{\text{gömbi példában}}{\underbrace{\ }}\qquad \underset{\text{D-k rendsz.-ben}}{\underbrace{\ }}$$

$$\underline{v}(\underline{r}) = \sum_\alpha v_\alpha \cdot \underline{E}^\alpha = \sum_k v_k \underline{e}^{(k)}(\alpha)$$

$$v_\alpha = \sum Z_{\alpha k} v_k$$

$$\updownarrow$$

$$v_k = \sum_\alpha S_{k\alpha} v_\alpha \qquad Z^{-1} = S$$

átszámolás

más k. rendszerbe mátrix-szal

$$\xi_\alpha \left\{ \begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \right.$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x_k \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

$x(\xi) \leftrightarrow \xi(x)$

$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha}$ $\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_k}$

$\downarrow$

a k.r.-tő átszámító mátrixok kiszámolhatók a parc. deriv.-akból

$$g_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\alpha}$$

$$\vec{g} \rightarrow g_k = \sum_\alpha S_{k\alpha} g_\alpha = \sum_\alpha S_{k\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\alpha}(x(\xi)) = \sum_\alpha S_{k\alpha} \sum_l \frac{\partial \Phi}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial \xi_\alpha} =$$

$$= \sum_l \left(\sum_\alpha S_{k\alpha} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_\alpha} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x_l}$$

$\rightarrow$ vektorok átsz.-nál használt mátrix

$$g_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$$

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi))$$

Van
- koord. ~~kat~~
- vektorok
- deriváltak
- rotációk

átszámító mátrix

$$(\text{rot}\, v)_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$v_z = (\quad) v_r + (\quad) v_\theta + (\quad) v_\varphi$

$v_y = (\quad)$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

↓

v_z-re hattatjuk

$\frac{\partial}{\partial z} = \dots \to v_y$

↓

$(\text{rot}\, v)_x$ komponense → x komp.-t új k. rendszerben fejezzük ki (r, φ, θ)

→ KR átszámítás mátrix

= Gauss és Stokes-tételnél ugyanezt csináltuk, csak a trafókat egyszerűbben írtuk fel

DE nem derékszögűnél ez sokkal bonyolultabb

<u>Észrevétel</u>

Δ-nál v_r, v_φ, v_θ-ban <u>lineáris</u> marad! → ez fontos

13. óra

1) Grav.:

$$\cancel{m_t} \cdot \ddot{\underline{r}} = \underline{F} = \cancel{m_g} \cdot \underline{g}(\underline{r})$$

↓ súlyos tömeg

$$\ddot{r} = g(\underline{r})$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{g}(\underline{r}) = 0$$ rot. mentes

$$\exists\, \phi(r) : \cancel{g=0}\; g = -\nabla \phi$$ van gradiens

$$\oint g(\underline{r})\, d\underline{f} = \cancel{M} -4\pi G \int \rho(\underline{r})\, dV$$

$$\int \mathrm{div}\, \underline{g}\; dV = -\;\|\;-$$

$$\mathrm{div}\, \underline{g} = -4\pi G \cdot \rho$$

$$\boxed{\Delta \phi = 4\pi G \rho}$$ Poisson-egyenlet

$$m\, \ddot{\underline{r}} = \underline{f} = q\, \underline{E}(r)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$$ (sztatikában)

$$\exists\, \phi : \quad \underline{E} = -\nabla \phi$$

töltéssűr.

↑

$$\oint \underline{E}(\underline{r})\, d\underline{f} = -4\pi\, \varepsilon_0 \cdot \int \rho(\underline{r})\, dV$$

$$\int \mathrm{div}\, \underline{E}\; dV$$

$$\mathrm{div}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho$$

$$\boxed{\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho}$$

Anyagmegmaradás (Kont. egyenlet)

$c(\underline{r},t)$

koncentráció (sűrűség)

$$\frac{d}{dt}\int c(r,t)\,dV =$$

$$d\underline{f} = dA\cdot\underline{n}$$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int c} = -\oint j(r,t)\,d\underline{f}$$

$$\int\frac{\partial c(r,t)}{\partial t}dV = -\text{div}\,j\,dV$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}\,\underline{j}$$

Mi adja meg az áramot?

$$j = -\alpha\,\text{grad}\,c = -\alpha\nabla c$$

$$\text{div}\,j = -\alpha\Delta c$$ ha α nem függ a helytől

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha\Delta c}$$

↳ Fourier ugyanezt vezette le, csak „hőanyagra"

↳ Fourier-analízis

$u(\underline{r},t)$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u\right\}$$ ez hullámegyenlet → homogén d.e.

