EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Gnädig Péter

BEVEZETÉS A DISZTRIBÚCIÓELMÉLETBE ÉS FIZIKAI ALKALMAZÁSAIBA

KÉZIRAT

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1981

Ez a jegyzet annak a speciálelőadásnak a kibővített anyagát tartalmazza, melyet "Matematikai módszerek a fizikában" címmel az ELTE fizikus hallgatóinak tartottam 1976-79-ben. Megértéséhez a differenciál- és integrálszámítás, a komplex függvénytan, valamint a funkcionálanalízis alapjainak ismerete szükséges.

A jegyzet 55 részletesen kidolgozott példát tartalmaz. Ezek legnagyobb része elemi, csupán a definíciók átismétlésére szolgáló feladat, - önálló végiggondolásuk nagyon megkönnyítheti a leírtak megértését. A III. részhez tartozó - kicsit összetettebb - problémák az elmélet fizikai és műszaki alkalmazásait illusztrálják, ezek megoldásához bizonyos előismeretekre van szükség.

A jegyzet megírásánál elsősorban a fizikai alkalmazások bemutatására törekedtem, az elmélet matematikai megalapozásánál csak a legszükségesebbekre szorítkoztam. Azoknak, akik részletesebben meg akarnak ismerkedni a disztribúcióelmélet matematikai felépítésével, az alábbi könyveket ajánlom:

И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов: Обобщенные функции и дейсмвия над ними. Гос. Изд. Физ –Мат. Лит. Москва 1959.

R. Cristescu, G. Marinescu: Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó 1969.

A kézirat átnézéséért köszönetet mondok Niedermayer Ferenc és Werner Antal kollégáimnak; hasznos észrevételeikkel és értékes tanácsaikkal nagymértékben elősegítették ennek a jegyzetnek a megjelenését.

Budapest, 1980. május hó.

TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETÉS ... 3
II. A DISZTRIBÚCIÓELMÉLET ALAPJAI ... 7
2.1 A disztribúciók fogalma ... 7
2.2 Műveletek disztribúciókkal ... 9
2.3 Disztribúciók deriválása és integrálása. A disztribúciók tartója ... 12
2.4 Disztribúciók deriválása és integrálása egy folytonos paraméter szerint. Disztribúciók közelítése regulárisdisztribúció-sorozatokkal ... 15
2.5 Disztribúciók konvolúciója ... 18
2.6 Többváltozós disztribúciók ... 23
2.7 Mérsékelt disztribúciók; analitikus disztribúciók ... 26
2.8 Disztribúciók Fourier-transzformáltja ... 29
2.9 A Fourier-transzformáció tulajdonságai ... 33
III. A DISZTRIBÚCIÓELMÉLET ALKALMAZÁSAI ... 38
3.1 Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldása ... 38
3.2 Függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-módszerrel ... 43
3.3 A Green-függvény ... 50
3.4 Parciális differenciálegyenletek és Green-függvényeik ... 57
3.5 Green-függvények és elemi megoldások meghatározása Fourier-transzformáció módszerével ... 62
3.6 Disztribúciók a kvantummechanikában ... 64
IV. A FELADATOK MEGOLDÁSA ... 71
FÜGGELÉK ... 96
I. A nyeregpont-módszer ... 96
II. A diszperziós összefüggések és az okság elve ... 99
III. Fourier-transzformációs táblázat ... 106

I. BEVEZETÉS

A fizika alkalmazza a matematika módszereit. Amikor egy problémát megfogalmazunk, akkor különböző fizikai mennyiségeknek matematikai szimbólumokat feleltetünk meg. Ezek a szimbólumok lehetnek például a természetes számok, törtek, vektorok, függvények stb. Az adott jelenségkör összefüggéseit megfogalmazó fizikai törvények (pl. a Maxwell egyenletek, vagy a Newton axiómák) megszabják, milyen műveleteket kell végezzünk a kiindulási adatokkal, hogy megkapjuk a keresett fizikai mennyiségeket leíró matematikai szimbólumokat (pl. differenciálegyenlet megoldása, mátrix diagonalizálása, algebrai egyenletek megoldása stb.). A kapott eredmények értelmezése (megfeleltetése fizikai mennyiségeknek) a feladat megfogalmazásához hasonlóan kimondottan fizikai feladat, a közbenső lépéseket azonban elvonatkoztathatjuk a konkrét problémától és tisztán matematikai eljárásnak is tekinthetjük.

A matematikai megoldás során különböző utakat követhetünk. Egy lineáris egyenletrendszer megoldásánál pl. akármelyik ismeretlen kiküszöbölésével kezdjük is a megoldást, mindig ugyanazt a végeredményt kell kapjuk. A matematika felhasznált területének belső ellentmondás-mentessége, zártsága biztosítja, hogy az eredmény független legyen a hozzá vezető út kacskaringóitól.

A matematikai fogalmak "fejlődésében" egyre bővülő struktúrákat figyelhetünk meg, melyek a kezdeti "egyszerű" fogalmak mind szélesebb kiterjesztéséből, általánosításából adódtak. Ennek az általánosítási törekvésnek részben esztétikai okai vannak (szép feladat egy fogalomkör legteljesebb kibővítését megkeresni), részben pedig a gyakorlat kényszeríti ki bizonyos műveletek elvégezhetőségén keresztül.

A természetes számok körében elvégezhető az összeadás és a szorzás művelete, de a kivonás már kivezet ebből a számkörből. A negatív számok definiálásával már minden esetben elvégezhető a kivonás, de az osztás művelete még mindig nem. Ehhez szükség van a törtszámokra is. Miközben általánosítjuk (bővítjük) a számfogalmat, mindig ellenőriznünk kell, hogy az eddig használt műveleti szabályok a kibővített számkörben is érvényben maradnak-e. Például igaz-e negatív számokra is az összeadás asszociativitása:

a + (b+c) = (a+b) + c. Csak úgy maradunk biztos talajon, ha a kibővített fogalomkörben is jól tudjuk, hogy milyen műveletek a megengedettek és azokat hogyan kell elvégezni. Definiálni akármit lehet, de kérdés, hogy érdemes-e éppen így definiálni az új fogalmakat, műveleteket. Mondhatnánk például, hogy terjesszük ki az osztás műveletét a nullával való osztásra is $\frac{a}{0}=0$ definícióval. Ekkor azonban nem lenne érvényes erre a műveletre a $c\cdot\frac{a}{c}=a$ összefüggés, hiszen $0\cdot\frac{a}{0}=0\neq a$.

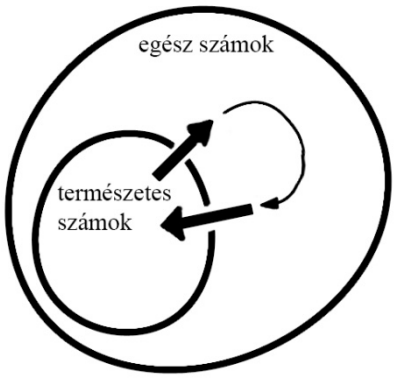
Vigyáznunk kell tehát, amikor kiterjesztünk valamilyen ismert fogalomkört, mert előfordulhat, hogy a kiterjesztés előnyeiért túl nagy árat kell fizetnünk.

Miért hasznos a fizikai problémák megoldásánál, ha egy halmazt - melynek elemei konkrét fizikai jelentéssel bírnak - oly módon általánosítunk, hogy a kiterjesztésnek semmiféle fizikai jelentése nincsen? Van-e értelme negatív tömegről, képzetes impulzusnyomatékról, vagy éppen komplex időről beszélni? Két egyszerű példán mutatjuk be, hogy bizonyos esetekben hasznos lehet az ilyen kiterjesztés.

P.A.M. Dirac angol fizikus nevéhez fűződik a következő probléma ötletes megoldása. Hat ember elmegy kókuszdiót gyűjteni. Rengeteg diót szednek össze, de rájuk esteledik, s így az osztozkodást másnapra halasztják. Éjszaka azonban az egyikük felébred és nem bízván a társaiban, hatfelé osztja a készletet. Ezt egy maradékkal meg is tudja tenni; a maradék diót a közeli fáról figyelő majomnak dobja, az $\frac{1}{6}$ készletet pedig eldugja. Társai sem bíznak jobban egymásban és az éjszaka során mindegyikük megismétli a szétosztást. Mindig marad egy dió a majomnak, s mindegyikük eldugja az általa szétosztott diók egyhatodát. Végül reggel szétosztják a megmaradt készletet és a maradék

egyetlen diót a majomnak adják. Kérdés: hány diót gyűjtöttek az előző nap? A feladat nyilván határozatlan, mert ha n egy megoldás, akkor $n + k \cdot 6^7$ is megoldás (k egész), hiszen a két megoldás különbsége 7-szer egymás után osztható kell legyen 6-felé. Elegendő tehát egyetlen megoldását meghatároznunk. Dirac azt vette észre, hogy az n = -5 jó megoldás, hiszen ebből egyet elvéve -6 marad, ez osztható 6-tal, és az öthatoda -5 ismét a kezdeti szám, tehát az eljárás akárhányszor ismételhető. Fizikailag azonban az n = -5 dió teljesen értelmetlen, a megoldás csupán formálisan jó. Mivel azonban $n + k \cdot 6^7$ is jó megoldás, a legkisebb fizikailag is reális megoldás $6^7 - 5$.

Figyeljük meg, hogy a számolás során kiléptünk a természetes számok halmazából az általánosabb egész számok halmazába. Ebben a halmazban végeztük el a számításainkat, de a kapott megoldások közül csak a természetes számoknak tulajdonítottunk "fizikai" jelentést. Azért használhattuk bátran a negatív számokat is, mert tudtuk, hogy az ezekkel végzett műveletek megengedettek, ugyanazt az eredményt kell tehát kapnunk, mintha végig a természetes számok körében maradtunk volna. Valóban, a feladat megoldható a természetes számok halmazára szorítkozva is, de sokkal nehézkesebben, mint az itt ismertetett eljárással.



1. ábra

Második példaként nézzük meg az

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

differenciálegyenlet megoldását az x(0) = 1, x'(0) = 0 kezdeti feltételek esetén. A valós függvények körében maradva a megoldást a következő módon kaphatjuk meg. Bevezetve a v = x'(t) új változót

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[v(x)\right]^2 = -\omega^2 \cdot x$$

ahonnan

$$\frac{1}{2} d\left(v^2\right) = \frac{v^2}{2} = -\int \omega^2 x dx = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 + C.$$

A v(t=0) = v(x=1) = 0 kezdeti feltételből $C = \frac{\omega^2}{2}$ adódik. Tehát

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{1 - x^2}\ , \qquad \text{ahonnan}$$

$$\omega \int dt = \int dx \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x, \qquad \text{vagyis}$$

$$x(t) = \sin\omega\left(t - t_0\right).$$

A kezdeti feltételből $t_0 = -\frac{\pi}{2\omega}$, innen

$$x(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega t \qquad \text{adódik.}$$

Sokkal hamarabb célhoz érünk, ha az eredeti differenciálegyenlet megoldását a komplex értékű függvények körében keressük. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet megoldását mindig kereshetjük $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban, amit behelyettesítve az egyenletbe a λ paraméterre a λ=±iω megszorítást kapjuk. Mivel az egyenlet lineáris, az általános megoldás

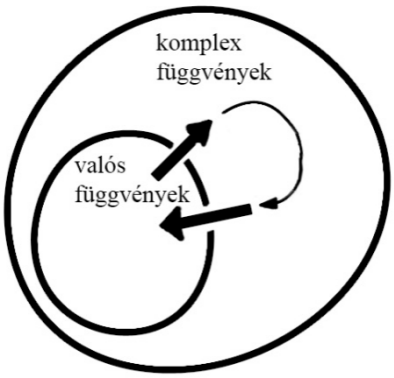
$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

alakú, tetszőleges komplex A és B állandókkal. A kezdeti feltételekből A + B = 1, iω(A - B) = 0, tehát A = B = ½ adódik, vagyis a megoldás

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \equiv \cos\omega t.$$

Most a valós függvények halmazából léptünk ki, a számolást a valós változójú komplex számértékű függvények körében végeztük el. A végeredmény azonban ismét egy valós függvény volt. A

megoldást azért fogadhatjuk el, mert tudjuk, hogy a komplex értékű függvényekre is igaz pl. a tagonkénti deriválhatóság stb. tulajdonság, tehát a számolás során jól definiált, megengedett műveleteket végeztünk.



2. ábra

Nem mondhatjuk el ugyanezt a Heaviside által kezdeményezett operátorkalkulusról. Ez egy olyan próbálkozás volt, mely a differenci-álás műveletét (és ezáltal bizonyos differenciálegyenletek megoldását) algebrai lépésekre: vezette vissza. A d/dx deriválási utasítást formálisan D-vel jelölve például az

$$y'(x) + y(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$(D+1)\,y(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

alakban írható, amely - feltételezve, hogy a D mennyiséggel ugyanúgy lehet számolni, mint a számokkal - közvetlenül megoldható:

$$y(x) = \frac{1}{D+1}\left(3x^2 - 2x + 5\right) = \left(1 - D + D^2 - D^3 + \ldots\right)\left(3x^2 - 2x + 5\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{d}{dx} + \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \ldots\right)\left(3x^2 - 2x + 5\right) =$$

$$= \left(3x^2 - 2x + 5\right) + (-6x + 2) + 6 + 0 + 0 + \ldots = 3x^2 - 8x + 13$$

Közvetlen behelyettesítéssel igazolható, hogy ez valóban megoldása a vizsgált differenciálegyenletnek, ha nem is a legáltalánosabb megoldása. Más esetekben azonban ugyanilyen lépésekkel hibás eredményre juthatunk, ami arra figyelmeztet, hogy D mégsem egészen olyan, mint egy közönséges szám! Milyen függvényekre alkalmazhatjuk D-t, mikor számolhatunk vele a fentebb bemutatott módon? Amíg ezekre a kérdésekre nem kapunk választ, addig nem használhatjuk az operátorkalkulust "komoly" számításoknál.

A fenti gondolatsor folytatása vezet el ahhoz a kérdéshez: létezik-e a hagyományos függvényfogalom olyan általánosítása, amely magába foglalja az eddig használt függvények bizonyos osztályát, de ezeknél általánosabb elemeket is tartalmaz. Hogyan kell számolni ezekkel az általánosított függvényekkel, milyen fizikai számításoknál hasznosak, mint közbenső számítási elemek, segédmennyiségek, és vannak-e olyan fizikai mennyiségek, melyeknek ilyen általánosított függvények feleltethetek meg.

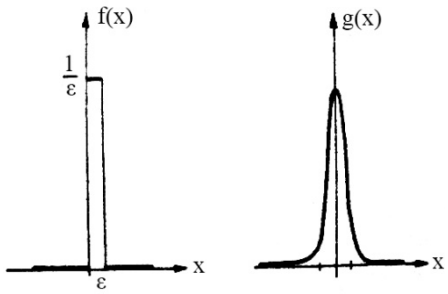
Talán a legismertebb általánosított függvény (un. disztribúció) a Dirac-féle deltafüggvény. "Definíciója" az, hogy $x \neq 0$ – ra $\delta(x) \equiv 0$, de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

A hagyományos függvényfogalomban ilyen függvény nincs! "Majdnem" ilyen tulajdonságú függvényt azonban már találunk (ezek a közelítő deltafüggvények), melyek az origónak csak egy kicsiny környezetében különböznek nullától és az integráljuk 1. A sok lehetséges példából ragadjunk ki kettőt:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, \text{ ha } 0 < x < \varepsilon, \\ 0 \quad \text{egyébként} \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$



3. ábra

Sok esetben (fizikai alkalmazásoknál) lényegtelen a tűszerű, keskeny függvény konkrét alakja, csak az a lényeges, hogy az integrálja egységnyi. (Gondoljunk például egy kicsiny kiterjedésű egységnyi

tömegű test tömegsűrűségére, vagy egy egységnyi elektromos töltésű kondenzátor hirtelen kisütésekor folyó áramerősségre!) Dirac éppen ilyen függvényeket vizsgált, ezek "határértékeként" értelmezte intuitív módon a "végtelenül éles" delta-függvényt. Matematikailag természetesen ez nem kielégítő definíció, hiszen nem tudjuk, milyen műveletek végezhetők ezzel az "abszolút keskeny" függvénnyel. A műveleti szabályok ismerete nélkül pedig nem lehetünk biztosak a kapott eredmény helyességében, még akkor sem, ha az egy hagyományos függvény, vagy szám.

Hol találkozunk még "disztribúciókkal"? Milyen műveletek kiterjesztése kívánja meg a függvényfogalom általánosítását? Számítsuk ki például az

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 x^2}$$

függvény (Gauss-görbe) Fourier-transzformáltját:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{isx} f(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{s^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Ha $\varepsilon \to 0$, akkor minden véges x-re $f(x) \to 1$, a Fourier-transzformáltak pedig - mivel a korábban említett közelítő Dirac-delta $\sqrt{2\pi}$ -szeresével egyeznek meg - formálisan $\sqrt{2\pi} \cdot \delta(s)$-hez tartanak. Mondhatjuk-e, hogy az eredetileg a négyzetesen integrálható függvények terén értelmezett Fourier-transzformáció kiterjesztése az $f(x) \equiv 1$ függvényre az $\sqrt{2\pi} \cdot \delta(s)$ általánosított függvényre vezet? A visszatranszformálást megadó képlet formálisan helyes:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{-isx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{-isx} ds = e^{-isx}|_{s=0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) ds = 1$$

de nem tudjuk biztosan, mi rejlik a formális számolás mögött!

A disztribúcióelmélet a függvényfogalom olyan kiterjesztését oldotta meg, melybe a hagyományos függvények meglehetősen széles osztálya beletartozik, de ezenkívül a Dirac-delta, és egyéb szinguláris "függvények" is helyet kapnak benne. Valamennyi számolási szabály jól definiált, a tételek bizonyítottak és a fizikai intuíció helyett (vagy mellett) egy precízen kidolgozott matematikai elmélet képezi a számítások alapját.

II. A DISZTRIBÚCIÓELMÉLET ALAPJAI

2.1 A disztribúciók fogalma

A "Dirac-féle deltafüggvény" - mint függvény - értelmetlen fogalom. Vegyük észre azonban, hogy a fizikai alkalmazásokban mindig integráljel alatt szerepel, valamilyen másik, "jól viselkedő" függvénnyel együtt. Az integrál értéke - az intuitív számolási szabályok szerint - egy véges szám:

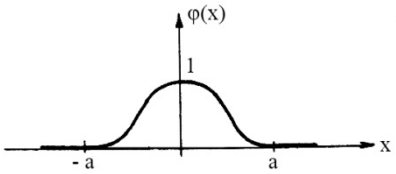
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x) = \varphi(0)$$

ha $\varphi(x)$ folytonos az origóban. A $\delta(x)$ tehát minden folytonos függvényhez egy számot rendel (nevezetesen $\varphi(x=0)$-t). Ezt a tulajdonságát ragadták meg ennek az "általánosított függvénynek" a disztribúcióelmélet kiépítésekor.

Annak érdekében, hogy minél "vadabb" általánosításait kapjuk a hagyományos függvényfogalomnak, definiálunk egy "nagyon jól" viselkedő függvény osztályt, $\mathcal{D}$-t, a következő módon:

DEFINÍCIÓ: $\mathcal{D}$ olyan $\varphi(x)$ függvények halmaza, melyek akárhányszor differenciálhatók és mindegyik $\varphi(x)$ kompakt tartójú, azaz eltűnik egy véges intervallumon kívül:

$$\varphi(x)=0, \text{ ha } |x| > a.$$



4. ábra

$\mathcal{D}$-osztálybeli függvény például:

$$\varphi(x)\begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{, ha } |x| < a \\ 0 & \text{, ha } |x| \geq a \end{cases}$$

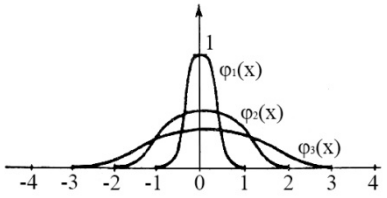
A $\mathcal{D}$-osztálybeli függvények lineáris teret alkotnak az összeadás és a számmal való szorzás műveletének szokásos definíciójával:

$$(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha \cdot \varphi(x).$$

Bevezetünk a $\mathcal{D}$ térben egy konvergencia-relációt:

DEFINÍCIÓ: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$, ha $\varphi_n(x)$ és akárhányadik deriváltja egyenletesen tart $\varphi(x)$-hez és megfelelő deriváltjához, továbbá valamennyi $\varphi_n(x)$ eltűnik egy véges intervallumon kívül. (A konvergencia egyenletessége csak az x változóra vonatkozik, nem pedig a deriváltak indexére!)

A későbbiekben lényeges szerepe lesz annak, hogy valamennyi $\varphi_n(x)$ tartója egy korlátos intervallumba foglalható. Például a



5. ábra

$$\varphi_n(x)\begin{cases} \frac{1}{n} e^{\frac{a^2}{a^2 - x^2/n^2}} & \text{, ha } |x| < na \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvénysorozat és valamennyi deriváltja egyenletesen tart nullához, de egyre nagyobb n-re egyre nagyobb intervallumon kívül válik csak nullává, tehát $\mathcal{D}$-térbeli konvergencia értelmében a függvénysorozatnak nincs határértéke.

A $\mathcal{D}$-osztálybeli függvények lineáris terének és a $\mathcal{D}$-térbeli konvergenciának a definiálása után már minden szükséges segédeszköz a rendelkezésünkre áll a függvényfogalom általánosításához:

DEFINÍCIÓ: Disztribúciónak, vagy más néven általánosított függvénynek nevezzük a $\mathcal{D}$ függvénytéren értelmezett <u>lineáris, folytonos funkcionálokat.</u>

Mit jelent ez a definíció? Általában funkcionálnak nevezik azt a leképezést, amely egy függvényhez egy (valós, vagy komplex) számot rendel. Jelöljük ezt a leképezést f-fel, a $\varphi(x)$ függvényhez rendelt számot pedig $\langle \varphi , f \rangle$ -fel.

Lineáris az a funkcionál, amely lineáris módon képezi le az adott függvényteret, vagyis

$$\langle \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 , f \rangle = \alpha \langle \varphi_1 , f \rangle + \beta \langle \varphi_2 , f \rangle$$

Végül a funkcionál folytonossága annyit jelent, hogy egy konvergens függvénysorozat képe, mint számsorozat szintén konvergens és a határértéke éppen a függvénysorozat limesének képe:

$$\text{ha } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x), \text{ akkor}$$

$$\langle \varphi_n , f \rangle \to \langle \varphi , f \rangle.$$

Minden lokálisan integrálható f(x) függvény (tetszés szerinti véges intervallumon integrálható függvény) egyúttal egy disztribúciót is meghatároz, ha a leképezést a

$$\langle \varphi , f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$$

határozott integrállal adjuk meg. (Az integrálás Lebesgue-integrált jelent.) Az integrál biztosan létezik, hiszen a $\varphi(x)$ függvény (melyet gyakran próbafüggvénynek is neveznek) elegendően nagy $|\underline{x}|$-re eltűnik. A leképezés az integrál definíciója szerint lineáris. Másrészt az egyenletes konvergencia miatt

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$$

esetén

$$\langle \varphi_n , f \rangle \to \langle \varphi , f \rangle,$$

tehát a leképezés folytonos is, így valóban egy disztribúciót definiál. Az ilyen - integrállal előállítható - disztribúciókat <u>reguláris disztribúciónak</u> nevezik. A leképezést általában ugyanazzal a betűvel fogjuk jelölni, mint a függvényt (tehát a g(x)-nek megfelelő disztribúciót g-vel stb.). Egy lokálisan integrálható függvény egyértelműen meghatároz egy reguláris disztribúciót, fordítva azonban nem igaz. Ha az f(x) függvényt egy nullértékű halmazon megváltoztatjuk, $\langle \varphi , f \rangle$ nem változik. Ha viszont kikötjük, hogy f(x) folytonos legyen, akkor a $\langle \varphi , f \rangle$ számok megadása (valamennyi $\varphi(x) \in \mathcal{D}$-re) egyértelműen meghatározza az f(x) függvényt.

Nem minden disztribúció állítható elő integrál alakban. Például a

$$\langle \varphi , f \rangle = \varphi(0)$$

módon definiált delta-disztribúcióhoz (Dirac-deltához) <u>nem</u> tartozik olyan $\delta(x)$ függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \delta(x)\, dx = \varphi(0)$$

teljesülne, de a $\langle \varphi , \delta \rangle$ szám jóldefiniált. Egy függvényhez hozzárendeljük azt a számot is, amely a függvénynek az x_0 pontban felvett értéke. Jelöljük ezt a hozzárendelést δ_{x_0}-lal:

$$\langle \varphi , \delta_{x_0} \rangle = \varphi(x_0)$$

Ez a leképezés is nyilván lineáris, folytonos funkcionál, tehát disztribúció. Az ilyen - nem reguláris - disztribúciókat <u>szinguláris disztribúciónak</u> nevezik.

FELADATOK

2.1.1. Kivezet-e a deriválás művelete $\mathcal{D}$ függvénytérből?

2.1.2. Egy $\mathcal{D}$-térbeli értelemben konvergens függvénysorozatnál felcserélhető-e a határérték-képzés és a deriválás művelete, vagyis $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$ esetén igaz-e, hogy $\varphi_n'(x) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi'(x)$?

2.2 Műveletek disztribúciókkal

A reguláris disztribúciók jelentik a disztribúciók halmazában azt a részhalmazt, melyet lényegében a hagyományos függvényekkel azonosíthatunk. Amikor a disztribúciók körében bizonyos műveleteket definiálunk, akkor ezt úgy szeretnénk megtenni, hogy reguláris disztribúciókra (függvényekre) a szokásos műveleteket kapjuk vissza. Szinguláris disztribúcióknál viszont a művelet definícióját kell alapul vegyük, hiszen nem támaszkodhatunk ismert össze-függésekre, vagy valamilyen szemléletes képre.

a) Disztribúciók összeadása

Egy disztribúciót mindig azáltal adunk meg, hogy megmondjuk: hogyan hat egy tetszőleges $\varphi(x)$ próbafüggvényre. Hogyan értelmezhetjük az $f_1 + f_2$ disztribúciót, ha f_1 és f_2 disztribúció ismert. Reguláris esetben

$$\int \varphi(x)\left[f_1(x) + f_2(x)\right] dx = \int \varphi(x) f_1(x)\, dx + \int \varphi(x) f_2(x)\, dx$$

Ennek alapján definiáljuk, hogy két disztribúció összege ismét egy disztribúció, amely

$$\langle \varphi, f_1 + f_2 \rangle \overset{\text{def.}}{=} \langle \varphi, f_1 \rangle + \langle \varphi, f_2 \rangle$$

módon hat a $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ próbafüggvényekre. Ez csak akkor jó definíció, ha belátjuk, hogy az így definiált leképezés lineáris és folytonos funkcionál a $\mathcal{D}$ függvénytéten; ez azonban nyilvánvalóan teljesül.

b) Disztribúciók szorzása számokkal

Legyen f egy disztribúció és c egy szám, ekkor várhatóan definiálhatunk egy újabb disztribúciót, amelyet cf-fel fogunk jelölni. Ha f egy reguláris disztribúció, vagyis f(x) egy lokálisan integrálható függvény, akkor cf(x) is az, tehát cf(x) is egy (reguláris) disztribúciót definiál. Mivel erre igaz, hogy

$$\int \varphi(x)\left[cf(x)\right] dx = c \int \varphi(x) f(x)\, dx,$$

definiáljuk minden disztribúcióra:

$$\langle \varphi, cf \rangle \overset{\text{def.}}{=} c \langle \varphi, f \rangle.$$

Ez nyilván lineáris és folytonos funkcionál, tehát disztribúció. Például 2δ egy olyan disztribúció, amely a $\varphi(x)$ függvényt a

$$\langle \varphi, 2\delta \rangle = 2 \langle \varphi, \delta \rangle = 2\varphi(0)$$

számra képezi le.

c) Disztribúciósorozat határértéke. A duális tér

Az összeadás és a számmal való szorzás definiálása lehetővé teszi, hogy disztribúciók akármilyen lineáris kombinációját értelmezhessük:

$$\langle \varphi, c_1 f_1 + c_2 f_2 \rangle = c_1 \langle \varphi, f_1 \rangle + c_2 \langle \varphi, f_2 \rangle.$$

A disztribúciók tehát egy lineáris teret képeznek, melyet $\mathcal{D}'$-vel fogunk jelölni és $\mathcal{D}$ duális terének nevezzük. A disztribúciók $\mathcal{D}'$ terében értelmezhetünk egy konvergencia-relációt: az $f_n \in \mathcal{D}'$ disztri-

búciósorozatot akkor nevezzük konvergensnek, ha létezik egy olyan $f \in \mathcal{D}'$ disztribúció, melyre bármely $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} \langle \varphi, f_n \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

A fenti összefüggés teljesülése esetén f_n sorozat a $\mathcal{D}'$ térben tart az f disztribúcióhoz:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

A $\mathcal{D}'$ térbeli konvergencia fogalma és a függvények szokásos konvergenciája nem hozható közvetlenül kapcsolatba egymással. A disztribúciók konvergenciája gyengébb, mint a függvénykonvergencia. Ha ugyanis egy lokálisan integrálható függvénysorozat egyenletesen konvergál valamilyen függvényhez:

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{egyenletesen}} f(x),$$

akkor a megfelelő reguláris disztribúciókra igaz, hogy

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f.$$

Fordítva azonban nem igaz!

d) Disztribúciók eltolása és nyújtása

Ha f(x) egy lokálisan integrálható függvény, akkor f(x-h) és f(ax) is az (h és a valós számok, $a \neq 0$). Így ezek reguláris disztribúciókat definiálhatnak, melyek hatása egy $\varphi(x)$ próbafüggvényre kifejezhető az eredeti f(x) függvénynek megfelelő disztribúcióval. Ha az f(x-h)-nak megfelelő disztribúciót $\tau_h f$-fel, az f(ax)-nek megfelelőt pedig $\sigma_a f$-fel jelöljük, úgy

$$\langle \varphi(x), \tau_h f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) f(x-h) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x+h) f(x) = \langle \varphi(x+h), f \rangle;$$

$$\langle \varphi(x), \sigma_a f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) f(ax) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi\left(\frac{x}{a}\right) f(x) = \frac{1}{|a|} \cdot \left\langle \varphi\left(\frac{x}{a}\right), f \right\rangle.$$

Ezeket az összefüggéseket definíció szerint akkoris elfogadjuk, amikor f szinguláris disztribúció. Bár ilyenkor nem létezik az f(x) függvény, a $\tau_h f$ és $\sigma_a f$ jelölések nehézkessége miatt szokták használni a szimbolikus f(x) jelölést, de ezen sosem egy függvényt, hanem egy disztribúciót értenek. Tehát:

DEFINÍCIÓ: $\langle \varphi(x), \tau_h f \rangle \equiv \langle \varphi(x), f(x-h) \rangle = \langle \varphi(x+h), f(x) \rangle;$

$$\langle \varphi(x), \sigma_a f \rangle \equiv \langle \varphi(x), f(ax) \rangle = \frac{1}{|a|} \cdot \left\langle \varphi\left(\frac{x}{a}\right), f(x) \right\rangle.$$

A fentebbi definíció értelmes, hiszen $\varphi(x+h)$ és $\varphi\left(\frac{a}{x}\right)$ $\mathcal{D}$-béli függvények és a funkcionál lineáris és folytonos, ha f disztribúció.

Példaként vizsgáljuk meg a $\delta(x-x_0)$ és a $\delta(ax)$ disztribúciók hatását!

$$\langle \varphi(x), \delta(x-x_0) \rangle = \langle \varphi(x+x_0), \delta \rangle = \varphi(x-x_0)\Big|_{x=0} = \varphi(x_0).$$

Tehát $\delta(x-x_0)$ éppen az a disztribúció, amelyet korábban δ_{x_0}-lal jelöltünk.

$$\langle \varphi(x), \delta(ax) \rangle = \frac{1}{|a|} \left\langle \varphi\left(\frac{x}{a}\right), \delta \right\rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0),$$

vagyis

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

e) Disztribúciók és függvények szorzata

A hagyományos függvények között definiálhatjuk a szorzás műveletét az (fg)(x) = f(x)g(x)

egyenlőséggel. Egy reguláris f disztribúció és egy g(x) függvény szorzatára tehát igaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left[f(x)\,g(x)\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x)\,\varphi(x)\right]f(x)\,dx.$$

Ennek alapján megpróbálhatjuk egy f disztribúció és egy g(x) függvény szorzatát így definiálni:

$$\langle \varphi(x)\,,\, fg(x)\rangle = \langle g(x)\,\varphi(x)\,,\, f\rangle.$$

Ez a definíció csak akkor értelmes, ha bármely $\mathcal{D}$-béli φ(x)-re $g(x)\,\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Ez azonban általában nem teljesül, csak akkor, ha g(x) akárhányszor deriválható! Emiatt a disztribúciók és a függvények szorzatát <u>csak olyan függvényekre definiáljuk,</u> melyek akárhányszor deriválhatok, más esetben nem értelmezzük a szorzás műveletét. Hasonlóan <u>nincs értelmezve két disztribúció szorzata!</u> Megjegyezzük, hogy a g(x) függvény végtelenbeli viselkedéséről nem kell semmit feltételeznünk, mert φ(x) úgyis kompakt tartójú. Így például értelmes disztribúciók a következők:

$$fx^2;\ fe^{x^2};\ f\sin x;\ \text{stb.},$$

ha f disztribúció.

Vizsgáljuk meg példaként az xδ disztribúciót!

$$\langle \varphi(x)\,,\, x\delta\rangle = \langle x\varphi(x)\,,\delta\rangle = x\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0\ .$$

Mivel ez bármely φ(x)-re igaz, ezért xδ = 0. Látjuk, hogy egy függvény és egy disztribúció szorzata akkoris lehet nulla, ha egyik tényező sem nulla. Érdekes ennek az állításnak a megfordítása: az

$$x \cdot f = 0$$

disztribúció-egyenletnek valamennyi megoldása f = αδ alakú (α = állandó szám). Lássuk, miért!

$$\langle \varphi\,,\, xf\rangle = \langle x\varphi(x)\,,\, f\rangle = 0,$$

tehát f eltűnik az origóban nulla értéket felvevő ψ(x)=x·φ(x) alakú próbafüggvényekre. Válasszunk ki egy olyan $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ függvényt, melyre $\varphi_0(x=0)=1$. Bármely $\varphi \in \mathcal{D}$ felírható

$$\varphi(x) = \lambda \cdot \varphi_0(x) + \psi(x)$$

alakban, ahol λ = φ(0) és ψ(x) eltűnik az origóban. Azt állítjuk, hogy ψ felírható $x\varphi_0(x)$ alakban ($\varphi_1(x) \in \mathcal{D}$) és emiatt $\langle \psi\,,\, f\rangle = 0$. Valóban a

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \psi(x) & ,\text{ha } x \neq 0 \\ \psi'(0) & ,\text{ha } = 0 \end{cases}$$

függvény $\mathcal{D}$-osztálybeli és $x\varphi_1(x) = x\psi(x)$. Így tehát

$$\langle \varphi\,,\, f\rangle = \lambda\,\langle \varphi_0\,,\, f\rangle + \langle \psi\,,\, f\rangle = \alpha\varphi(0),$$

ahol $\alpha = \langle \varphi_0\,,\, f\rangle$. Azt kaptuk tehát, hogy f=αδ..

FELADATOK

2.2.1. Hogyan hat egy tetszés szerinti $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ próbafüggvényre a

$$\sin x + 2\delta\,(2x-5)$$

disztribúció ?

2.2.2. Mivel egyenlő a g(x)δ disztribúció?

2.2.3. Milyen feltételek mellett és hogyan értelmezhető az f[u(x)] közvetett függvény mintájára egy "közvetett disztribúció" pl. δ[sh(x-3)]?

2.2.4. Mi a legáltalánosabb megoldása az

$$a(x)f = 0$$

disztribúcióegyenletnek, ahol a(x) egy akárhányszor deriválható függvény, melynek az x = x_0 pontban zérushelye van (és máshol nincs zérushelye), de $a'(x_0) \neq 0$.