↗ (0 megoldása)

$\boxed{\Delta\phi = 4\pi G\rho}$ inhomogén, ha $\rho\neq 0$

$\Delta u(\underline{r})=0$ → Laplace-egyenlet

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = \alpha \Delta u$$

homogén

$\Delta u(\underline{r}) = \rho(r)$ inhom.

(Poisson-egyenlet)

próbafv.

$u(\underline{r},t) = U(\underline{r}) e^{-i\omega t}$

(ilyen alakban keressük a mo.-t)

↓

szeparálható

↓

$$\frac{\partial}{\partial t^2} u = -\omega^2 U(r) e^{-i\omega t}$$

$$-\omega^2 U \cancel{e^{-i\omega t}} = c^2 (\Delta U) \cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Helmholtz-egyenlet $\boxed{\Delta U(\underline{r}) = -k^2 U(\underline{r})}$

$$(\Delta + k^2) U = 0$$

Visszavezethetőek erre az egyenletek

$\Delta u = \lambda \cdot u(r)$ ←

Laplace-op. sajátértékprobléma

egyenletrendszer: sok egyenlet, amit együtt kell megoldani

-ll- sereg: -ll-, amit külön -ll-

Kellenek peremfeltételek is:

- a tart. határain mondjuk meg a fv.-

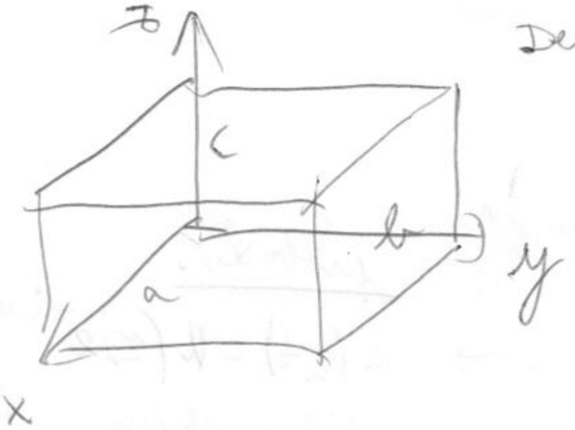
↳ mi van, ha csúnya a tartomány

↓

koordinátatrafó

2)

Descartes-ban:



$u(x,y,z)$ HF: (határfelt.)

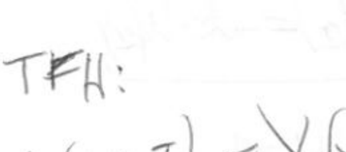
$$u(x=\cancel{m}0,y,z)=0$$
$$u(x=a,y,z)=0$$
$$u(x,y=0,z)=0$$
$$\cancel{u(x,y=0,z}$$
$$u(x,y=b,z)=0$$
$$u(x,y,z=0)=0$$
$$u(x,y,z=c)=0$$

TFH:

$u(x,y,z)=X(x)Y(y)\cdot Z(z)$ ilyen ~~szeparálható~~ szorzat alakban keresem a megoldást

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=X''(x)Y(y)Z(z)+X(x)Y''(y)Z(z)+$$
$$+X(x)Y(y)\cdot Z''(z)\overset{!}{=}\lambda u=\lambda X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda \qquad /:X(x)Y(y)Z(z)$$



→ ha elmozdulnánk x-ben, csak $\frac{X''}{X}$ változik, a többi nem → de akkor nem lenne igaz az egyenlőtlenség)

↳ Mindegyik konstans kell, hogy legyen.

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\alpha}+\underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\beta}+\underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}}_{\gamma}=\lambda$$

→ szeparációs konstansok

$X''=\alpha X$ → $\alpha<0$ $X''(x)=-k^2X(x)$ $X(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$

→ $\alpha>0$ $X''(x)=q^2X(x)$ $X(x)=A'\operatorname{ch}(qx)+B'\operatorname{sh}(qx)$

$Y''=\beta Y$

$Z''=\gamma Z$ ← hasonlóan → a HF dönti el, melyik jó

$\alpha+\beta+\gamma=\lambda$

---

a határfeltételekből (1,2.) → $X(x=0)=0$ $X(x=a)=0$

$X(0)=A=0$ $\boxed{A'=0}$, $B'\operatorname{sh}qa=0$

$X(x=a)=B\sin(ka)=0$

$\sin(ka)=0$

$ka=n\pi$ $n\in\mathbb{Z}$

$k=\frac{n\pi}{a}$

$\alpha=-k^2=-\frac{n^2\pi^2}{a^2}$

↓

ez más, mint a mátrixok s.é. problémája

↳ diff. op.-nak csak adott határfeltételek mellett van <u>nem minden</u> α-ra megoldása!