2.3 Disztribúciók deriválása és integrálása. A disztribúciók tartója

Ha f(x) egy deriválható függvény, akkor az f(x) által definiált reguláris disztribúció kapcsolatba hozható az f(x) által definiált reguláris disztribúcióval:

$$\langle \varphi, f' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f'(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) f(x)\, dx = \langle -\varphi', f \rangle$$

(a kiintegrált rész minden $\varphi \in \mathcal{D}$-re eltűnik). Fogadjuk el a fenti összefüggést általában (tehát nemcsak reguláris esetben) a disztribúciók deriváltjának definíciójaként:

DEFINÍCIÓ: Egy f disztribúció deriváltja maga is disztribúció, melyre:

$$\langle \varphi, f' \rangle = \langle -\varphi', f \rangle.$$

Ez egy értelmes definíció, mert ha $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, akkor $-\varphi(x)' \in \mathcal{D}$ és f valóban lineáris folytonos funkcionál:

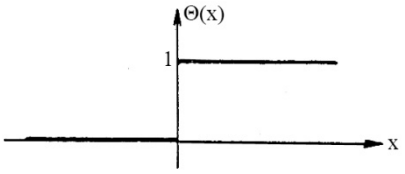
$$\langle \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, f' \rangle = -\langle (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)', f \rangle = \alpha \langle -\varphi_1', f \rangle + \beta \langle -\varphi_2', f \rangle = \alpha \langle \varphi_1, f' \rangle + \beta \langle \varphi_2, f' \rangle.$$

Ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(x)$, akkor $-\varphi'_n \xrightarrow{\mathcal{D}} -\varphi'$. Tehát f folytonossága miatt

$$\langle \varphi_n, f' \rangle = \langle -\varphi'_n, f \rangle \to \langle \varphi, f' \rangle = \langle -\varphi', f \rangle.$$

A definícióból következik, hogy minden $f \in \mathcal{D}'$ disztribúció deriválható és $f \in \mathcal{D}'$, emiatt minden disztribúció végtelen sokszor deriválható. A függvények körében ez messzemenően nem igaz! A disztribúció-deriválás definícióját úgy adtuk meg, hogy reguláris (és differenciálható) függvények esetén az a szokásos függvény-deriválással azonos eredményre vezessen. Érdekes helyzet áll azonban elő akkor, ha f egy reguláris disztribúció, de a neki megfelelő f(x) függvény nem deriválható. Az f′ disztribúció-derivált ilyenkor is létezik, de az csakis szinguláris disztribúció lehet, hiszen az f′(x) függvény nem (vagy legalábbis nem mindenhol) létezik. Akkoris szinguláris disztribúciót kapunk, ha f(x) deriválható ugyan, de az f′(x) függvény <u>nem</u> lokálisan integrálható, tehát <u>nem</u> definiál reguláris disztribúciót! Nézzünk néhány példát!

<u>1. példa:</u> A Heaviside-féle "egységugrás-függvény" és deriváltja. Fizikai, műszaki alkalmazásokban gyakran előfordul a



6. ábra

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény (pl. bekapcsolási jelenségeknél). Az x = 0 pontban a Θ függvényt általában nem definiálják, néha szokás azonban a jobb-, és a bal oldali határérték számtani közepével, tehát ½-del, esetleg valamilyen más (önkényesen választott) számértékkel azonosítani Θ(x=0)-t. Ez a függvény egy reguláris disztribúciót definiál:

$$\langle \varphi, \Theta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Theta(x) \varphi(x) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Az egységugrás-függvény deriváltja Θ'(x) = 0, ha x≠0, az origóban pedig nem deriválható. Disztribúció-értelemben azonban létezik a derivált:

$$\langle \varphi, \Theta' \rangle = \langle -\varphi', \Theta \rangle = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(x)\,|_0^{\infty} = \varphi(0)$$

Azt kaptuk tehát, hogy Θ' hatása minden $\varphi(x) \in \mathcal{D}$-re megegyezik a delta-disztribúció hatásával, tehát

$$\Theta' = \delta.$$

2. <u>példa:</u> Az f(x)=ln |x| függvény lokálisan integrálható, tehát egy reguláris disztribúciót definiál:

$$\langle \varphi, \ln|x| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \ln x \, dx$$

Mint függvény, ln|x| az x = 0 pont kivételével mindenhol deriválható, de a derivált $\frac{1}{x}$ <u>nem</u> egy lokálisan integrálható függvény, tehát nem generálhat reguláris disztribúciót! Mivel egyenlő akkor az (ln|x|)' disztribúció? Nyúljunk vissza a definícióhoz!

$$\left\langle \varphi, \left(\ln|x|\right)' \right\rangle = \left\langle -\varphi', \ln|x| \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \ln|x| \, dx.$$

Ez egy jóldefiniált, véges integrál, amely átírható

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \left[-\varphi'(x)\right] \cdot \ln x \, dx.$$

alakba is. Mivel most már a "veszélyes" x = 0 pontot nem tartalmazza az integrálási tartomány, nyugodtan integrálhatunk parciálisan:

$$\left\langle \varphi, \left(\ln|x|\right)' \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\left[\varphi(x) \ln|x|\right]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left[\varphi(x) \ln x\right]_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{|x| > \varepsilon} \left[\varphi(x)\right] \cdot \frac{1}{x} \, dx \right\}$$

A kapcsos zárójel első két tagjának összege nullához tart, így

$$\left\langle \varphi, \left(\ln|x|\right)' \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \left[\varphi(x)\right] \cdot \frac{1}{x} \, dx.$$

(ln|x|)' hatása tehát "majdnem pontosan" az $\frac{1}{x}$ függvény által generált integrállal egyezik meg, de az x=0 pont kis környezetét szimmetrikusan ki kell hagyjuk az integrálásból, majd a kihagyott rész hosszával nullához tartunk. Ezt az eljárást <u>főértékintegrálásnak</u> nevezzük és

$$\mathbb{P}\int (\ldots) \frac{1}{x} \, dx \text{ , avagy } \int (\ldots) \, \mathbb{P}\frac{1}{x} \, dx$$

módon jelöljük. Tehát

$$\left\langle \varphi, \left(\ln|x|\right)' \right\rangle = \mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, \mathbb{P}\frac{1}{x} \, dx = \left\langle \varphi, \mathbb{P}\frac{1}{x} \right\rangle.$$

A fenti két példában olyan függvényeket (illetve az általuk generált reguláris disztribúciókat) deriváltunk, melyek az x=0 pont kivételével "jól viselkednek", csupán az origóbeli szingularitásuk az oka annak, hogy deriváltjuk nem egy reguláris disztribúció. Az ln|x| disztribúció deriváltja "majdnem" úgy hat a próbafüggvényekre, mint az $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ függvény. Hasonlóan a Heaviside-függvény deriváltja az origó kivételével azonosan nulla, a disztribúció-derivált pedig (a Dirac-delta) szintén bizonyos értelemben nulla az origó kivételével mindenhol, hiszen érzéketlen a próbafüggvények $\varphi(x \neq 0)$ nagyságára. Próbáljuk meg precízebbé tenni ezeket a kijelentéseket, próbáljuk meg pontosabban megadni, hogy mikor nevezünk két disztribúciót egy adott intervallumon egyenlőnek.

DEFINÍCIÓ: Az f_1 és az f_2 disztribúciókat az (a,b) nyílt intervallumon akkor nevezzük egyenlőnek, ha minden olyan $\varphi \in \mathcal{D}$ próbafüggvényre, amely eltűnik az $x \leq a$ és $x \geq b$ tartományokon

$$\langle \varphi, f_1 \rangle = \langle \varphi, f_2 \rangle$$

Például a Dirac-delta disztribúció és az $f(x) \equiv 0$ reguláris disztribúció egyenlő az $x \neq 0$ nyílt halmazokon, hiszen a $\varphi(0) = 0$ tulajdonsággal rendelkező próbafüggvényekre

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \langle \varphi, 0 \rangle = 0.$$

Ez az állítás veszi át a naiv "$\delta(x)$ egy olyan függvény, amely eltűnik minden $x \neq 0$ pontban" kijelentés szerepét.

Hasonlóan a $\mathbb{P}\frac{1}{x}$ disztribúció tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $|x| > \varepsilon$ nyílt halmazon megegyezik az $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{ ha } |x| > \varepsilon \\ 0 & , \text{ ha } |x| \le \varepsilon \end{cases}$ reguláris disztribúcióval.

Két disztribúció egyenlőségéről egy adott pontban nincs értelme beszélni, a legerősebb állítás két disztribúció viszonyára az, hogy megegyeznek valamilyen (nyílt) intervallumon. Emiatt a δ és a $\mathbb{P}\frac{1}{x}$ disztribúciókat csak az $x \neq 0$ halmazon "szemléltethetjük" azáltal, hogy egy reguláris disztribúcióval való egyenlőségüket bizonyítjuk, de azt, hogy az origóban "mekkorák", már nem tudjuk megmondani!

Gyakran használt fogalom a disztribúció <u>tartója.</u>

DEFINÍCIÓ: Egy f disztribúció tartója az a zárt halmaz, amely kivételével f = 0. Például a δ disztribúció tartója az x = 0 pont, a $\Theta(x)$ disztribúció tartója pedig az $x \ge 0$ intervallum.

A disztribúciók integrálját (határozatlan integrálját) a függvényekhez hasonlóan a deriválás megfordításaként definiáljuk. Egy adott g disztribúció integrálja az az f disztribúció, melyre

$$f' = g .$$

Nyilván, ha $f' = g$ akkor $(f + c)' = g$, tehát a függvényekhez hasonlóan az integrál csak egy additív állandó erejéig határozott. Belátható, hogy ennyire viszont határozott, tehát ha

$$f'_1 = f'_2, \text{ akkor } f_1 - f_2 = \text{ állandó}$$

FELADATOK

2.3.1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges f disztribúció és egy akárhányszor deriválható g(x) függvény szorzatának deriváltja:

$$\left[fg(x)\right]' = f' g(x) + g'(x) f$$

2.3.2. Mivel egyenlő az $x\delta'$ disztribúció?

2.3.3. Bizonyítsuk be, hogy a disztribúciók integrálja csak egy additív állandó erejéig határozatlan!

2.3.4. Határozzuk meg az $f' = 2\Theta + \delta$ disztribúcióegyenlet megoldását, vagyis az egyenlet jobb oldalának integrálját!

2.3.5. Bizonyítsuk be, hogy (a közönséges függvényektől eltérően) egy konvergens disztribúció-sorozatnál a deriválás és a határértékképzés felcserélhető, vagyis ha

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f, \text{ akkor } f'_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f'.$$

2.3.6. Létezik-e az $f_n = e^{inx}$ disztribúciósorozatnak határértéke $n \to \infty$-re? Konvergens-e a $n^k \sin nx$ és az $n^k \cos nx$ disztribúció-sorozat (k pozitív egész)?

2.3.7. Mi a δ' (általában a $\delta^{(n)}(x-x_0)$) disztribúció tartója?

2.3.8. Mutassuk meg, hogy az a(x) f = 1 disztribúcióegyenletnek (melyben a(x) egy akárhányszor deriválható függvény, melynek az origóban egyszeres zérushelye van és máshol seholsem tűnik el) a legáltalánosabb megoldása $f = \mathbb{P}\frac{1}{a(x)} + c\delta$, ahol

$$\left\langle \varphi, \mathbb{P}\frac{1}{a(x)} \right\rangle = \mathbb{P}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{1}{a(x)}\,dx.$$

2.3.9. Hogyan hat a $\mathbb{P}\frac{1}{x}$ disztribúció deriváltja egy $\varphi(x) \in \mathcal{D}'$ próbafüggvényre? Fejezzük ki $\mathbb{P}\frac{1}{x}$ és $\left(\mathbb{P}\frac{1}{x}\right)'$ hatását anélkül, hogy kihagynánk az origónak egy infinitezimálisan kis környezetét!

2.4 Disztribúciók deriválása és integrálása egy folytonos paraméter szerint. Disztribúciók közelítése regulárisdisztribúció-sorozatokkal

A 2.2.c pontban definiáltuk egy disztribúciósorozat határértékét:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f, \text{ ha minden } \varphi \in \mathcal{D}\text{-re } \langle \varphi, f_n \rangle \to \langle \varphi, f \rangle.$$

Hasonló módon értelmezhetjük egy folytonos s paramétertől függő f_s disztribúció határértékét:

$$f_s \xrightarrow[s \to s_0]{\mathcal{D}'} f_{s_0}, \text{ ha minden } \varphi \in \mathcal{D}\text{-re } \langle \varphi, f_s \rangle \xrightarrow[s \to s_0]{} \langle \varphi, f_{s_0} \rangle.$$

Ennek segítségével értelmezhetjük az f_s disztribúció s szerinti parciális deriváltját is:

$$\frac{\partial f_s}{\partial s} = \lim_{s \to s_0} \frac{f_s - f_{s_0}}{s - s_0},$$

amennyiben ez a limes (disztribúció-értelemben) létezik. Belátható, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden $\varphi \in \mathcal{D}$-re a $\psi(s) = \langle \varphi, f_s \rangle$ függvény deriválható legyen az s_0 pontban.

A folytonos paramétertől függő disztribúcióknak a paraméter szerinti integrálját is értelmezhetjük.

$$\int_{s_1}^{s_2} f_s(x)\, ds = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_i f_{s_i}(x)\, \Delta s$$

A fenti határérték - amennyiben létezik - egy olyan disztribúciót definiál, melynek hatása egy $\varphi(x)$ próbafüggvényre:

$$\left\langle \varphi(x), \int_{s_1}^{s_2} f_s(x)\, ds \right\rangle = \int_{s_1}^{s_2} ds \, \langle \varphi(x), f_s(x) \rangle.$$

Tekintsük például az

$$f_s(x) = g(s) \cdot \delta(x - s)$$

disztribúció s szerinti integrálját! Ha g(s) egy lokálisan integrálható függvény, úgy

$$\left\langle \varphi(x), \int_{-\infty}^{\infty} ds\, f_s(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi(x), g(s)\, \delta(x - s) \rangle\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, g(s)\, ds.$$

Mivel az $\int_{-\infty}^{\infty} ds\, f_s(x)$ disztribúció hatása megegyezik a g reguláris disztribúció hatásával, ezért fennáll az

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, \delta(x - s)\, ds = g(x)$$

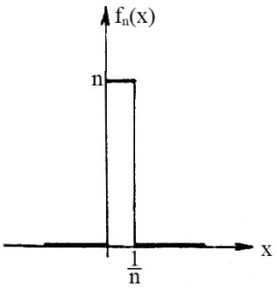
disztribúció-egyenlőség. Ez formálisan megegyezik a bevezetőben említett Dirac-féle delta függvény "definíciójával", de itt most az egyenlőség mindkét oldalának jóldefiniált jelentése van és a két oldal egyenlősége szigorúan bizonyítható.

A disztribúciók között a reguláris disztribúciók (melyek a közönséges függvényekkel azonosíthatók) kitüntetett szerepet játszanak, hiszen lerajzolhatók, szemléltethetők. Egy szinguláris disztribúciót viszont csak azáltal adunk meg, hogy megmondjuk a hatását a próbafüggvényekre. Ez túlságosan elvont, nehezen elképzelhető (nehezen szemléltethető) megadási mód. Emiatt nagyon fontos a következő tétel, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

TÉTEL: Minden disztribúció előállítható reguláris disztribúciókból álló sorozat határértékeként.

A gyakorlati alkalmazások miatt a Dirac-féle delta-disztribúcióhoz tartozó ún. delta-

sorozatok különösen fontosak. Nézzünk meg néhány delta-sorozatot! A bevezetésben említett



7. ábra

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & \text{ha } 0<x<\frac{1}{n} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

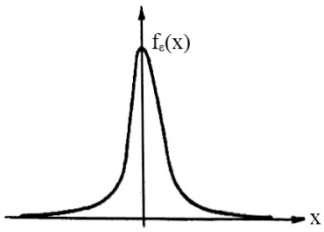
függvénysorozat - mint reguláris disztribúció-sorozat - $\mathcal{D}'$-béli konvergencia értelmében δ-hoz tart, hiszen

$$\langle \varphi, f_n \rangle = n\cdot \int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = \varphi(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0)$$

$$\text{minden } \varphi(x)\in\mathcal{D} \text{ -re } \left(\xi\in\left[\frac{0,1}{n}\right]\right).$$

Hasonlóan a folytonos ε paramétertől függő Gauss-görbék - mint disztribúciók - tartanak a delta-disztribúcióhoz, ha $\varepsilon \to 0$:

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{D}'} \delta .$$



8. ábra

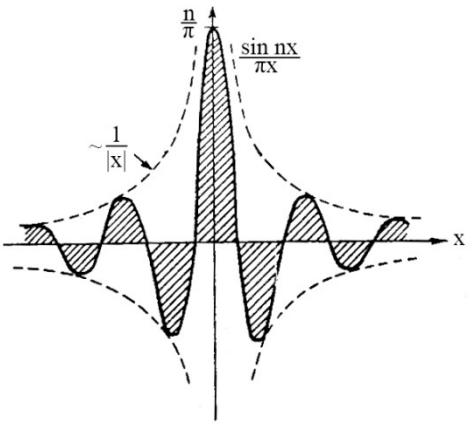
Az ún. Lorentz-görbékből is konstruálhatunk delta-sorozatot:

$$f_\varepsilon(x)\equiv\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{D}'} \delta .$$

A fenti példák mindegyikénél a "közelítő delta-függvény" integrálja 1 volt. Ez nem szükségszerű, csupán kényelmes, nyilván elegendő, hogy az integrálok sorozata l-hez tartson. A delta-sorozatok (legalábbis az eddigi példákban) olyan függvények voltak, melyek egyre keskenyebbek, egyre inkább az origó köré koncentráltak lettek, azaz minden $x \neq 0$-ra $f_n(x)\to 0$. Azt gondolhatnánk, hogy ez szükségszerű valamennyi delta-sorozatnál; ez azonban nem igaz. Vizsgáljuk meg ugyanis az

$$f_n(x)\equiv\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}$$

disztribúció-sorozatot! Ezeknek a függvényeknek az integrálja a teljes számegyenesre 1, de $n\to\infty$-re nem szűkülnek össze, csupán egyre gyorsabban oszcillálnak.



9. ábra

Hogyan hat f_n egy próbafüggvényre? Végezzük el a következő azonos átalakítást:

$$\left\langle \varphi, \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}\right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin nx + \varphi(0)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} .$$

A jobb oldal második tagja n-től függetlenül mindig φ(0), az első tagról pedig belátjuk, hogy nullához tart. Ha ugyanis a φ(x) próbafüggvény tartója az |x|<m intervallumba esik, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin nx = \int_{-m}^{m} dx\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\sin nx - 2\varphi(0)\int_{m}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}dx$$

Az első tag a Riemann-lemma értelmében nullához tart, hiszen a $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ függvény folytonos a véges [-m,m] intervallumon. A második tag az $y = n\cdot x$ új változó bevezetésével

$$\int_{m}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}dx = \int_{m\cdot n}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

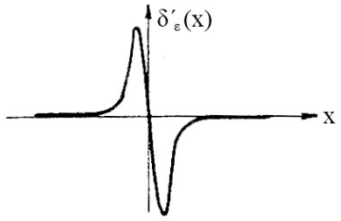
Tehát minden φ $\mathcal{D}$ próbafüggvényre

$$\left\langle \varphi\,,\ \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} \right\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) = \langle \varphi, \delta \rangle\,,$$

vagyis

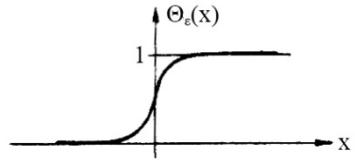
$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta\,.$$

A delta-sorozatok bármelyikének deriváltja, illetve az integrálja olyan disztribúció-sorozatot ad, amely $\mathcal{D}'$ -béli konvergencia értelmében a δ'-höz, illetve a Heaviside-disztribucióhoz tart. Amennyiben a delta-sorozat - mint függvénysorozat - deriválható, akkor az így kapott sorozat ismét reguláris disztribúció-sorozat lesz. Például a Lorentz-görbéknél:
Természetesen előfordulhat, hogy egy reguláris disztribúció - mint függvény - nem deriválható. Például a lépcsős-függvénnyel közelitett Dirac-delta csak disztribúció- értelemben deriválható:



$$\delta'_\varepsilon(x) \equiv \left(\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)' = -\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon\cdot x}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^2} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'$$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_\varepsilon\left(x'\right) dx' = \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2}\right]\cdot\frac{1}{\pi} \equiv \Theta_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \Theta$$



10. ábra

Természetesen előfordulhat, hogy reguláris disztribúció – mint függvény – nem deriválható. Például a lépcsős-függvénnyel Dirac-delta csak disztr-ibúció- értelmében deriválható: Ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\ , & \text{ha } 0 < x < \varepsilon \\ 0\ , & \text{egyébként}\ , \end{cases}$$

akkor $f'_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\left[\delta(x) - \delta(x-\varepsilon)\right]$. Ez egy szinguláris disztribúció, amelynek hatása:

$$\left\langle \varphi\,,\ f'_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\left\langle \varphi, \delta(x) - \delta(x-\varepsilon) \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi'(0)$$

tehát

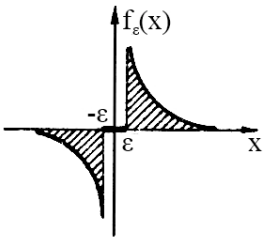
$$f'_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta'\,.$$

Korábban megismerkedtünk a $\mathbb{P}\frac{1}{x}$ szinguláris disztribúcióval. Ez is előállítható reguláris disztribúciók határértékeként:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ , & \text{ha } |x| > \varepsilon \\ 0\ , & \text{ha } |x| \le \varepsilon \end{cases}$$

A főérték-integrál értelmezéséből következik, hogy

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$



11. ábra

FELADATOK:

2.4.1. Keressünk egy általános eljárást delta-sorozatok konstruálására!

2.4.2. Egy lokálisan integrálható és 2π szerint periodikus függvény Fourier-együtthatóit a

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx$$

integrál definiálja. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-inx}$$

sor disztribúció-értelemben mindig konvergens és előállítja az f(x) által definiált reguláris disztribúciót. (A hagyományos, pontonkénti konvergencia értelmében ez az állítás nem lenne igaz!)

2.4.3. Mivel egyenlő az e^{isx} reguláris disztribúció s paraméter szerinti

$$\int_{\infty}^{-\infty} e^{isx}\, ds$$

integrálja?

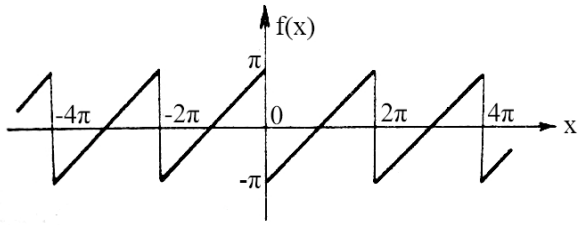
2.4.4. Határozzuk meg a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \text{ és a}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} ne^{inx}$$

disztribúciósorok határértékét!

Útmutatás: Fejtsük Fourier-sorba az ábrán látható



12. ábra

"fűrészfog" - függvényt, majd képezzük - mint reguláris disztribúciónak - a deriváltjait!

2.5 Disztribúciók konvolúciója

A disztribúciók körében - mint láttuk, - általában nem értelmezhető a szorzás, inverzképzés és az osztás művelete. Definiálható viszont egy olyan művelet, amely sok szempontból emlékeztet a szorzásra. Ez a művelet az un. konvolúció (szokás még kompozíciónak, esetleg faltung-nak nevezni).

Értelmezzük ezt a műveletet először közönséges függvényekre! Két (lokálisan integrálható) függvény konvolúcióját az

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(x)\, g(x-y) = \left(f * g\right)(x)$$

integrállal értelmezzük. (Ha nem okoz félreértést, úgy a konvolúció eredményének változóját nem jelöljük, hanem egyszerűen csak f * g -t írunk.) A konvolúció művelete nem minden lokálisan integrálható függvényre van értelmezve, hiszen lehet, hogy az integrál az alsó, vagy a felső határon divergál. Biztosan létezik a konvolúció, ha az alábbi két eset valamelyike fenn áll:

a) f(x), vagy g(x), esetleg mindkettő korlátos tartójú függvény, ilyenkor ugyanis az integrálás csak egy véges intervallumra terjed ki.
b) f(x) és g(x) ugyanarról az oldalról korlátos tartójúak. Ebben az esetben is az integrálást csak egy véges intervallumra kell elvégezni.

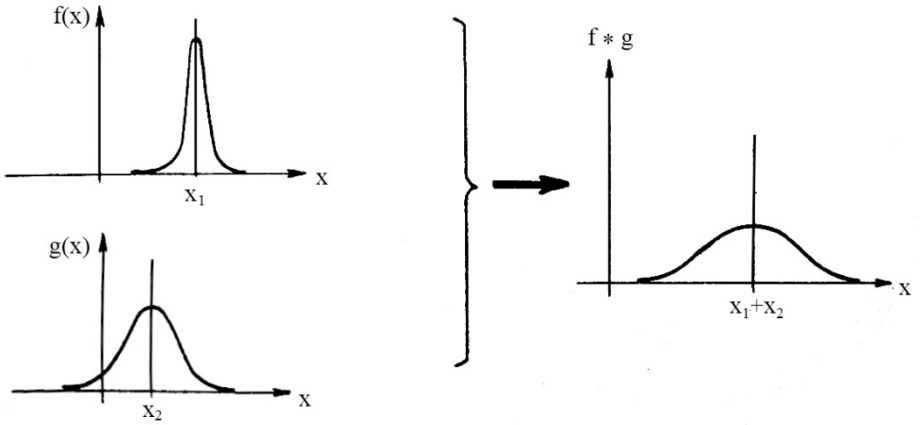
A fenti esetek csak elégségesek, de egyáltalán nem szükségesek a konvolúció elvégezhetőségéhez. Számítsuk ki például két Gauss-görbe konvolúcióját:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2a^2}} \quad ; \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}}e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2b^2}}$$

Mindkét függvény együtthatóját úgy választottuk, hogy az integráljuk a teljes számegyenesre 1 legyen, a centrumuk az x_1, illetve az x_2 pont, szélességük pedig a és b. A konvolúciós integrál új változó bevezetése után közvetlenül elvégezhető:

$$f*g=\frac{1}{\sqrt{2\pi ab}}\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left[-\frac{1}{2a^2}(y-x_1)^2\right]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2b^2}\left(y-x+x_2\right)^2\right]=$$

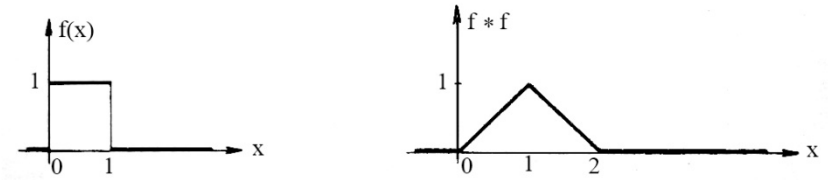
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(a^2+b^2\right)}}\exp\left[-\frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\left\{x-\left(x_1+x_2\right)^2\right\}\right].$$



13. ábra

Másik példaként határozzuk meg az $f(x)=\begin{cases}1\ , \text{ ha } 0<x<1\\ 0\ , \text{ egyébként}\end{cases}$ lépcsősfüggvény önmagával képzett konvolúcióját!

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}2-x\ , \text{ ha } 0\le x\le 2,\\ \ \ x\ \ \ , \text{ ha } 0\le x\le 1\\ \ \ 0\ \ \ \ \ \text{egyébként}\end{cases}$$



14. ábra

Ezt a példa azt mutatja, hogy a konvolúció művelete "kisimítja" a függvényt, pl. ha egy függvénynek szakadása van, akkor az önmagával képzett konvolúciója már folytonos, csupán a deriváltjának van szakadása. A konvolúció művelete kommutatív, tehát f * g = g * f. Valóban:

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y)=\int_{-\infty}^{\infty} dy'\ g\left(y'\right) f\left(x-y'\right)=g*f.$$

Érvényes továbbá az asszociativitás (feltétele, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők):

$$f*\left(g*h\right)=\left(f*g\right)*h\ .$$

Értelmezésénél fogva a konvolúció művelete mindkét „tényezőjében” lineáris:

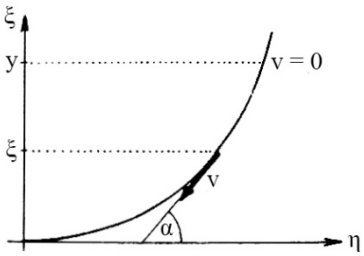
$$\left(\alpha f_1 + \beta f_2\right) * g = \alpha\left(f_1 * g\right) + \beta\left(f_2 * g\right).$$

Milyen fizikai problémákban fordul elő a konvolúció művelete? Ha például f(x) és g(x) két folytonos valószínűségi eloszlás sűrűségfüggvénye, akkor annak a valószínűség-sűrűsége, hogy két független mérés eredményének összege éppen x legyen az f * g konvolúcióval egyenlő.

Másik példaként tekintsünk egy mechanikai problémát (Abel-féle probléma): Keressük azt a függőleges síkban elhelyezkedő görbét, amely mentén a saját súlya hatására súrlódásmentesen lecsúszó tömegpont az indítási ponttól függetlenül mindig ugyanannyi idő alatt jut el a görbe legmélyebb pontjába.

Az ábra jelöléseivel a test sebessége valamely ξ magasságban

$$v = \sqrt{2g\left(y-\xi\right)} = -\frac{1}{\sin\alpha\left(\xi\right)}\cdot\frac{d\xi}{dt}$$



15. ábra

A teljes csúszási idő:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^y d\xi\cdot\frac{1}{\sqrt{y-\xi}}\,u\left(\xi\right)$$

ahol $u\left(\xi\right) = \dfrac{1}{\sin\alpha\left(\xi\right)}$ egy ismeretlen függvény. Ennek a függvénynek meghatározása után már könnyen meg lehetne kapni a pályagörbe egyenletét. A fenti egyenlet az ismeretlen u(ξ) függvényre nézve egy (ún. Volterra-típusú) integrálegyenlet, amely azonban nem alakítható át egy könnyebben kezelhető (vagy legalábbis szokásosabb) differenciálegyenletté. Ez az integrálegyenlet tulajdonképpen egy konvolúció. Jelöljük az ismeretlen függvényt - negatív x-re is kiterjesztve azonosan nulla függvényértékekkel - f(x)-szel, és legyen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \text{ ha } x > 0 \\ 0 & , \text{ ha } x > 0 \end{cases}.$$

Ekkor

$$f * g = \sqrt{2g}\;T\Theta(x).$$

Ebből a konvolúció-egyenletből az ismeretlen f(x) függvényt úgy lehetne meghatározni, ha sikerülne a "konvolúció-szorzás" inverz műveletét megtalálnunk. Később - a Fourier-transzformáció műveleténél - látni fogjuk, hogy ez az "invertálás" valóban lehetséges.

Hogyan lehet a konvolúció műveletét oly módon kiterjeszteni a disztribúciókra, hogy reguláris disztribúciókra visszakapjuk a függvény-konvolúciót, de a kiterjesztés általánosabb esetben is értelmes legyen. Vizsgáljuk meg először, hogyan hat egy függvény-konvolúció - mint reguláris disztribúció - egy $\mathcal{D}$-beli próbafüggvényre:

$$\left\langle \varphi, f * g\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\varphi(x)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y).$$

Cseréljük fel az integrálások sorrendjét és x helyett vezessük be új integrációs változóként x - y = x' - t:

$$\psi(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, g(x-y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x' + y\right) g\left(x'\right) dx' = \left\langle \varphi(x+y)\,,\, g(x)\right\rangle;$$

$$\left\langle \varphi, f * g\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\psi(y)\, f(y) = \left\langle \psi, f\right\rangle.$$

A konvolúció hatását tehát két lépésben kaphatjuk meg. Először a g (reguláris) disztribúció hatott a (-y)-nal eltolt próbafüggvényre, φ(x+y)-ra, majd az így kapott függvényre hatott az f (reguláris)

disztribúció. Általános esetben a fenti két lépést a konvolúció definíciójának tekintjük:

DEFINÍCIÓ: $f * g$ egy olyan disztribúció, amely

$$\langle \varphi , f * g \rangle = \langle \psi (y) , f(y) \rangle$$

módon hat, ahol

$$\psi (y) = \langle \varphi (x + y) , g(y) \rangle$$

Ez a definíció csak akkor értelmes, ha belátjuk, hogy $\varphi \in \mathcal{D}$. Könnyen igazolható, hogy $\psi(y)$ akárhányszor deriválható és

$$\psi^{(n)}(y) = \langle \psi^{(n)}(x + y) , g(x) \rangle .$$

Ez azonban nem elegendő, meg kell vizsgáljuk még, hogy $\psi(y)$ kompakt tartójú-e. Általában nem!

Ha g kompakt tartójú, akkor elegendően nagy, illetve elegendően kicsiny y-ra.

$$\psi (y) = \langle \psi (x + y) , g \rangle .$$

eltűnik, hiszen a φ (kompakt tartójú) függvényt elegendően eltolva az x tengely mentén az kívül esik g tartóján.

Ha g tartója csak az egyik oldalról korlátos (mint például a Θ disztribúcióé, akkor a $\psi(y)$ függvény tartója is csak az egyik oldalról lesz korlátos, tehát $\varphi \notin \mathcal{D}$! Amennyiben az f disztribúció is az egyik oldalról korlátos tartójú - és éppen arról az oldalról, amerre $\psi(y)$ nem tűnik el - akkor van lehetőség a konvolúció értelmezésére. Módosítsuk ugyanis a $\psi(y)$ függvényt úgy, hogy f tartóján kívül "vágjuk le" egy sima függvénnyel, de vigyázzunk, hogy továbbra is akárhányszor deriválható maradjon:

$\psi(y)$ egy akárhányszor deriválható, balról korlátos tartójú függvény, amely nem eleme $\mathcal{D}$-nek.

$$F(y) = \begin{cases} 1 , \text{ ha } y \le a, \\ 0 , \text{ ha } y \ge a + 1 \end{cases} \quad \text{és}$$

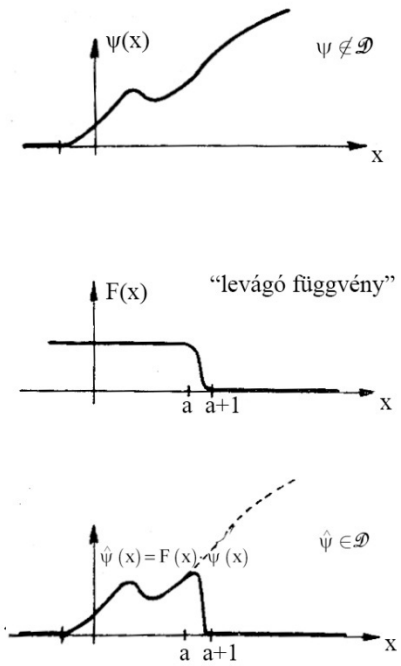
F(y) sima, akárhányszor deriválható függvény, ha $a < y < a + 1$.

$\hat{\psi}(y)$ "levágott" függvény már $\mathcal{D}$-béli. Ha az f disztribúció tartója nem tartalmazza az $y > a$ pontokat, akkor definíció szerint: $\langle \psi , f \rangle = \langle \hat{\psi} , f \rangle$.

Hasonlóan, ha g tartója egyáltalán nem korlátos, de f tartója kompakt, akkor a $\psi(y)$ függvényt mindkét oldalról "levágjuk" f tartóján kívül és ily módon ismét értelmezhetjük a konvolúciót.

Összefoglalva: Az f és g disztribúciók konvolúciója biztosan értelmezhető, ha:

a) f vagy g (esetleg mindkettő) tartója kompakt;
b) f és g tartója ugyanarról az oldalról korlátos.



16. ábra

Határozzuk meg egy tetszés szerinti f disztribúció és a delta-disztribúció konvolúcióját!

$$\langle \varphi , \delta * f \rangle = \langle \psi (y) , \delta \rangle = \psi (y = 0).$$

Mivel

$$\psi (y) = \langle \varphi (x + y) , f(x) \rangle , \psi (0) = \langle \varphi , f \rangle, \text{ tehát}$$

$$\delta * f = f .$$

Hasonlóan

$$\langle \varphi , f * \delta \rangle = \langle \psi (y) , f \rangle, \text{ de mivel}$$

$$\psi (y) = \langle \varphi (x + y) , \delta (x) \rangle = \varphi (x + y) |_{x=0} = \varphi (y)$$

A Dirac-delta disztribúció a konvolúció műveleténél az <u>egységelem</u> szerepét játssza.

Mivel egyenlő a δ' disztribúció és valamilyen másik f disztribúció konvolúciója?

$$\langle \varphi, \delta' * f \rangle = \langle \psi(y), \delta'(y) \rangle = -\psi'(y=0).$$

$$-\psi'(y=0) = -\langle \varphi'(x+y), f(x) \rangle \Big|_{x=0} = \langle -\varphi'(x), f \rangle = \langle \varphi, f' \rangle .$$

Tehát

$$\delta' * f = f'.$$

Hasonlóan

$$\delta^{(n)} * f = f^{(n)}.$$

A konvolúció műveletére érvényesek a következő összefüggések:

$f * g = g * f$ (kommutativitás)

$(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha (f_1 * g) + \beta (f_2 * g)$ (linearitás)

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a disztribúciók konvolúciója az asszociativitás nem mindig teljesül, még akkor sem, ha a kétféle zárójelezésnek külön-külön egyaránt van értelme; tehát

$$(f * g) * h \text{ és } f * (g * h)$$

nem feltétlenül azonos disztribúciók! Legyen pl. f a Heaviside-disztribúció, g a Dirac-delta deriváltja, h pedig az azonosan 1 függvény által definiált 1(x) reguláris disztribúció. Ekkor

$$(\Theta * \delta') * 1(x) = (\Theta' * \delta) * 1(x) = (\delta * \delta) * 1(x) = 1(x),$$

viszont

$$\left(\Theta * (\delta' * 1(x)\right) = \Theta * (\delta * 1'(x)) = 0.$$

A közönséges függvényszorzás deriválási szabályától eltérően

$$(f * g)' = f' * g = f * g',$$

vagyis a konvolúció deriválásánál elegendő az egyik "tényezőt" deriválni.