$\downarrow$

a határfeltétel „megkvantálja" a megoldást

α előjelét is meghat. a Hf

$\alpha < 0$ (l. előbb)

$\Downarrow$

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$$Z(z) = \sin\left(\frac{l\pi}{c}z\right) \quad l \in \mathbb{N}^+$$

$$u(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\overset{l}{\cancel{n}}\pi}{c}z\right) = \Phi_{nml}(x,y,z)$$

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2} - \frac{l^2\pi^2}{c^2}$$

$$\Delta\phi = \lambda\phi$$

$\downarrow$

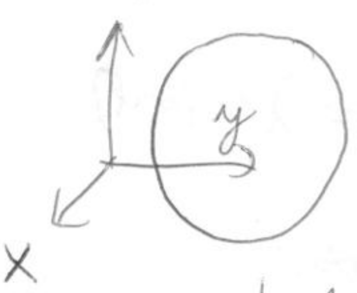
∞ sok s.é.-van

Ált. mo.: ↑ mivel lineáris volt az egyenlet!! → a megoldások összege is mo.

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m,l} C_{nml}\,\Phi_{nml}(x,y,z)$$

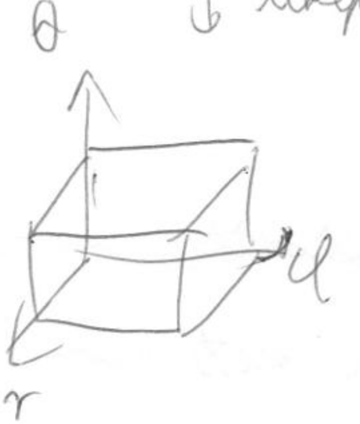
szorzat alakú megoldások bázist alkotnak a megoldások terében

3) ~~to~~ ha gömböt nézünk → a határfeltételt már nem lehet megfogalmazni x, y, z -vel



ha $x^2+y^2+z^2=R^2$
$u=0$

↓ leképezzük egy olyan térbe, ahol már egy téglatest a tartomány

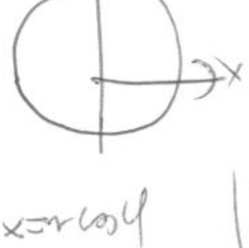


↓ úgy választjuk az É.T.-t, hogy a peremfeltételt u (egyik vált. = konst., ..., ...) alakban lehessen megfogalmazni

<u>Megoldás 2D-ban: (kör)</u>

(tétel: ált. tartományon ∃ ilyen K.R.) → ahol téglalap/test a leképezett tartomány

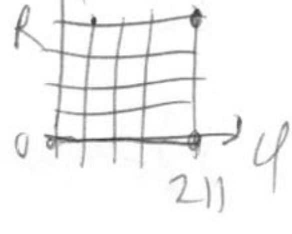
→ ezen is, csak nehéz megtalálni



$\Delta u = \lambda u$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\boxed{\text{Hf: ha } r=R \text{, akkor } u=0}$$



$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y^2}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$ → Laplace polárban ~~gömbiben~~

$$\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = \lambda u(r,\varphi)$$

Csak 1 határf.-em van, de 2 vált.

↓

?

+ határfeltételek:

- $u(\varphi) = u(\varphi + 2\pi)$ → 2π szerint periodikus fv.-eket kell keresni, mert azok a pontok ugyanazok
- $r=0$ -ban is rendesen kell viselkednie a fv-nek, mert csak a mi k.r.-ünk szinguláris az adott pontban

$$u(r,\varphi) = U(r)\,\Psi(\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}(r) \cdot \Psi(\varphi) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = U''(r) \cdot \Psi(\varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = U(r) \cdot \frac{\partial \Psi(\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = U(r)\,\frac{\partial^2 \Psi(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

$$u''(r)\Psi(\varphi)+\frac{1}{r}u'(r)\Psi(\varphi)+\frac{1}{r^2}u(r)\Psi''(\varphi)=\lambda\, u(r)\Psi(\varphi) \quad \Big/ \frac{1}{u}=\frac{1}{u\Psi(\varphi)}$$

$$\frac{u''(r)}{u(r)}+\frac{1}{r}\frac{u'(r)}{u(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)}=\lambda$$

$/\cdot r^2$

$$\underbrace{R(r)}_{r\text{-től függő rész}}+\underbrace{\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)}}_{\varphi\text{-től függő rész}}=\lambda$$

ez nem lineáris egy.-eknél is működik

$\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)}$ -nek konstansnak kell lennie, mert φ-től csak ez függ

$$\frac{\Psi''(\varphi)}{\Psi(\varphi)}=\gamma=\text{konst.}$$

$\mu^2 \quad \Psi''(\varphi)=\mu^2\Psi(\varphi)$

$-m^2 \quad \Psi''(\varphi)=-m^2\Psi(\varphi)$

~~$\Psi(\varphi)=A'\,\mathrm{ch}\,\mu\varphi+B'\,\mathrm{sh}\,\mu\varphi$~~ nem jó, mert nem periodikus

$\Psi(\varphi)=A\cos(m\varphi)+B\sin(m\varphi)$ → ez lehet 2π szerint periodikus

$$\cos(m(\varphi+2\pi))=\cos(m\varphi)\cos(m2\pi)-$$

$$-\sin\varphi\cdot\sin(m2\pi)=\cos(m\varphi)$$

$\Downarrow$

m egész $\quad m\in\mathbb{Z}$

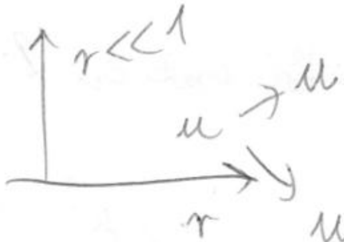
a határfeltételek megint megkvantálták a problémát

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r}\,\frac{u'(r)}{u(r)} - \frac{m^2}{r^2} = \lambda$$

$$\boxed{u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) + \left(-\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right) u(r) = 0}$$ Bessel-egyenlet

alaprendszer = bázis a lin. térben

↳ másodrendű → 2 bázis



$\to u \sim r^m$ $\quad r \geq 0$ -ra

$u \sim \frac{1}{r^{m+1}}$ → ez nem jó, mert az origóban szinguláris

ha nem lenne az origó a tart.-ban

$r = R_1 \to u = 0$
$r = R_2 \nearrow$

↳ ilyenkor a két megoldás ~~lineáris~~ lineárk.-ja a mo.

megoldásai a Bessel-fv-ek (m most egész)

(létezik m ≠ egészre is mo.-a az egyenletnek)

sőt komplexre is

⇓

de ezek már nem a Laplace-egyenlet megoldásai legyen: $\lambda = -k^2$

$$z = k \cdot r$$

$$u'' + \frac{1}{2}u' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)u = 0$$

akkor

$\to$ $u(r) = B(z)$

$$\frac{du}{dr} = \frac{dB}{dz}\cdot\frac{dz}{dr} = k\cdot\frac{dB}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = k^2 B''(z)$$

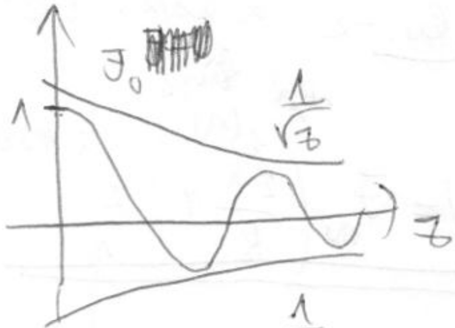
$$k^2 B''(z) + \frac{1}{\underset{z}{kr}}kk\, B'(z) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\underset{z^2}{k^2r^2}}k^2\right)B(z) = 0 \quad /:k^2$$

$$\boxed{B''(z) + \frac{1}{z}B'(z) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)B(z) = 0}$$

a Bessel egyenlet stand. alakja

$J_m(z)$ $\quad$ $N_m(z)$ $\to$ ezek a fv-ek a megoldásai

$\sim r^m$ $\quad$ $\sim \frac{1}{r^{m+1}}$



$r \to \infty$: $J_m \sim \frac{\cos(z - \varphi_m)}{\sqrt{z}}$

$N_m \sim \frac{\sin(z - \varphi_m)}{\sqrt{z}}$

Fraunhoffer-diff.-ban is ez néztük: síkhullámokkal közelítettük a ∞-ben (λ-hoz képest nagy, pl. 1m) a gömbhullámokat

Visszatéve a pl.-ba:

$B(z) = J_m(z)$

$u(r) = B(z)$

$u(r) = J_m(k\cdot r)$ a határfeltétel miatt (megint kiválasztunk speciális ~~a~~ λ-kat, amik sajátértékek lesznek) ↙

$u(r=R) = J_m(kR) = 0$

de a Bessel-fv. meghatározott helyeken 0.