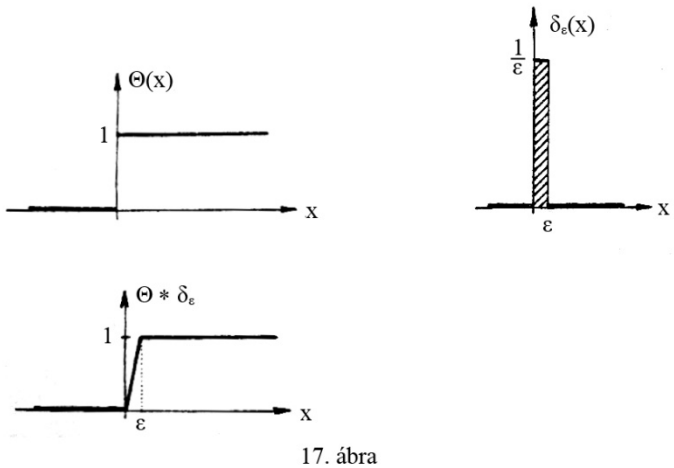
A konvolúció műveletét felhasználhatjuk bizonyos függvények (vagy általában disztribúciók) "kisimítására", regularizálására. A $\delta * f = f$ összefüggés azt sugallja, hogy ha δ helyett valamilyen másik - de a δ-tól "nem nagyon eltérő" - δ_ε disztribúcióval képezzük f konvolúcióját, akkor f-től "nem nagyon eltérő" függvényt (disztribúciót) kapunk.

DEFINÍCIÓ: Az $f * \delta_\varepsilon$ disztribúciót az f disztribúció (δ_ε által) regularizált alakjának nevezzük.

Ha például δ_ε a delta-sorozatoknál említett lépcsősfüggvény (amely csak a $[0,\varepsilon]$ intervallumon különbözik nullától, ott pedig az értéke állandó: $\frac{1}{\varepsilon}$, akkor

$$f * \delta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dy\, f(x-y)$$

vagyis az $f * \delta_\varepsilon$ disztribúció az f integrális középértéke egy ε széles intervallumon. Egy szakadásos függvényt ez a regularizálás folytonossá tesz, de csak ε széles intervallumon "keni el" az eredeti függvényt. Például:



17. ábra

Amennyiben a δ_ε regula t tartójú, akárhányszor

deriválható) függvényt választunk, úgy a regularizált függvény is akárhányszor deriválható függvény lesz, amely azonban csak egy "kicsit" tér el az eredeti függvénytől, annak (δ_ε tartójának megfelelő mértékű) "szétkenésével" kapható meg.

Fontos tulajdonsága még a konvolúció műveletének a folytonosság:

TÉTEL: Ha $g_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} g$, akkor $f * g_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f * g$, feltéve, hogy az alábbi feltételek <u>valamelyike</u> teljesül:

a) f korlátos tartójú disztribúció;
b) az összes g_n (n = 1,2,...) tartója befoglalható egy korlátos halmazba;
c) az f, valamint az összes g_n disztribúció tartója befoglalható ugyanabba a balról (vagy jobbról) korlátos halmazba.

FELADATOK:

2.5.1. Határozzuk meg $\delta(x-x_0)$ és egy tetszőleges f disztribúció konvolúcióját!

2.5.2. Határozzuk meg az $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \text{ ha } x > 0 \\ 0 & , \text{ ha } x \le 0 \end{cases}$ függvény önmagával képzett konvolúcióját és az eredmény felhasználásával oldjuk meg az Abel-féle problémát!

2.6 Többváltozós disztribúciók

A matematikai és fizikai alkalmazások egyaránt igénylik, hogy az egyváltozós disztribúciók fogalmát általánosítsuk több független változó esetére. Ezek a többváltozós disztribúciók a többváltozós függvények megfelelői a disztribúciók körében.

Definiáljuk először egy többválgozós függvényteret az egyváltozós $\mathcal{D}$-tér mintájára:

DEFINÍCIÓ: $\mathcal{D}(R^m)$ az m-dimenziós euklideszi téren (R^m) értelmezett $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ függvények halmaza, ahol φ-k rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1. Akárhányszor deriválhatók, vagyis léteznek a
$$\frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots + k_m} \varphi(\vec{x})}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \qquad 0 \le k_i < \infty \qquad (i = 1,2, \ldots, m)$$
alakú deriváltak.
2. $\varphi(\vec{x})$ kompakt tartójú, azaz létezik egy olyan (φ-től függő) r > 0 szám, hogy
$$\varphi(\vec{x}) \equiv 0, \text{ ha } |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2} \ge r.$$

Ilyen $\varphi \in \mathcal{D}(R^m)$ függvények léteznek, például a
$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - \vec{x}^2}} & , \text{ ha } |\vec{x}| < a \\ 0 & , \text{ ha } |\vec{x}| \ge a \end{cases}$$
függvény rendelkezik a fent említett tulajdonságokkal. A $\varphi(\vec{x})$ függvényeket próbafüggvényeknek nevezzük. ($\mathcal{D}(R^m)$ helyett a rövidség kedvéért csak $\mathcal{D}$ írunk, m-t rögzítettnek tekintjük.)

Az egyváltozós esethez hasonlóan $\mathcal{D}$-ben bevezetünk egy konvergencia-relációt:

DEFINÍCIÓ: A $\varphi_n \in \mathcal{D}$ sorozatról akkor mondjuk, hogy $\mathcal{D}$–térbeli konvergencia értelmében tart egy $\varphi \in \mathcal{D}$ függvényhez, ha az összes $\varphi_n(\vec{x})$ eltűnik egy rögzített sugarú gömbön

kívül és ha a $\varphi_n(\vec{x})$ függvények összes deriváltjai egyenletesen tartanak (az R^m-beli konvergencia értelmében) $\varphi(\vec{x})$ megfelelő deriváltjaihoz. (Az egyenletesség csak az $\vec{x}$ változóra vonatkozik, nem pedig a deriváltak indexére!) A $\mathcal{D}$–beli konvergenciát ismét $\varphi_n(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi(\vec{x})$ módon jelöljük.

A próbafüggvények terének és a $\mathcal{D}$-beli konvergenciának a definiálása után lehetőségünk van a többváltozós disztribúciók értelmezésére:

DEFINÍCIÓ: A $\mathcal{D}$ (R^m) függvénytér lineáris és folytonos leképezését a komplex számokra (vagy speciálisan a valós számokra) - tehát a $\mathcal{D}$-n értelmezett lineáris, folytonos funkcionálokat - m változós disztribúciónak nevezzük.

Az egyváltozós esethez hasonlóan ismét beszélhetünk reguláris disztribúciókról, melyek integrál alakban állítják elő a funkcionált:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), f \right\rangle = \int dx_1 \ldots dx_m \, \varphi(\vec{x}) f(\vec{x}),$$

de értelmezhetünk szinguláris disztribúciókat is, melyekre nem létezik az integrál-előállítás. Ez utóbbira példa az m-dimenziós (más néven m-változós) Dirac-delta:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), \delta \right\rangle = \varphi(0),$$

vagy általánosabban:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), d(\vec{x} - \vec{x}_0) \right\rangle = \varphi(\vec{x}_0).$$

Az egyváltozós disztribúciókhoz hasonlóan értelmezzük a lineáris kombinációt:

$$\left\langle \varphi, c_1 f_1 + c_2 f_2 \right\rangle \overset{\text{def.}}{=} c_1 \left\langle \varphi, f_1 \right\rangle + c_2 \left\langle \varphi, f_2 \right\rangle,$$

valamint az akárhányszor deriválható függvények és a disztribúciók szorzatát:

$$\left\langle f(\vec{x}), g(\vec{x}) f \right\rangle \overset{\text{def.}}{=} \left\langle g(\vec{x}) \varphi(\vec{x}), f \right\rangle.$$

Disztribúciók szorzata, hányadosa, vagy az inverz-képzés - ugyanúgy mint az egyváltozós esetben - most sincs definiálva.

A többváltozós disztribúciók (parciális) deriválása az egyváltozós esethez hasonlóan értelmezhető:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\rangle \overset{\text{def.}}{=} \left\langle -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, f \right\rangle.$$

A deriválás most is korlátlanul, akármelyik disztribúcióra akárhányszor elvégezhető.

Határozzuk meg például az

$$f = \frac{1}{|\vec{x}|} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

reguláris disztribúcióra a

$$\Delta f \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

kifejezést. Az $\frac{1}{|\vec{x}|}$ lokálisan integrálható függvény az origó kivételével mindenhol deriválható és $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = 0$. Mint disztribúció azonban $\Delta f \neq 0$, mint az az alábbiakból kiderül:

$$\left\langle \varphi, \Delta f \right\rangle = \left\langle \varphi, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}, f \right\rangle = \left\langle \Delta\varphi, f \right\rangle = \int\int\int d^3\vec{x} \; \Delta\varphi(\vec{x}) \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

A deriválást közvetlenül nem háríthatjuk át az $\frac{1}{|\vec{x}|}$ függvényre az origóbeli szingularitás miatt.

Hagyjuk ki ezért az origó körüli ε sugarú gömböt az integrálásból és tartsunk ε-nal nullához:

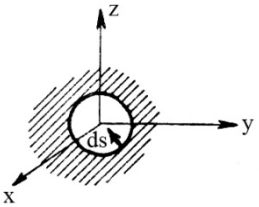
$$\left\langle \varphi, \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{|\vec{x}|>\varepsilon} d^3\vec{x}\ \Delta\varphi \frac{1}{|\vec{x}|}.$$

Most már alkalmazhatjuk a Green-tételt:

$$\left\langle \varphi, \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \iiint \varphi(\vec{x}) \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} d^3\vec{x} + \oiint\limits_{|\vec{x}|=\varepsilon} \operatorname{grad}\varphi \frac{1}{|\vec{x}|} \overrightarrow{dS} - \oiint\limits_{|\vec{x}|=\varepsilon} \varphi(\vec{x}) \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{x}|} \overrightarrow{dS} \right\}.$$

A térfogati integrál nullával egyenlő, az első felületi integrál pedig határértékben nullát ad, hiszen gradφ korlátos, a felület nagysága pedig $\sim\varepsilon^2$-tel tart nullához. A második felületi integrálra már nem mondhatjuk el ugyanezt, hiszen

$$\overrightarrow{dS} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{x}|} = \overrightarrow{dS} \cdot \frac{-\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = |\overrightarrow{dS}| \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$



18. ábra

($\overrightarrow{dS}$ a tartományból kifelé, tehát az origó felé mutató vektor).

$\varphi(\vec{x})$ folytonos a felületen, tehát valamelyik felületi pontban felvett $\varphi(\vec{x}_0)$ értékével helyettesítve kiemelhető az integrál alól:

$$\left\langle \varphi, \Delta \frac{1}{|\vec{x}|} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\vec{x}_0) \left[-4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \right] \Bigg|_{|\vec{x}_0| = \varepsilon} = -4\pi \cdot \varphi(0)\ .$$

(A térfogati integrálás φ kompakt tartója miatt csak egy véges térrészre terjedt ki, ennek a térrésznek a külső határán φ = 0, emiatt onnan nem adódott felületi integrál.) Végeredményben:

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -4\pi\delta(\vec{x}).$$

Többváltozós függvényekre a konvolúciót az

$$(f * g)(\vec{x}) = \int d^m y\, f(\vec{y})\, g(\vec{x} - \vec{y})$$

integrállal definiáljuk. Ezt a disztribúciókra az egyváltozós esethez hasonlóan terjeszthetjük ki:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}),\ f * g \right\rangle = \left\langle \psi(\vec{y}),\ f(\vec{y}) \right\rangle, \text{ ahol}$$

$$\psi(y) = \left\langle \varphi(\vec{x} + \vec{y}),\ g(\vec{x}) \right\rangle.$$

Az m-változós Dirac-delta ismét az egységelem szerepét játssza:

$$f * \delta(\vec{x}) = f,$$

és érvényes a kommutativitás és linearitás a konvolúció műveletére most is.

Többváltozós disztribúció vezet az egyváltozós disztribúciók ún. <u>direkt szorzata</u>. Ezt pl. 2 változós esetben az alábbi módon értelmezzük:

ha f és g egyváltozós disztribúciók, akkor $f(x)\,g(y) \equiv F(x,y)$ olyan kétváltozós disztribúció, mely

$$\left\langle \varphi(x,y),\ F(x,y) \right\rangle = \left\langle \left\langle \varphi(x,y),\ f(x) \right\rangle,\ g(y) \right\rangle$$

módon hat a $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(R^2)$ próbafüggvényekre. A háromdimenziós $\delta(\vec{x})$ például előállítható δ(x), δ(y) és δ(z) direkt szorzataként.

Általában egy m_1 és egy m_2 változós disztribúció direkt szorzata egy m_1+m_2 változós disztribúció.

FELADATOK:

2.6.1. Határozzuk meg az m-változós függvények terén értelmezett

$$f=\frac{1}{|\vec{x}|^{m-2}}\equiv\left[\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right]^{1-\frac{m}{2}} \text{ disztribúcióra } \Delta^{(m)}f\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f \text{ értékét!}$$

2.6.2. m = 2 dimenzióban mivel egyenlő $\Delta\ln|\vec{x}|$?

2.7 Mérsékelt disztribúciók; analitikus disztribúciók

Az eddigiekben disztribúción mindig a $\mathcal{D}$ -osztálybeli függvényeken lineáris, folytonos funkcionálokat értettünk. A $\mathcal{D}$ függvény-tér „nagyon jól viselkedő” függvényekből áll, hiszen akárhányszor deriválhatók és $|x|\to\infty$ -re a lehető leggyorsabban tűnnek el (nevezetesen azonosan nullák egy bizonyos véges x-től kezdve). A $\mathcal{D}$ -tér kellemes tulajdonságai miatt a $\mathcal{D}$ -n értelmezett disztribúciók $\mathcal{D}'$ halmaza meglehetősen tágnak adódott, meglehetősen szinguláris "függvények" is belefértek.

Lehetséges a disztribúcióelmélet kiépítésénél egy $\mathcal{D}$ -nél tágabb S függvényosztályból kiindulni (tehát kevesebb megszorítást adni a próbafüggvényekre), ennek viszont az az ára, hogy az S-en értelmezett lineáris, folytonos funkcionálok – disztribúciók – halmaza, melyet S´-vel fogunk jelölni, szűkebb lesz, mint $\mathcal{D}'$. Nézzük meg ezt a felépítést egy kicsit részletesebben!

Tekintsük a valós egyváltozós függvényeket (könnyű általánosítani több változóra), melyek akárhányszor deriválhatók és $|x|\to\infty$ -re valamennyi deriváltjukkal együtt minden hatványnál gyorsabban tartanak nullához:

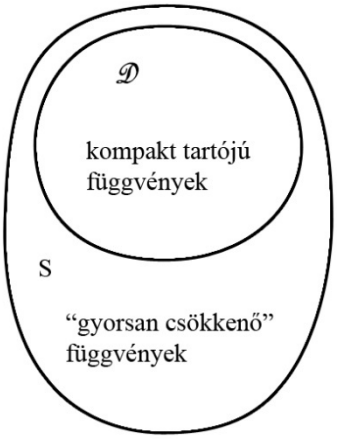
$$\lim_{|x|\to\infty}\left|x^k\cdot\frac{d^m}{dx^m}\varphi(x)\right|=0 \qquad \text{(minden pozitív k és n-re).}$$

Jelöljük ezt a függvényosztályt S-sel! S nyilván tágabb, mint $\mathcal{D}$, hiszen minden $\mathcal{D}$ -beli függvény egyben S-beli is. Tehát

$$\mathcal{D}\subset S$$

Annak érdekében, hogy az S-en értelmezett funkcionálok folytonosságáról beszélhessünk, vezessük be S-en is egy konvergencia-relációt:

DEFINÍCIÓ: $\varphi_n \xrightarrow{S} 0$, ha $x^k\cdot\frac{d^m}{dx^m}\varphi_n(x)$ egyenletesen tart nullához minden k, m ≥ 0 –ra.



19. ábra

A $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi$ konvergenciát nyilván $\varphi_n-\varphi \xrightarrow{S} 0$ módon értelmezzük.

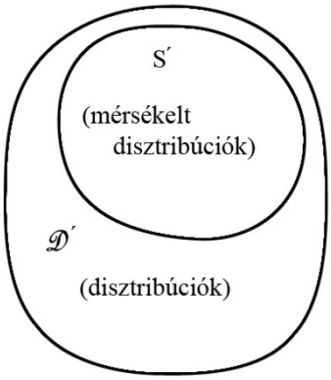
Megjegyezzük, hogy az S térbeli konvergencia gyengébb, mint a $\mathcal{D}$ -beli, tehát ha $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, akkor $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi$ is igaz, fordítva azonban nem.

Az S függvénytéren is értelmezhetünk lineáris, folytonos funkcionálokat. Ezeket - hogy megkülönböztessük a $\mathcal{D}$-n értelmezett funkcionáloktól - <u>mérsékelt (temperált) disztribúciónak</u> nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Mérsékelt disztribúciónak nevezzük az S függvénytéren értelmezett lineáris, folytonos funkcionálokat.

Milyenek lehetnek ezek a funkcionálok? Ismét megkülönböztethetünk reguláris és szinguláris funkcionálokat. A regulárisak integrállal állíthatók elő, ezek tehát ismét a hagyományos függvények megfelelői. Mivel azonban a próbafüggvények terét kibővítettük, már nem minden lokálisan integrálható függvénynek felel meg egy funkcionál, csupán azoknak, amelyek $|x|\to\infty$ -re

legfeljebb hatvány-függvényként nőnek. Így tehát a polinomok például reguláris (mérsékelt) disztribúciót alkotnak, de az $f(x) = e^x$ függvény már nem!

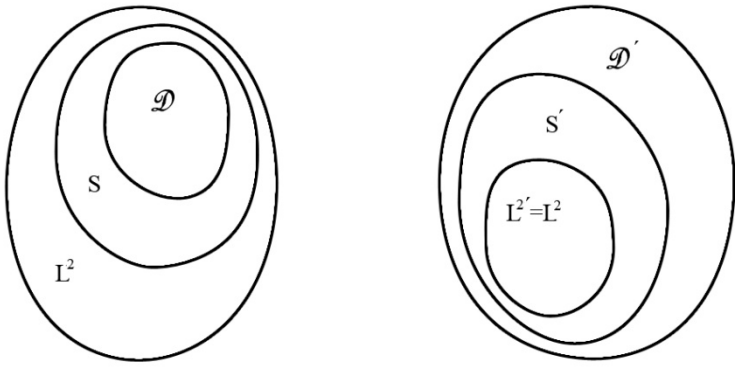


20. ábra

A szinguláris disztribúcióra példa a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, vagy a Dirac-delta, melyek értelmezése ugyanaz, mint korábban.