$kR = \xi_n^{(m)}$ m. Bessel-fv. n. z.h.-e

$k_{mn} = \frac{\xi_n^{(m)}}{R}$

ez a s.fv.-e a Lapl.-nak ~~egyenletnek~~

ettől függ

$$\boxed{\lambda = -k^2 = -\left(\frac{\xi_n^{(m)}}{R}\right)^2}$$

$$\underline{\underline{u_{mn}(r,\varphi) = J_m\left(\frac{\xi_n^{(m)}}{R} r\right) e^{im\varphi}}}$$

↓ ezek a sajátért.-ek

$\Delta u = \lambda \cdot u$

$\Phi(\varphi)$-ből

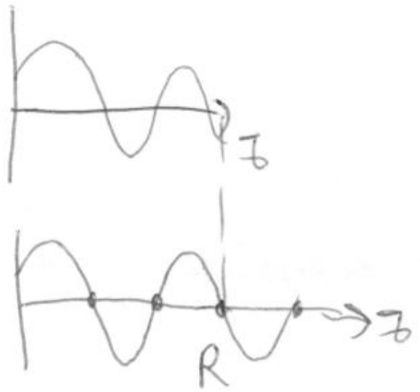
$u(r,\varphi,t) = e^{-i\omega t} u(r,\varphi)$

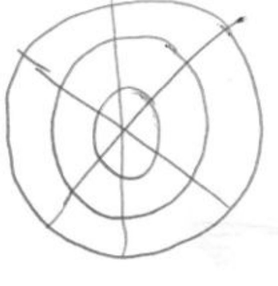
$-\omega^2 \cdot e^{-i\omega t} u(r\varphi) = c^2 \Delta u(r,\varphi) e^{-i\omega t}$

$$\Delta u = -\boxed{\frac{\omega^2}{c^2}} u$$

$$\boxed{\omega_{mn} = \frac{c}{R} \xi_n^{(m)}}$$

↓
ezek a sajátértékek

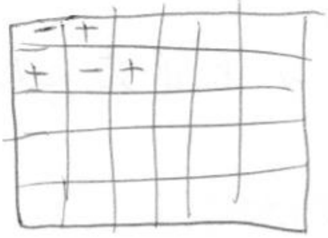




Vannak zérusvonalak
↓
itt 0 a kitérés (u)

Téglalappal:

$\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$



csomóvonalak
↓
ezek mentén 0 a kitérés (u)

$$\frac{\partial^2 u(\underline{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(\underline{r},t)$$

$$u(\underline{r},t) = U(\underline{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$-\omega^2 U = c^2 \Delta U$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

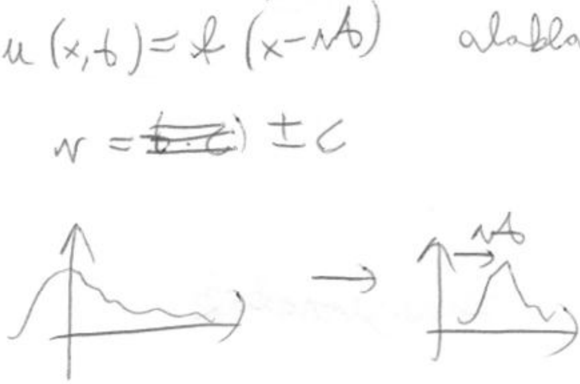
$$\Delta U(\underline{r}) = -k^2 U$$

$u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x,t) = f(\overset{\xi}{\overbrace{x - vt}})$ alakban keressük a mo.-t

ahol $v = \pm c$



$\Delta U(\underline{r}) = -k^2 U$ **3D-ban:** ~~$(u(r,t) = \frac{f}{r})$~~

$$\frac{\partial^2 u(t,r,\vartheta,\varphi)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$u(t,r,\theta,\varphi) = F(t,r)$$

gömbszimm. megoldást keressük → θ, φ független

$$\frac{\partial^2 F(t,r)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} \right)$$

N dimenzióban:

$$f''(r) + \frac{N-1}{r} f' = \frac{\left(f' r^{N-1}\right)'}{r^{N-1}}$$ tetsz. N-re igaz

$$f'' + \frac{2}{r} f' = (fr)''$$ csak N=3-ra igaz !!

msz.: $(fr)' = f'r + f$

$$(fr)'' = f''r + f' + f'$$

~~$(fr)''$~~ $\frac{(fr)''}{r} = \frac{f''r + 2f'}{r} = f'' + \frac{2}{r} f'$

$\Downarrow$

~~keressük~~ $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$ $(f\cdot r)''$-nek ~~(minek)~~ a második deriváltja $\cdot\frac{1}{r}$