A mérsékelt disztribúciók is lineáris teret alkotnak, ezt a lineáris teret S duálisának nevezik és S´-vel jelölik. Minden S-en értelmezett disztribúció $\mathcal{D}$-n is értelmezve van, emiatt $S' \subset \mathcal{D}'$. Általában igaz, hogy minél jobban kibővítünk egy függvényosztályt, az ezen értelmezett lineáris, folytonos funkcionálok halmaza (duális tere) annál szűkebb lesz. Ha például az S függvényteret tovább bővítjük egészen az L^2 térig (tehát a négyzetesen integrálható függvények teréig), akkor ennek duálisa már annyira szűk lesz, hogy egyetlen szinguláris disztribúció sem fér bele, csupán L-beli függvények által generált reguláris disztribúciók. A Riesz-tétel értelmében ugyanis minden L^2-n értelmezett lineáris, folytonos funkcionál $\langle \varphi , f \rangle$ felírható

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx \text{ alakban, } f(x) \in L^2 \text{, tehát } L^{2/} = L^2.$$



21. ábra

A próbafüggvények terét nemcsak úgy módosíthatjuk, hogy $\mathcal{D}$-t kibővítjük, hanem úgy is, hogy egy teljesen új függvényteret választunk. Egy lehetséges próbafüggvénytér a teljes komplex számsíkon (a végtelen távoli pont kivételével) reguláris függvények (ún. egész függvények) tere:

DEFINÍCIÓ: Z-osztálybeli függvénynek nevezzük azokat az egész függvényeket, melyek eleget tesznek az alábbi egyenlőtlenségnek:

$$\left| z^q \tilde{\varphi}(z) \right| \le C_q \cdot e^{m|\mathrm{Im} z|} \quad (q = 0,1,2,\ldots).$$

(C_q és m pozitív állandók).

Bebizonyítható, hogy a Z-osztálybeli függvények a $\mathcal{D}$-osztálybeliek Fourier-transzformáltjai, azaz $\varphi \in \mathcal{D}$-re

$$\tilde{\varphi}(z) = F\left[\varphi(x)\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) e^{izx} \in Z$$

és viszont, $\tilde{\varphi} \in Z$-re

$$F^{-1}\left[\tilde{\varphi}(z)\right] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \tilde{\varphi}(z) e^{-izx} = \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

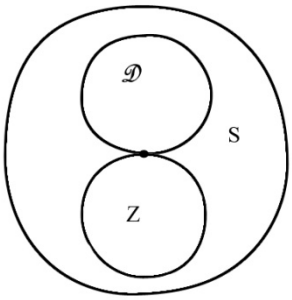
A Fourier-transzformáció létesítette kölcsönösen egyértelmű, lineáris megfeleltetés $\mathcal{D}$ és Z között folytonos is, ha Z-ben a konvergenciát a következőképpen definiáljuk:

DEFINÍCIÓ: Egy $\tilde{\varphi}_n(z) \in Z$ függvénysorozat Z-térbeli értelemben nullához tart, ha létezik olyan

n-től független C_q és m, hogy

$$\left|z^q \widetilde{\varphi}_n(z)\right| \le C_q \cdot e^{m|\mathrm{Im}z|}$$

és a $\widetilde{\varphi}_n(z)$ függvénysorozat a valós tengely minden zárt részintervallumán egyenletesen tart nullához.



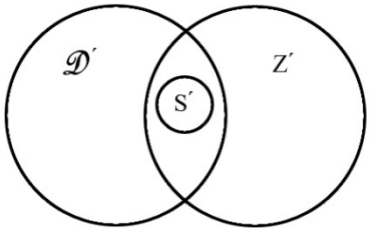
22. ábra

Nyilvánvaló, hogy egyetlen $\mathcal{D}$-beli függvény sem tartozhat Z-be (a triviális nulla-függvényen kívül), hiszen ezek a függvények egy véges intervallumon kívül azonosan nullával egyenlők, tehát minden deri-váltjuk nulla. Másrészt, ha a teljes síkon regulárisak, akkor Taylor-soruk bármelyik pontban előállítja őket, ez viszont a nullelemen kívül egyetlen $\mathcal{D}$-béli függvényre sem teljesül. Könnyen belátható viszont, hogy a Z-beli függvények egyben S-nek is elemei. Az eddigiekhez hasonlóan a Z függvény osztályon is értelmezhetünk disztribúciókat:

DEFINÍCIÓ: A Z-n értelmezett lineáris, folytonos funkcionálokat (Z-n értelmezett) disztribúciónak nevezzük és az ezek által alkotott lineáris teret Z′-vel jelöljük.

A Z′ tér magában foglalja S′-t (hiszen $Z \subset S$), emiatt Z′-nek és $\mathcal{D}'$-nek van közös része.

Az $f \in Z'$ disztribúciókat két csoportba oszthatjuk:



23. ábra

Reguláris disztribúciók azok, melyek hatása előállítható integrál alakban:

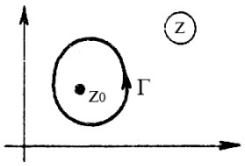
$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) f(x).$$

A másik csoportba azok a disztribúciók tartoznak, melyek nem regulárisak. Érdekes azonban, hogy ezek is előállíthatók egy analitikus függvény és a próbafüggvény szorzatának integráljaként, de az integrálás nem a valós tengelyre, hanem valamilyen Γ görbére terjed ki. Ezért a nem reguláris (szinguláris) disztribúciókat <u>analitikus disztribúciónak</u> is szokás nevezni. Például a

$$\langle \varphi, \delta(z - z_0) \rangle = \varphi(z_0)$$

módon definiált Dirac-delta disztribúció hatása úgy is megkapható, hogy a $g(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z - z_0}$ függvényt integráljuk a z_0 komplex számot körülvevő Γ görbére. A Cauchy-formula értelmében ugyanis

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} dz \varphi(z) \frac{1}{z - z_0} = \varphi(z_0).$$

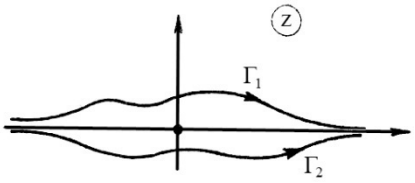


24. ábra

Hasonlóan az $\frac{1}{2\pi i}\frac{(-1)^n n!}{(z - z_0)^{n+1}}$ függvény és az előbbi Γ görbe a delta-disztribúció n-ik deriváltját adja, amennyiben a derivált disztribúciót ugyanúgy definiáljuk, mint korábban.

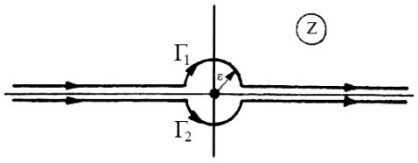
A régebbről ismert $\mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ disztribúciót is megkaphatjuk egy analitikus függvény alkalmasan választott görbe menti integráljaként:

$$\left\langle \varphi(z), \mathbb{P}\left(\frac{1}{z}\right) \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \varphi(z)\frac{1}{z}\, dz + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} \varphi(z)\frac{1}{z}\, dz.$$



25. ábra

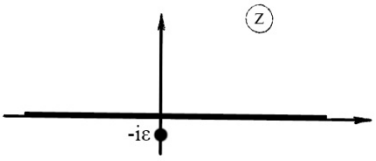
A két görbét ugyanis - ha nem ütközünk szingularitásba - tetszés szerint deformálhatjuk, például így is:



26. ábra

A két félkör járuléka $\varepsilon \to 0$ limeszben kiejti egymást, a valós tengelyre vett integrál pedig éppen a főérték-integrált adja. A Γ_1 görbére vett integrált megkaphatjuk másképpen is:

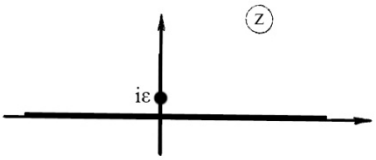
$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \varphi(z)\frac{1}{z}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\varphi(z)\frac{1}{z+i\varepsilon}$$



27. ábra

Hasonlóan:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} \varphi(z)\frac{1}{z}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\varphi(z)\frac{1}{z-i\varepsilon}$$



28. ábra

A fentiek értelmében $I_1 - I_2 = \left\langle \varphi, \mathbb{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right\rangle$, a két integrál

különbsége viszont (melyből éppen a valós tengelyen vett integrál esik ki és az origó körüli kicsiny kör járuléka marad meg)

$$I_1 - I_2 = -i\pi\varphi(0) = -i\pi\langle\varphi,\delta\rangle.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{\varepsilon\to_+ 0}\frac{1}{z+i\varepsilon} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{z}\right) - i\pi\delta(z)$$

ahol az $\frac{1}{z+i\varepsilon}$ egy reguláris (tehát a valós tengelyen integrálandó) disztribúciót jelöl. Ezt az összefüggést gyakran alkalmazzák a fizikában.

FE LADATOK:

2.7.1. Mutassuk meg, hogy a Z-osztálybeli függvények Fourier-transzformáltja kompakt tartójú!

2.7.2. Az $f(x) = e^{-x^2}\sin e^{x^2}$ függvény akárhányszor deriválható és minden hatványnál gyorsabban eltűnik $|x| \to \infty$-re. Igaz-e, hogy $f(x) \in S$?

2.7.3. Konvergens-e az $f_N = \sum_{n=0}^{N}\frac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(z) \in Z'$ disztribúció-sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?

2.7.4. Bontsuk valós és képzetes részre a $\ln(x+i\varepsilon) \in Z'$ reguláris disztribúciót és vizsgáljuk meg az $\varepsilon \to 0$ limeszt! Képezzük a fenti disztribúció deriváltját!

2.8 Disztribúciók Fourier-transzformáltja

A hagyományos függvények Fourier-transzformáltját a

$$\widetilde{\varphi}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{isx}\varphi(x) \equiv F\left[\varphi(x)\right],$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-isx}\varphi(s) \equiv F^{-1}\left[\widetilde{\varphi}(s)\right]$$

összefüggésekkel értelmezzük. (Megállapodás kérdése, hogy az integrálok előtti állandókat mekkorának választjuk, csak a szorzatuk kell $\frac{1}{2\pi}$-t adjon. Szokás pl. az "odatranszformálás" képletében l-nek választani az integrál előtti számot, ekkor a másik $\frac{1}{2\pi}$ lesz.) Ez a transzformáció az L^2 függvényteret önmagára képezi le, méghozzá lineáris, folytonos és unitér módon. Ez utóbbi annyit jelent, hogy a transzformáció megőrzi az L^2-béli skalárszorzatot:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)}\, f_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widetilde{f_1(x)}}\, \widetilde{f_2(x)}\, dx$$

Ezt az összefüggést (melyet Parseval-formulának neveznek) átírhatjuk az alábbi alakra:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, \widetilde{f}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x)\, f(x)\, dx.$$

Ez az alak azért kényelmes, mert nem tartalmazza a komplex konjugálás műveletét és formájában erősen emlékeztet egy reguláris $\widetilde{f}(x)$ disztribúció $\varphi(x)$ próbafüggvényre történő "hatására".
Természetes módon adódik a gondolat: értelmezzük úgy egy disztribúció Fourier-transzformáltját, mint a próbafüggvény Fourier-transzformáltján ható lineáris, folytonos funkcionált:

DEFINÍCIÓ: Az f disztribúció Fourier-transzformáltja ismét egy disztribúció, melyre fennáll: $\langle \varphi, \widetilde{f} \rangle = \langle \widetilde{\varphi}, f \rangle$.

Nézzük meg, értelmes-e ez a definíció. Ha $\widetilde{\varphi}(x) \in S$, $f \in S'$, tehát f egy mérsékelt disztribúció, akkor $\varphi(x)$ is eleme S-nek, tehát $\widetilde{f}$ is egy S-en értelmezett funkcionál. Belátható, hogy a Fourier-transzformáció az S-beli konvergenciára nézve folytonos, emiatt f is egy mérsékelt disztribúció. A Fourier-transzformáció S´ minden elemére elvégezhető és az eredmény is S´-beli elem lesz, tehát a transzformáció nemcsak S-t, de S´-t is önmagára képezi le lineáris, folytonos módon:

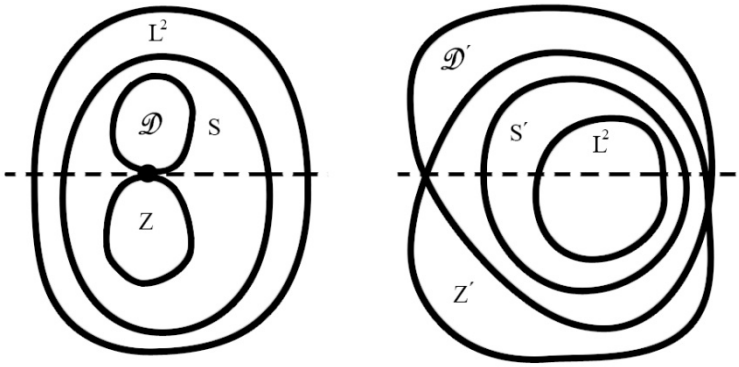
$$\varphi \in S \leftrightarrow \widetilde{\varphi} \in S,$$
$$f \in S' \leftrightarrow \widetilde{f} \in S'.$$

Nem ilyen egyszerű a helyzet az $f \in \mathcal{D}'$ disztribúcióknál. Ezek próbafüggvényei a $\mathcal{D}$-térbe tartoznak és a Fourier-transzformáció $\mathcal{D}$-t a Z függvénytérrel kapcsolja össze. Emiatt most az f funkcionál a Z-téren van értelmezve, tehát (a Fourier-transzformáció folytonossága miatt) egy Z´-beli disztribúció:

$$\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D} \qquad \varphi \in Z$$
$$f \in \mathcal{D}' \qquad \widetilde{f} \in Z'$$

Éppen ezek az összefüggések magyarázzák meg, hogy miért kellett a $\mathcal{D}$ függvényosztály mellett S-sel és Z-vel is foglalkoznunk, miért kellett az $f \in \mathcal{D}'$ disztribúciók mellé bevezetnünk a mérsékelt és az analitikus disztribúciók fogalmát. A gyakorlati felhasználások szempontjából oly fontos Fourier-transzformáció igényli ezeket a fogalmakat.

Az alábbi vázlatos rajzon a különböző függvényterek és a rajtuk értelmezett disztribúciók egymáshoz való viszonyát szemléltetjük. A Fourier-transzformáció a szaggatott vonalra való tükrözésnek felel meg:



29. ábra

Határozzuk meg néhány disztribúció Fourier-transzformáltját!

1. példa: Az $f(x) \equiv 1$ reguláris disztribúció mérsékelt disztribúció: $f \in S'$, emiatt természetesen $\tilde{f} \in S'$ is fennáll. A definíció alapján $\tilde{f}$ úgy hat a φ próbafüggvényre, hogy

$$\langle \varphi, \tilde{f} \rangle = \langle \tilde{\varphi}, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(x)\, dx$$

Node ez nem más, mint a φ(x) függvény értéke az origóban - szorozva $\sqrt{2\pi}$ -vel – tehát

$$\widetilde{1(x)} = \sqrt{2\pi}\, \delta .$$

Bár az f(x) ≡ 1 függvény nem eleme L^2 -nek, a fenti disztribúció-összefüggés miatt szokták használni a formális

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\, dx = 2\pi\delta(s)$$

relációt. Ez csupán azt fejezi ki, hogy az azonosan egy függvénynek megfelelő (mérsékelt) disztribúció Fourier-transzformáltja egy állandótól eltekintve a Dirac-delta szinguláris disztribúció.

2. példa Legyen a Fourier-transzformálandó disztribúció a δ(x)! Ez is egy mérsékelt disztribúció, hiszen az S-en értelmezett lineáris, folytonos funkcionál. A keresett $\tilde{\delta}$-ra igaz:

$$\langle \varphi(s), \tilde{f} \rangle = \langle \tilde{\varphi}(x), f \rangle = \tilde{\varphi}(x=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \varphi(s), 1(s) \rangle .$$

A δ Fourier-transzformáltja tehát az $f(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ állandó függvénnyel adott reguláris disztribúció.

3. példa Legyen $f(x) = e^{ax}$ (a > 0), amely egy $\mathcal{D}$ -n értelmezett reguláris disztribúció. Mivel azonban $f \notin S'$, az $\tilde{f}$ Fourier-transzformált nem mérsékelt disztribúció, hanem Z′ eleme lesz.

$$\langle \varphi(s), \tilde{f}(s) \rangle = \langle \tilde{\varphi}(x), e^{ax} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \tilde{\varphi}(x) e^{ax} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{isx} \varphi(s)$$

Ez az integrál egyértelműen meghatározza, hogy miként hat az $\tilde{f}$ disztribúció a $\varphi(s) \in Z$ próbafüggvényre, csak éppen nem túlságosan áttekinthető alakban, hiszen tartalmaz egy "fölösleges" integrálást is az x változóra. Az lenne a kényelmes, ha az integrálások sorrendjét fel lehetne cserélni, x szerinti kiintegrálhatnánk és az eredmény

$$\langle \varphi(s), \tilde{f} \rangle = \int ds\, (\ldots \text{valami} \ldots)\, \varphi(s)$$

alakban állna előttünk. Ezt azonban nem tehetjük meg, mert az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ax + isx}$$

integrál valós s-ekre (márpedig a másik, az s szerinti integrálban s valós) divergens. Az eredeti sorrendben nincs semmi baj az integrálokkal, mindkettő értelmes, hiszen $\varphi(s) \in Z$, emiatt a Fourier-transzformáltja kompakt tartójú függvény, az x szerinti integrál tehát csak látszólag fut x = ∞ -ig!

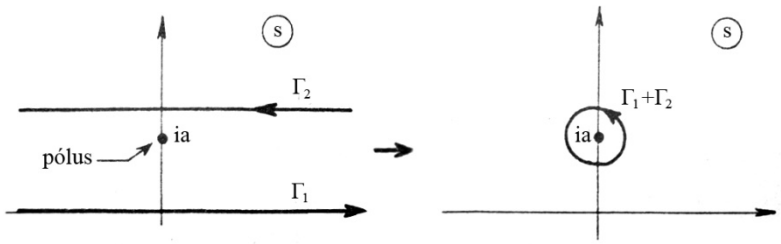
Mégis felcserélhetjük az integrálások sorrendjét, ha egy "trükköt" alkalmazunk. Vegyük észre, hogy az s változóban az integrandus az egész komplex számsíkon analitikus, tehát az integrációs görbe a valós tengelyről akárhová eltolható, eldeformálható. Ha például az Im s = állandó > a egyenesbe toljuk el az integrációs kontúrt, akkor az x szerinti integrál a felső határon konvergenssé válik, azonban az alsó határon sajnos elromlik, divergálni kezd.