~~$f(r,t)$~~

$\Downarrow$

$F(r,t) = \frac{R(r,t)}{r}$ alakban keressük a mo.-t

$$\frac{\partial^2 F(t,r)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) = c^2 \cdot \frac{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(Fr)}{r} = \frac{c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r,t)}{r} \quad \Big/ \cdot r$$

$$\frac{\partial^2 \overset{r\cdot F}{R}}{\partial t^2}(t,r) = c^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2}$$

$$R(t,r) = f(r-ct)$$

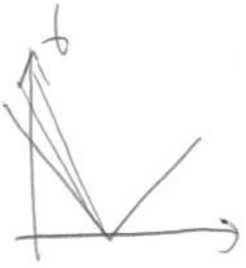
$$\boxed{F = \frac{f(r-ct)}{r}}$$ a 3D-s hullámegyenletnek ilyen mo.-a van

~~az intenzitás $\frac{1}{r^2}$-el terjed~~

↓

az intenz. $\frac{1}{r^2}$-el terjed,

az energia megmarad r^2-es felületen → de ez csak 3D-ban igaz!



→ más dim.-ban lemaradó hullámok is vannak

halványulva látom a „múltját" a jelenségnek

A Helmholtz-egyenlet ált., nem gömbszimm. megoldása: 3D-ban

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)=-k^2u(r,\theta,\varphi)$$

$$R''(r)\,Y+\frac{2}{r}R'(r)\cdot Y+\frac{1}{r^2}R(r)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right)=$$

$$=-k^2R(r)\,Y(\theta,\varphi)\qquad /\cdot\frac{1}{YR}$$

$$\frac{R''+\frac{2}{r}R'}{R}+\frac{1}{r^2}\cdot\boxed{\frac{1}{Y}\left(\quad\right)}=-k^2$$

ennek konstansnak (K) kell lennie, mert nem függ r-től, a többi rész nem függ (φ,θ)-tól

$$\frac{R''+\frac{2}{r}R'}{R}+\frac{K}{r^2}=-k^2$$

$$R''+\frac{2}{r}R'+\frac{K}{r^2}R=-k^2R$$

és $$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial Y}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}=KY}$$

$$\downarrow$$

2 változós d.e.

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{K}{r^2}\right)R(r)=-k^2R}$$

$$\downarrow$$

1 változós d. egyenlet

$r\in\,]0,\infty[$

a kapcsolatot K jelenti

újabb szep. 2 vált. ⇒ 1, 1 vált

$$Y(\theta,\varphi)=P(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

$$P''(\theta)\,\phi(\varphi)+\operatorname{ctg}\theta\;P'(\theta)\cdot\Phi(\varphi)+\frac{1}{\sin^2\theta}P(\theta)\,\Phi''(\varphi)=KP(\theta)\,\Phi(\varphi)\qquad /\cdot\frac{1}{P\Phi}$$

$$\frac{P''(\theta)}{P(\theta)}+\operatorname{ctg}\theta\cdot\frac{P'(\theta)}{P(\theta)}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=K$$

$$\downarrow$$

$$\Phi(\varphi)=e^{im\varphi}\quad m\in\mathbb{Z}$$

$$\Phi''=-m^2\Phi$$

$$\boxed{P''(\theta)+\operatorname{ctg}\theta\cdot P'(\theta)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P(\theta)=KP(\theta)}$$

$\theta\in\,]0,\pi[$

ez szinguláris $\theta=0$-ban a sin és ctg miatt, ~~(és π)~~

kivéve, ha

$\Downarrow$

$P(\theta)=\sin^{m}(\theta)\cdot f(\theta)$ alakban keressük a mo.-t → ilyenkor nem lesz szingularitás

$\hookrightarrow n = |m|$ (behely. után)

új vált.

$w = \cos\theta \qquad f(\theta) := g(w)$

$w \in (-1, 1] \qquad \hookrightarrow g''(w) + \dots g'(w) + \dots = K\, g(w)$

mo.: $\downarrow$

w polinomja : Legendre-polinomok

$\swarrow$

w^{l-n}

$K = -l(l+1)$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \mathrm{ctg}\,\theta\; Y' + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = KY$$

$$\boxed{Y(\theta,\varphi) = g(\cos\theta)\cdot(\sin\theta)^{|m|}\cdot e^{im\varphi}}$$ gömbfv.-ek

$K = -l(l+1) \quad l \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$$m \in \{\underbrace{l, -l+1, \dots\, l-1, l}_{2l+1}\}$$

$\downarrow$

degenerált probléma

$(2l+1)$ db m-nek azonosak a sajátértékei, adott K-ra (l-re)

$$F(\theta,\varphi) = \sum_m c_m Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

↓

Laplace-egy. megoldása 3D-ban

↙ ↘

radiális rész   szögtől függő rész

↓

gömbfv.-ek

H atomnál is ugyanilyen alakú a probléma, csak a potenciál miatt megjelenik egy + ~~tag~~ a radiális részben (de a gömbfv. mo. uaz, mert a pot. a szögtől nem függ)

↓

$$\underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}}_{\text{gömbfelületre vett int.}} |Y_{lm}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 1$$

→ így kell normálni az $Y(\theta,\varphi)$ fv.-t.