Mindkét végén konvergens integrált kapunk, ha az x szerinti integrált két részre vágjuk és csak az egyikben deformáljuk az s integrációs görbéjét:

$$\sqrt{2\pi}\,\langle\varphi,\tilde{f}\rangle = \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{ax}\int_{-\infty}^{\infty} ds\; e^{(isx)}\,\varphi(s) + \int_{0}^{\infty} dx\, e^{ax}\int_{-\infty}^{\infty} ds\; e^{(isx)}\,\varphi(s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds\,\varphi(s)\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{ix(s-ia)} + \int_{\substack{\mathrm{Im}\,s=b\\(b>a)}} ds\,\varphi(s)\int_{0}^{\infty} dx\, e^{ix(s-ia)} =$$

$$= \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} ds\,\varphi(s)\,\frac{-i}{s-ia} = 2\pi\varphi(s=ia)$$



30. ábra

Az utolsó lépésnél a $\Gamma_1+\Gamma_2$ integrációs utat rázsugorítottuk az s-ia pólusra és alkalmaztuk a Cauchy-tételt. Így tehát végül azt kaptuk, hogy

$$\widetilde{e^{ax}} = \sqrt{2\pi}\;\delta(s-ia) \in Z'.$$

Könnyen meg lehet ismételni a fenti számolást a < 0, vagy általában a = komplex állandó esetben is. Az eredmény ugyanaz lesz, mint a példánkban, emiatt írhatjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ix(s-s_0)} = 2\pi\delta(s-s_0)$$

(s tetszőleges komplex állandó). Ez az összefüggés egyrészt azt fejezi ki, hogy e^{-is_0x} Fourier-transzformáltja $\delta(s-s_0)$-lal arányos, de tekinthetjük úgy is, hogy az x paramétertől függő $e^{ix(s-s_0)} = f(s) \in Z$ reguláris disztribúció integrálja (lásd 2.4 pontot) $2\pi\delta(s-s_0)$-lal egyenlő.

<u>4, példa</u> Számítsuk ki a Heaviside-féle disztribúció Fourier-transzformáltját! Mivel $\Theta(x)$ előállítható az alábbi sorozat $\mathcal{D}'$-beli határértékeként

$$f_\varepsilon(x) = \Theta(x)\,e^{-\varepsilon x}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = \Theta(x)$$

és $f_\varepsilon(x)$ mint függvény, közvetlenül Fourier-transzformálható:

$$\widetilde{f_\varepsilon(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,e^{isx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x[\varepsilon-is]}\,dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{s+i\varepsilon}.$$

A Fourier-transzformáció folytonossága miatt

$$\widetilde{\Theta} = \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{f_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{s+i\varepsilon} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}\right) - i\pi\delta(s)\right].$$

(Az utolsó lépésnél felhasználtuk a 2.7. fejezet végén kapott összefüggést.) Hasonlóan látható be, hogy

$$\widetilde{\Theta(-x)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}\right) - i\pi\delta(s)\right].$$

Összeadva, illetve kivonva a fenti két relációt a már ismert $\tilde{1} = \sqrt{2\pi}\;\delta(s)$-t, illetve az új

$$\widetilde{\mathrm{sgn}(x)} = \widetilde{\Theta(x)} - \widetilde{\Theta(-x)} = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}\right)$$

összefüggést kapjuk.

A Fourier-transzformációt értelmezhetjük többváltozós disztribúciókra is:

$$\left\langle \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_N),\ \tilde{f}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi},\ f \right\rangle,$$

ahol

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N\, e^{i(s_1 x_+ s_2 x_2 + \ldots + s_N x_N)}\, \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_N)$$

Például az N változós $f(\vec{x}) \equiv 1$ függvény Fourier-transzformáltja

$$\tilde{1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\, \delta(\vec{s}).$$

FELADATOK:

2.8.1. Jelöljük be az 50. oldalon szereplő ábrákon, hogy hol helyezkednek el az

$$e^{(-x)^2},\ e^x,\ \sin x,\ \frac{\sin x}{x},\ \cos x,\ \Theta(x),\ e^{(-x)^4},\ P_n(x)$$

függvények, illetve a

$$\Theta(x),\ \delta(x),\ \mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right),\ \delta'(x-2),\ \delta(x-31),\ e^{(-x)^2},\ e^x,\ \sin x,\ e^{x^2}$$

disztribúciók.

2.8.2. Határozzuk meg a sin ax és a cos ax függvények (disztribúciók) Fourier-transzformáltját!

2.8.3. Határozzuk meg x^k Fourier-transzformáltját!

2.8.4. Az előző feladat eredményét felhasználva számítsuk ki a

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} x^k \quad (\text{a valós, vagy komplex állandó})$$

sor Fourier-transzformáltját és vizsgáljuk meg az $N \to \infty$ limeszt!

2.8.5. Mutassuk meg, hogy minden $\langle \varphi, g \rangle = \int_{\Gamma} ds\, \varphi(s)\, g(s)$ alakú analitikus disztribúció (Γ véges zárt görbe) előállítható egy reguláris f(x) disztribúció Fourier-transzformáltjaként! Adjuk meg f(x)-et g(s) segítségével!

2.8.6. Előállítható-e a $\left\langle \varphi(s),\ g \right\rangle = \int_{-1}^{1} \varphi(s)\, ds$ módon értelmezett $g \in Z'$ disztribúció

$\int_{\Gamma(\text{zárt})} ds\, \varphi(s)\, g(s)$ analitikus alakban? Határozzuk meg g inverz Fourier-transzformáltját!

2.8.7. Határozzuk meg az $f(x) = e^{x^2}$ $\mathcal{D}'$-beli disztribúció Fourier-transzformáltját!

2.9 A Fourier-transzformáció tulajdonságai

Az előző pontban definiált Fourier-transzformáció számos érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Ezek nemcsak elméleti szempontból érdekesek, hanem a Fourier-transzformáció gyakorlati felhasználásánál is nagyon fontosak.

<u>a) Linearitás.</u> Értelmezésénél fogva a Fourier-transzformáció lineáris művelet, azaz

$$\widetilde{c_1 f_1 + c_2 f_2} = c_1 \tilde{f_1} + c_2 \tilde{f_2}.$$

<u>b) Eltolt függvény (disztribúció) Fourier-transzformáltja</u>

Ha f(x) egy függvény, melynek létezik az

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{isx} f(x)$$

Fourier-transzformáltja, akkor nyilván az f(x+ξ) függvény is Fourier-transzformálható és

$$\widetilde{f(x+\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{isx} f(x+\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{is(x-\xi)} f(x) = e^{-is\xi} \widetilde{f(x)}.$$

Megmutatjuk, hogy a fenti összefüggés disztribúciókra is érvényben marad. Az f(x+ξ) disztribúciót a

$$\left\langle \varphi(x)\,,\, f(x+\xi) \right\rangle = \left\langle \varphi(x-\xi)\,,\, f(x) \right\rangle$$

összefüggéssel értelmeztük.

$$\left\langle \varphi(s)\,,\, \widetilde{f(x+\xi)} \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi}(x)\,,\, f(x+\xi) \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi}(x-\xi)\,,\, f(x) \right\rangle.$$

Mivel

$$\tilde{\varphi}(x-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{is(x-\xi)} \varphi(s) = \widetilde{e^{-is\xi} \varphi(s)},$$

$$\left\langle \varphi(s)\,,\, \widetilde{f(x+\xi)} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\varphi(s) e^{-is\xi}}\,,\, f(x) \right\rangle = \left\langle \varphi(s)\,,\, e^{-is\xi} \tilde{f}(s) \right\rangle$$

$$\widetilde{f(x+\xi)} = e^{-is\xi} \widetilde{f(x)}.$$

Teljesen hasonló módon mutatható meg, hogy

$$\widetilde{e^{is_0 x} f(x)} = \tilde{f}(s+s_0).$$

(Megjegyzés: vigyázzunk az $\widetilde{f(x+\xi)}$ és az $\tilde{f}(s+s_0)$ függvények közti különbségre. Az előbbi annyit jelent, hogy az f(x) függvényt eltoljuk az x változóban -ξ-vel, majd Fourier-transzformáljuk, míg a második kifejezés az $\tilde{f}(s)$ Fourier-transzformált függvényt jelöli az $s+s_0$ helyen!)

<u>c) Nyújtás</u> Disztribúciókra is értelmeztük a nyújtás műveletét az

$$\left\langle \varphi(x)\,,\, f\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = |a| \left\langle \varphi(ax)\,,\, f(x) \right\rangle$$

összefüggéssel. Mi a kapcsolat a nyújtott disztribúció és az eredeti disztribúció Fourier-transzformáltjai között? Függvényekre

$$\widetilde{f\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{isx} f\left(\frac{x}{a}\right) = |a| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{i(sa)x'} f(x') = |a| f(as).$$

Ez az összefüggés a disztribúciókra is érvényben marad:

$$\left\langle \varphi(x)\,,\, \widetilde{f\left(\frac{x}{a}\right)} \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi}(x)\,,\, f\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle = |a| \left\langle \tilde{\varphi}(ax)\,,\, f(x) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \widetilde{\varphi\left(\frac{s}{a}\right)}\,,\, f(x) \right\rangle = \left\langle \varphi\left(\frac{s}{a}\right)\,,\, \tilde{f}(s) \right\rangle = \left\langle \varphi(s)\,,\, |a|\, \tilde{f}(as) \right\rangle$$

tehát

$$\widetilde{f\left(\frac{x}{a}\right)} = |a|\, \tilde{f}(as).$$

<u>d) Derivált Fourier-transzformáltja</u>

Függvényekre fennáll

$$\widetilde{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f'(x) e^{isx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \frac{d}{dx}\left(e^{isx}\right) = -is\,\tilde{f}(s),$$

feltéve, hogy f(x) a végtelenben elég gyorsan nullához tart, és ezért a kiintegrált rész elhagyható, továbbá, hogy a parciális integrálás megengedett.

Megmutatjuk, hogy a disztribúciók körében minden esetben érvényes az

$$\widetilde{f'(x)} = -is\,\tilde{f}(s)$$

összefüggés. Valóban

$$\left\langle \varphi(s),\ \widetilde{f'} \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi}(x),\ f' \right\rangle = -\left\langle \frac{d}{dx}\tilde{\varphi}(x),\ f(x) \right\rangle$$

Mivel

$$\frac{d}{dx}\tilde{\varphi}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{isx} \varphi(s)\right] = \widetilde{is\varphi(s)}$$

minden $\tilde{\varphi}(x) \in \mathcal{D}$, illetve $\tilde{\varphi}(x) \in$ S-re fennáll, így

$$\left\langle \tilde{\varphi}(x),\ f' \right\rangle = \left\langle \varphi(s),\ -is\,\tilde{f}(s) \right\rangle,$$

$$\widetilde{\frac{d}{dx} f(x)} = -is\,\tilde{f}(s)$$

minden $f \in \mathcal{D}'$ disztribúcióra.

Hasonlóan adódik a

$$\widetilde{ixf(x)} = \frac{d}{ds}\tilde{f}(s)$$

összefüggés is. A Fourier-transzformáció tehát a deriválás műveletét egy számmal (változóval) való szorzásra vezeti vissza, ily módon bizonyos differenciálegyenletek algebrai egyenletekké alakíthatók át. Ez az eljárás nagyon hasonló Heaviside intuitív operátor-kalkulusához, annak mintegy szigorú megalapozását jelenti. Ezzel a kérdéssel még részletesebben fogunk foglalkozni az alkalmazásoknál.

A fentiek nyilvánvaló általánosítása

$$\widetilde{P\left(\frac{d}{dx}\right) f} = P(-is)\,\tilde{f}(s);\ \widetilde{P(ix)\,f(x)} = P\left(\frac{d}{ds}\right)\tilde{f}(s),$$

ahol P egy tetszőleges polinom.

Többváltozós disztribúciók parciális deriváltja Fourier-transzformáció során a megfelelő változóval szorzott disztribúcióba megy át:

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)} = -is_k\,\tilde{f}(s_1, s_2, \ldots, s_N),$$

illetve

$$\widetilde{ix_k f}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\partial}{\partial s_k}\tilde{f}(s_1, s_2, \ldots, s_N).$$

Ezek az összefüggések lehetőséget adnak arra, hogy parciális differenciálegyenleteket közönséges differenciálegyenletekre, illetve algebrai egyenletekre vezessünk vissza.

<u>e) Konvolució Fourier-transzformáltja</u>

Ha az f(x) és a g(x) függvényeknek létezik a konvolúciója

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y),$$

továbbá f és g Fourier-transzformálható, akkor $f * g$-nek is létezik a Fourier-transzformáltja, méghozzá

$$\widetilde{f*g}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{isx}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,f(y)\,g(x-y)=$$

$$=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,e^{isx'}\,g\left(x'\right)\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{isy}\,f(y)\right\}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(s)\,\tilde{g}(s).$$

A Fourier-transzformálás után a "*" művelete közönséges szorzássá vált (egy triviális $\sqrt{2\pi}$ faktortól eltekintve). Ez nagyon hasznos például konvolúciós típusú integrálegyenleteknél (ld. például a 2.5. pontban ismertetett Abel-féle problémát).

Próbáljuk meg átvinni a fenti összefüggést disztribúciókra is! Korlátlanul nyilvánvalóan nem lehet érvényes az

$$\widetilde{f*g}=\sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(s)\,\tilde{g}(s).$$

összefüggés, hiszen maga a konvolúció művelete sem végezhető el akármilyen két disztribúcióra, másrészt a jobb oldalon szereplő $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ disztribúció-szorzat sincs általában értelmezve.

Tegyük fel, hogy g(x) olyan disztribúció, melynek $\tilde{g}(s)$ Fourier-transzformáltja egy analitikus egész függvény, melyre teljesül a

$$\left|\tilde{g}(s)\right|\le\gamma e^{\beta|\mathrm{Im}s|}\left(1+|s|\right)^{\alpha}$$

egyenlőtlenség valamilyen α, β, γ számokkal. Ez az egyenlőtlenség (amely szerint $\tilde{g}(s)$ a valós tengelyen legfeljebb hatványként, a képzetes tengely mentén pedig legfeljebb exponenciálisként növekszik) azt garantálja, hogy bármely $\varphi(s)\in Z$ próbafüggvényre $\tilde{g}(s)\cdot\varphi(s)\in Z$ is teljesül és így értelmezhető az $\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s)$ szorzat:

$$\left\langle\varphi(s)\;,\;\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s)\right\rangle\overset{\text{def.}}{=}\left\langle\tilde{g}(s)\cdot\varphi(s)\;,\;\tilde{f}(s)\right\rangle;\varphi(s)\in Z.$$

Nézzük ezek után az f * g Fourier-transzformálját

$$\left\langle\varphi(s)\;,\;\widetilde{f*g}\right\rangle=\left\langle\tilde{g}(s)\cdot\varphi(s)\;,\;f*g\right\rangle=\left\langle\left\langle\tilde{\varphi}\left(x+\xi\right)\;,\;g\left(\xi\right)\right\rangle\;,\;f(x)\right\rangle.$$

Vizsgáljuk meg a

$$\psi(x)\equiv\left\langle\tilde{\varphi}\left(x+\xi\right)\;,\;g\left(\xi\right)\right\rangle$$

függvényt! Mivel

$$\tilde{\varphi}\left(x+\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\varphi(s)\,e^{is\left(x+\xi\right)}=\widetilde{\left[e^{isx}\,\varphi(s)\right]}\left(\xi\right),$$

$$\psi(x)=\left\langle\widetilde{e^{isx}\,\varphi(s)}\;,\;g\right\rangle=\left\langle e^{isx}\,\varphi(s)\;,\;\tilde{g}(s)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}ds\;\tilde{g}(s)\,\varphi(s)\,e^{isx}=\sqrt{2\pi}\;\widetilde{\left[\varphi(s)\,\tilde{g}(s)\right]}(x),$$

ezért $\varphi(s)\,\tilde{g}(s)\in Z$ miatt $\psi(x)\in\mathcal{D}$. A konvolúció tehát elvégezhető és

$$\left\langle\varphi(s)\;,\;\widetilde{f*g}\right\rangle=\sqrt{2\pi}\left\langle\widetilde{\varphi(s)\,\tilde{g}(s)}\,,\,f\right\rangle=\sqrt{2\pi}\left\langle\varphi(s)\,\tilde{g}(s)\;,\;\tilde{f}(s)\right\rangle=\sqrt{2\pi}\left\langle\varphi\,,\,\tilde{f}\cdot\tilde{g}\right\rangle.$$

Így tehát az említett tulajdonságokkal rendelkező g (vagy szimmetrikusan, az ilyen tulajdonságú f) esetén

$$\widetilde{f(x)*g(x)}=\sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s).$$

Hasonlóan látható be, hogy egy akárhányszor deriválható f(x), (vagy fordítva, akárhányszor deriválható g(x)) esetén

$$\sqrt{2\pi}\;\widetilde{f(x)\,g(x)}=\tilde{f}*\tilde{g}.$$

FE LADATOK:

2.9.1. Oldjuk meg a Fourier-transzformáció segítségével az Abel-féle problémát (lásd 2.5. fejezetet!)

2.9.2. Egy f disztribúció komplex konjugáltját az

$$\langle \varphi, \bar{f} \rangle = \overline{\langle \bar{\varphi}, f \rangle}$$

összefüggés definiálja. Mutassuk meg, hogy

$$\widetilde{\bar{f}(x)} = \overline{\widetilde{f(-x)}}\,!$$

Bontsuk fel f-et valós és képzetes részekre, ezeket pedig páros és páratlan részekre! Mit állíthatunk az egyes tagok Fourier-transzformáltjáról?

III. A DISZTRIBÚCIÓELMÉLET ALKALMAZÁSAI

3.1 Állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldása

A bevezetőben megismerkedtünk Heaviside intuitív operátor-kalkulusának alapgondolatával: a differenciálás műveletét egy D "szimbólummal" való szorzással helyettesítettük és úgy számoltunk D-vel, mintha közönséges szám lenne. A Fourier-transzformáció tulajdonképpen ugyanezt teszi lehetővé - hiszen érvényes a $\widetilde{f'(x)} = (-is)\cdot\widetilde{f(x)}$ összefüggés - de pontosan definiált körülmények között, mellőzve az operátor-kalkulus bizonytalan pontjait.

Oldjuk meg a bevezetőben vizsgált

$$y'(x) + y(x) = 3x^2 - 2x + 5 \left[\equiv f(x)\right]$$

differenciálegyenletet! Tekintsük y(x)-t $\mathcal{D}'$-beli disztribúciónak és képezzük az egyenlet Fourier-transzformáltját

$$(-is)\,\tilde{y}(s) + \tilde{y}(s) = \tilde{f}(s),$$
$$(1 - is)\,\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s).$$

Innen az $\tilde{y}(s) \in Z'$ disztribúció kifejezhető; a legáltalánosabb megoldás (lásd a 2.2.4. és 2.3.8. feladatok megoldását):

$$\tilde{y}(s) = \alpha\delta(1 - is) + \frac{1}{1 - is}\tilde{f}(s),$$

ahol α egy tetszőleges állandó. Rögtön megmutatkozott annak az előnye, hogy $\tilde{y}(s)$-t disztribúciónak tekintettük, hiszen a függvények körében $(1 - is)\,\tilde{y}(s) = \tilde{f}(s)$-ből csak $\tilde{y} = \dfrac{\tilde{f}}{1 - is}$ következne, ami nyilván csak egy partikuláris megoldás Fourier-transzformáltja lehet.