↓

\+ normálási szorzó jön be

$$\int Y^*_{lm}(\theta,\varphi) \cdot Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

↓

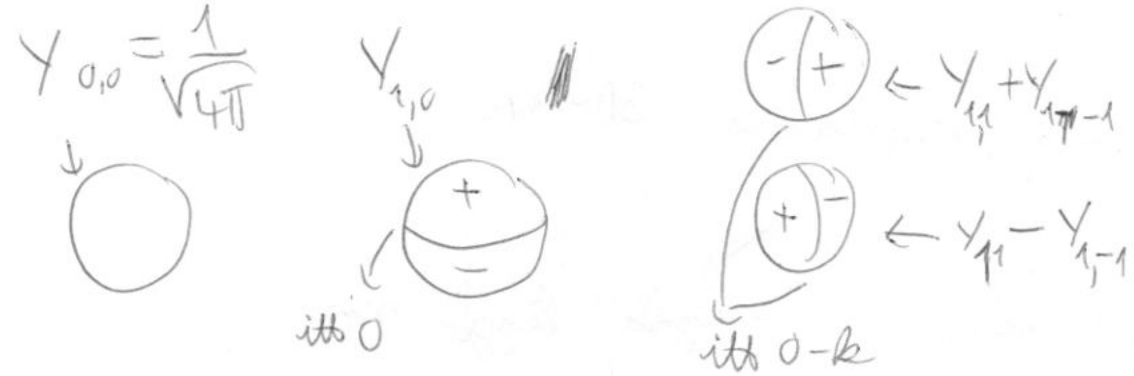
ortonormáltak

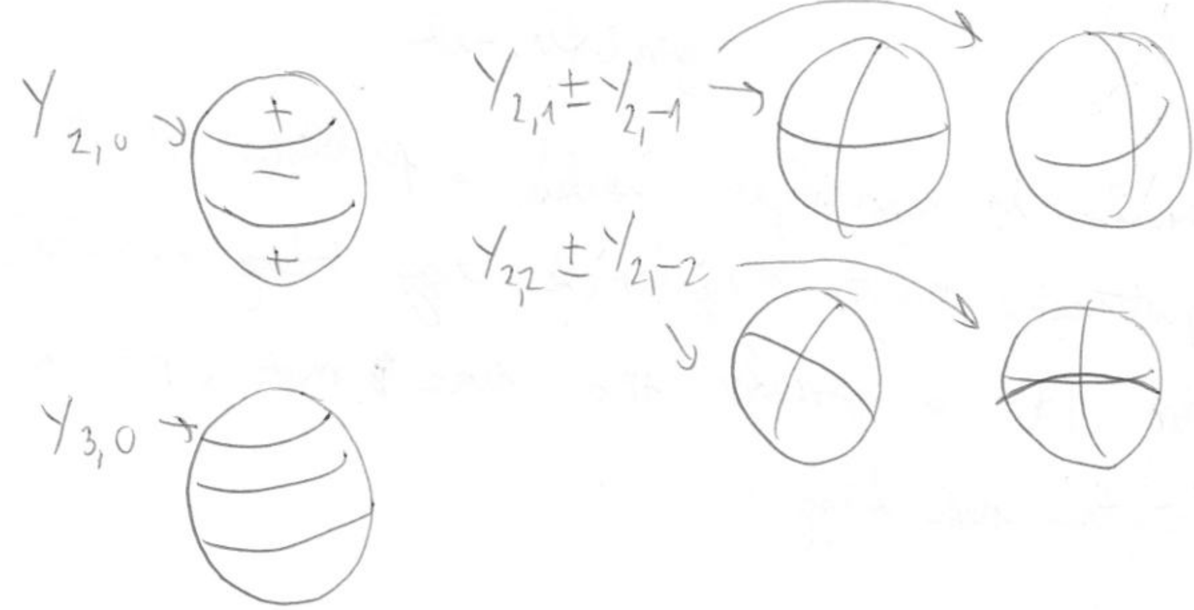
↓

Áll: gömbfv.-ek a gömbfelületen bázist alkotnak

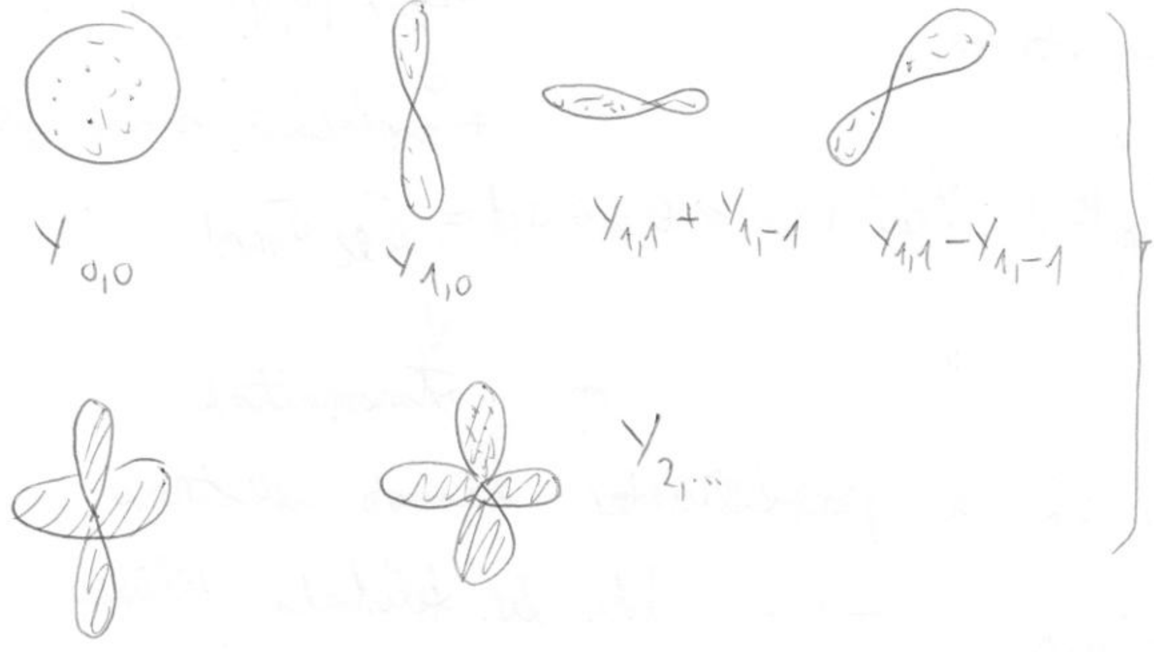
↳ bármilyen —"— int. fv. felírható velük

Áll:$_2$ akármilyen más fv. is kifejthető velük





Ha hozzáveszem a radiális részt is:



az e^- nem csak ezeken a pályákon lehet, hanem ezek lineárkomb.-in is

↳ Ezek az e^- pályák a H-atomban

Mat. módszerek vizsga összefoglaló

1) Fourier-sor:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$ ← f(t) T szerint periodikus

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\, dt$$

2) Fourier-analízis:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{F(\omega)}{L(i\omega)}\, e^{i\omega t}$$

Green-módszer

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \delta(t-\tau)\, f(\tau)$$

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)} \rightarrow G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \frac{1}{L(i\omega)}\, e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, G(t-\tau)\, f(\tau)$$

3) Komplex fv.-tan:

a) $$w(x,y) = \overbrace{u(x,y)}^{\phi} + i\, \overbrace{v(x,y)}^{\psi} \leftarrow z = x + iy$$

Cauchy-Riemann: $$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

és $$\Delta\phi = 0 \qquad \Delta\psi = 0$$

b) $$\oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\, f(z_k)$$, ahol z_k-k a körbejárt pólusok

$$c_{-1}\left(\mathrm{Res}(z_n)\right) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{(n-1)}}\left[(z - z_p)^n \cdot f(z)\right]\Big|_{z = z_p}$$ → n-edrendű pólus (z_p-ben) reziduma

4) Variációszámítás:

- ELE: $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$ ahol q_k-k az ált. koordináták
  $\forall k$-ra

  $$\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) + \ldots + (-1)^n \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^n \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial q^{(n)}}\right) = 0 \right)$$

  ↳ ELE magasabb rendű deriváltakra

- Beltrami: $\sum_k p_k \cdot \dot{q}_k - L = \text{áll}$, ha $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\left(p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)$

- Hamilton: $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$

5) Vektoranalízis:

$$h_k = \left|\frac{\partial r}{\partial q_k}\right|$$

$$(\text{grad}\,\phi)_k = \frac{1}{h_k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

$$\text{div}\,\underline{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left[\frac{\partial (v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (v_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right]$$

$$\text{rot}\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial (v_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (v_2 h_2)}{\partial q_3} \right) \\ \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial (v_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (v_3 h_3)}{\partial q_1} \right) \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial (v_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (v_1 h_1)}{\partial q_2} \right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta \underline{v} = \text{grad div}\,\underline{v} - \text{rot rot}\,\underline{v}$$