A Heaviside-módszernek megfelelő következő lépés az, hogy sorbafejtjük s szerint és kihasználjuk, hogy

$$(-is)^n\,\tilde{f}(s) = \widetilde{\frac{d^n}{dx^n}f(x)}.$$

Tehát

$$\frac{1}{1 - is}\tilde{f}(s) = \left[1 - (-is) + (-is)^2 - (-is)^3 + \ldots\right]\tilde{f}(s) = \widetilde{\left[f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \ldots\right]}(s)$$

A sorfejtés azonban csak |s| < 1 -re konvergens, nekünk pedig - a visszatranszformáláshoz - minden s-re elő kell állítanunk $\tilde{y}(s)$-t. Pontosan ez mutatja a Heaviside-módszer alkalmazhatóságának korlátait.

Amennyiben az f(x) inhomogén tag egy polinom, úgy $\tilde{f}(s)$ a Dirac-delta és véges rendű deriváltjaiból álló lineáris kombináció. Ilyenkor $\tilde{f}(s)$ tartója az s = 0 pont, emiatt megengedett a sorfejtés. Az idézett példában

$$\tilde{y}(s) = \alpha\delta(1 - is) + \widetilde{\left(3x^2 - 2x + 5\right)} - \widetilde{\left(3x^2 - 2x + 5\right)'} + \widetilde{\left(3x^2 - 2x + 5\right)''} - \ldots,$$

$$\tilde{y}(s) = \beta\cdot\widetilde{e^{-x}} + \widetilde{3x^2 - 8x + 13},$$

$$\tilde{y}(x) = \beta e^{-x} + 3x^2 - 8x + 13 \quad (\beta = \text{állandó})\cdot$$

Ez valóban megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, méghozzá az általános megoldása.

Ha nem akarunk a sorfejtés konvergencia-problémáiba belebonyolódni, számolhatunk közvetlenül, sorbafejtés nélkül is:

$$\widetilde{\left(3x^2-2x+5\right)}=\left[-3\delta''(s)+2i\delta'(s)+5\delta(s)\right]\cdot\sqrt{2\pi},$$

továbbá egy akárhányszor deriválható (és a végtelenben legfeljebb polinomként növekvő) g(s) függvényre

$$g(s)\,\delta(s)=g(0)\,\delta(s),$$
$$g(s)\,\delta'(s)=g(0)\,\delta'(s)-g'(0)\,\delta(s)$$
$$g(s)\,\delta''(s)=g(0)\,\delta''(s)-g'(s)\,\delta'(s)+g''(0)\,\delta(s)$$
$$\text{stb}.$$

Az $\frac{1}{1-is}$ függvény megfelelő deriváltjaiból adódik, hogy

$$\tilde{y}(s)=\alpha\delta(1-is)+\sqrt{2\pi}\left[\frac{-3}{1-is}\delta''(s)+\frac{2i}{1-is}\delta'(s)+\frac{5}{1-is}\delta(s)\right]=$$
$$=\alpha\delta(1-is)+\sqrt{2\pi}\left[-2\delta''(s)+8i\delta'(s)+13\delta(s)\right],$$

ahonnan inverz Fourier-transzformációval

$$y(x)=\cdot\,\beta e^{-x}+3x^2-8x+13.$$

Tekintsünk most egy olyan esetet, melynél a Heaviside-módszer nem alkalmazható, de a Fourier-transzformáció igen! Legyen ismét a megoldandó egyenlet

$$y'(x)+y(x)=f(x),$$

de az inhomogén tag most nem egy polinom, hanem

$$f(x)=\sin 2x.$$

A formális operátor-kalkulus szerint

$$(1+D)\,y(x)=\sin 2x,$$

$$y(x)=\frac{1}{1+D}\sin 2x=\left(1-D+D^2-D^3+\ldots\right)\sin 2x=(\sin 2x-2\cos 2x)\left[1-4+16-\ldots+(-4)^k+\ldots\right]$$

A [ ]-ben álló sor azonban divergens, az eredmény értelmetlen! Az eredeti egyenlet Fourier-transzformaltja

$$(1-is)\,\tilde{y}(s)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-2)-\delta(s+2)\right]$$

ahonnan

$$\tilde{y}(s)=\alpha\delta(1-is)+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{1-2i}\delta(s-2)-\frac{1}{1-is}\delta(s+2)\right\}=$$
$$=\alpha\delta(1-is)+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{1-2i}\delta(s-2)-\frac{1}{1+is}\delta(s+2)\right\}.$$

Látható, hogy a delta-disztribúciók miatt az $\frac{1}{1-is}$ függvénynek csupán az s = ±2 pontjai lényegesek, ezekben viszont az $\frac{1}{1-is}$ függvényt <u>nem</u> állítja elő a Taylor-sora!

A visszatranszformálás eredménye

$$y(x)=\beta e^{-x}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-2i}e^{-2ix}-\frac{1}{1+2i}e^{+2ix}\right\}=\beta e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{2}{5}\cos 2x,$$

és ez valóban a vizsgált egyenlet általános megoldása.

Foglaljuk össze az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldásának fentebb ismertetett módszerét:

ÖSSZEFOGLALÁS: Keressük a $P_n\left(\frac{d}{dx}\right)y(x)=f(x)$ egyenlet megoldását.

1. Képezzük az egyenlet Fourier-transzformáltját:

$$P_n(-is)\,\tilde{y}(s)=\tilde{f}(s).$$

2. Meghatározzuk a P_n polinom $-is_k (k=l,2,...,n)$ gyökeit.
3. A Fourier-transzformált egyenlet általános megoldása

$$\tilde{y}(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta(s - s_k) + \frac{\tilde{f}(s)}{P_n(-is)}$$

(Amennyiben P_n-nek többszörös gyökei is vannak, pl. s_k, m-szeres gyök, úgy $\delta(s - s_k)$ mellett ennek deriváltjai is fellépnek - tetszőleges együtthatókkal - egészen az (m-l)-ik deriváltig bezáróan.)

4. A visszatranszformálás megadja a vizsgált egyenlet általános megoldását:

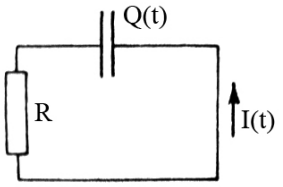
$$y(x) = \sum_k \beta_{ke}^{-is_k x} + F^{-1}\left(\frac{\tilde{f}(s)}{P_n(-is)}\right)(x)$$

(Ha s_k m-szeres gyök, úgy β_k helyébe egy (m-l)-ed fokú polinom kerül.)

A fizikai és műszaki alkalmazások között gyakran előfordul, hogy egy differenciálegyenletnek adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldását keressük. Az ilyen eseteket <u>kezdetiérték-problémának</u> nevezzük.

Jelöljük a független változót (az időt) t-vel és írjunk elő kezdeti feltételeket a t = 0 pillanatra! Ha a probléma differenciálegyenlete n-ed rendű, akkor tetszés szerint megadhatjuk - és meg is kell adjuk - az $y(0), y'(0),...,y^{(n-1)}(0)$ értékeket.

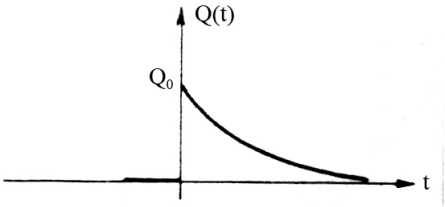
Tekintsük például egy C kapacitású kondenzátor kisülését egy R ellenálláson keresztül! A kondenzátor töltésének időbeli változását leíró egyenletet:



31. ábra

$$R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = 0,$$
$$Q(t=0) = Q_0 .$$

Minket a megoldás t > 0-ra érdekel, de sok szempontból kényelmes a teljes $-\infty < t < \infty$ intervallumot vizsgálni. Önkényesen előírhatjuk, hogy t < 0-ra Q(t) = 0 teljesüljön, hiszen ez is kielégíti a differenciálegyenletet. Ha azt akarjuk, hogy a t = 0 időpillanatbeli Q_0 nagyságú ugrásról is számot adjon a differenciálegyenlet (és ne csak a t < 0, illetve t > 0 nyílt intervallumokon teljesüljön), akkor a



32. kép

$$Q'(t) + \frac{1}{RC}Q(t) = Q_0 \cdot \delta(t)$$

egyenletet kell vizsgálnunk. Fizikailag ez annak felel meg, hogy figyelembe vesszük a Q töltést szállító "végtelenül rövid" áramimpulzust.

Képezzük az egyenlet Fourier-transzformáltját:

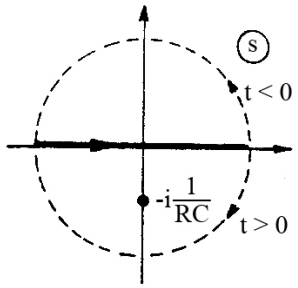
$$\left(-is + \frac{1}{RC}\right)\tilde{Q}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Q_0$$

Mivel a keresett megoldás $t \to +\infty$ és $t \to -\infty$ -re egyaránt nullához tart, kereshetjük Q(t)-t az S´-beli disztribúciók körében. Emiatt a megoldás egyszerűen

$$\tilde{Q}(s) = \frac{iQ_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{s + \frac{i}{RC}}$$

és nem szükséges, hogy egy $\delta\left(s + \frac{i}{RC}\right)$-val arányos tagot is hozzáadjuk a megoldáshoz, hiszen ez nem eleme S´-nek! A visszatranszformálás közvetlenül elvégezhető a Cauchy-tétel felhasználásával:

$$Q(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\text{fenti félkör}} ds\,\widetilde{Q}(s)e^{-ist}\equiv 0, & \text{ha } t<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\text{lenti félkör}} ds\,\widetilde{Q}(s)e^{-ist}=Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, & \text{ha } t>0. \end{cases}$$

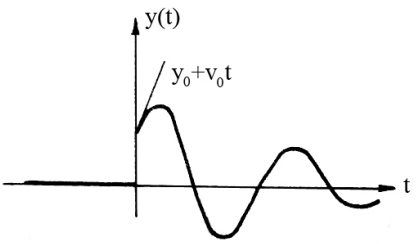


33. ábra

(Kihasználtuk, hogy a félkörívek járuléka nullához tart, ha a sugárral végtelenhez tartunk.)

A fentebbi módszernek az az előnye, hogy maga a differenciálegyenlet tartalmazza a kezdeti feltételeket is, és nincs szükség arra, hogy a megoldást utólag illesszük ezekhez.

Nézzünk most egy másodrendű egyenletet, egy csillapított rezgőmozgást végző test mozgását. A mozgásegyenlet



34. ábra

$$y''(t)+\lambda y'(t)+ky(t)=0 \quad (t>0)$$

(λ és k pozitív állandók), a kezdeti feltételek pedig:

$$y(t=0)=y_0;\ y'(t=0)=v_0.$$

Ismét az $y(t<0)\equiv 0$ kiterjesztéssel és a kezdőfeltételek figyelembevételével:

$$y''+\lambda y'+ky=y_0\delta'(t)+\left(v_0+\lambda y_0\right)\delta(t)$$

A jobb oldal valóban azt írja le, hogy a függvénynek y_0-nyi, a deriváltjának pedig v_0-nyi ugrása van az origóban, hiszen:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda\frac{d}{dt}\right)\left[\Theta(t)\left(y_0+v_0t\right)\right]=\Theta''\left(y_0+v_0t\right)+2\Theta'\left(v_0t+y_0\right)'+\lambda\Theta'\left(y_0+v_0t\right)+\lambda\Theta(t)\left(v_0t+y_0\right)'=$$

$$=y_0\ \delta'-v_0\ \delta+2\delta v_0+\lambda y_0\delta+\lambda v_0\Theta=y_0\delta'+\left(v_0+\lambda y_0\right)\delta+\left[t=0-\text{nál reguláris tagok}\right].$$

(A fentiekben kihasználtuk a

$$\Theta'=\delta,$$

$$f(t)\delta=f(0)\delta \quad \text{és a} \quad f(t)\delta'=f(0)\delta'-f'(0)\delta$$

disztribúció azonosságokat.)

A megoldandó differenciálegyenlet Fourier-transzformáltja:

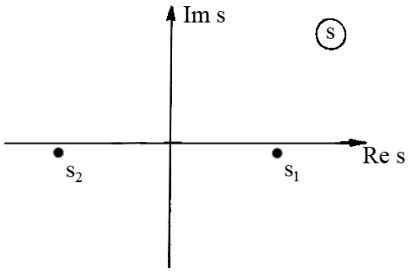
$$\left(-s^2-\lambda s+k\right)\tilde{y}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(v_0+\lambda y_0\right)-isy_0\right],$$

ahonnan

$$\tilde{y}(s)=\frac{1}{2\pi}\frac{isy_0-\left(v_0+\lambda y_0\right)}{(s-s_1)(s-s_2)}.$$

A nevező zérushelyei az $s^2+i\lambda s-k=0$ egyenlet gyökei:

$$s_{1,2}=-i\frac{\lambda}{2}\pm\sqrt{k-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$



35. ábra

Figyeljük meg, hogy mindkét gyök az alsó félsíkon, a képzetes tengelyre szimmetrikusan helyezkedik el (ez még akkor is igaz, ha $k<\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$, de most feltételezzük, hogy a csillapítás nem túl nagy, ezért $k>\frac{\lambda^2}{4}$ teljesül.)

Jelöljük Re s_1-t ω-val, Im s_1-t pedig $-\gamma$-val:

$$\omega = \sqrt{k - \left(\frac{\lambda}{s}\right)^2}\ ;\ \gamma = \frac{\lambda}{2}.$$

Ekkor

$$\tilde{y}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{isy_0 - \left(v_0 + \lambda y_0\right)}{\left(s - \omega + i\gamma\right)\left(s + \omega + i\gamma\right)},$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-ist} \frac{isy_0 - v_0 - \lambda y_0}{\left(s - \omega + i\gamma\right)\left(s + \omega + i\gamma\right)}.$$

Ha $t < 0$, akkor a felső félsíkon egy nagy félkörrel lezárhatjuk az integrációs utat és a Cauchy-tétel értelmében nullát kapunk, hiszen a felső félsíkon $\tilde{y}(s)$ analitikus. Pozitív időkre az alsó félsíkon zárható az integrációs görbe és

$$y(t) = -2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{2\pi} e^{-ist} \frac{isy_0 - \left(v_0 + \gamma y_0\right)}{\left(s - \omega + i\gamma\right)\left(s + \omega + i\gamma\right)}\right] =$$

$$= \left[e^{-ist} \frac{y_0 s + i\left(v_0 + 2\gamma y_0\right)}{s + \omega + i\gamma}\right]_{s = \omega - i\gamma} + \left[e^{-ist} \frac{y_0 s + i\left(v_0 + 2\gamma y_0\right)}{s - \omega + i\gamma}\right]_{s = -\omega - i\gamma} =$$

$$= \left\{y_0 \cos - o\, t + \frac{v_0 + \gamma y_0}{\omega} \sin\omega t\right\} \cdot e^{-\gamma t}$$

Ez a függvény valóban kielégíti a differenciálegyenletet és a kezdeti feltételeknek is eleget tesz.

A fentebbi módszer általánosítható inhomogén differenciálegyenletekre is, feltéve, hogy az inhomogén tag csak $t > 0$-ra különbözik nullától.

A megoldás menete a következő:

ÖSSZEFOGLALÁS:

1. Az ismeretlen függvényt $y(t < 0) = 0$ módon kiterjesztjük a teljes $-\infty < t < \infty$ időtengelyre.
2. Mivel $t \approx 0$ -ra $y(t) = -\Theta(t)\left[y_0 + y_1 t + \ldots + y_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]$ a $P_n\left(\frac{d}{dt}\right)$ differenciáloperátor erre hatva $\delta(t), \delta'(t), \ldots, \delta^{n-1}(t)$ valamilyen lineáris kombinációját állítja elő. Ezzel a lineáris kombinációval kiegészítjük a differenciálegyenlet jobb oldalát:
$$P_n\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = \Theta(t) \cdot f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot \delta^{(k)}(t).$$
3. Képezzük az egyenlet Fourier-transzformáltját
$$P_n(-is)\tilde{y}(s) = \widetilde{\Theta(t) \cdot f(t)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot (-is)^k.$$
4. Kifejezzük az $\tilde{y}(s)$ függvényt és elvégezzük az inverz Fourier-transzformációt:
$$y(t) = F^{-1}\left\{\frac{\widetilde{\Theta(t) f(t)}}{P_n(-is)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sum_k C_k \cdot (-is)^k}{P_n(-is)}\right\}.$$

FELADATOK:

3.1.1. Egy ω_0 sajátfrekvenciájú, γ csillapítású, kezdetben nyugalomban levő harmonikus oszcillátort $F(t) = F_0 \cdot \Theta(t) \cdot \sin \omega t$ erővel gerjeszteni kezdjük. Hogyan mozog?

3.1.2. Egy m tömegű tömegpont $t = 0$ –kor az y_0 helyen található és v_0 sebességgel mozog. A testre $F_0 \cdot e^{-\alpha t}$ nagyságú erő hat. Írjuk le a mozgást!

3.2 Függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása Laplace-módszerrel

Fourier-transzformációval nemcsak állandó együtthatójú differenciálegyenleteket oldhatunk meg, hanem bizonyos típusú függvényegyütthatós egyenleteket is.

Tekintsük például a

$$\sum_{m=0}^{n}\left(a_m + b_{mx} + \ldots + p_m x^k\right)\frac{d^{my}(x)}{dx^m} = 0$$

egyenletet, amely n-ed rendű és az együtthatók k-ad fokú polinomok. Az egyenlet Fourier-transzformálás után az

$$\widetilde{ixf(x)} = \frac{d}{ds}\tilde{f}(s) \text{ és } \widetilde{\frac{df(x)}{dx}} = (-is)\tilde{f}(s)$$

azonosságok felhasználásával

$$\sum_{m=0}^{n}\left[a_m + b_m(-is) + \ldots + p_m\left(-i\frac{d}{ds}\right)^k\right]\left[(-is)^m\tilde{y}(s)\right] = 0$$

alakú lesz. Ez ugyanolyan struktúrájú, mint az eredeti egyenlet, de a rendje n helyett k, az együtthatók fokszáma pedig k helyett n. Amennyiben k < n, úgy az egyenletet a Fourier-transzformáció egy alacsonyabb rendű differenciálegyenletté alakítja át, amit általában könnyebb megoldani, mint az eredetit.

Laplace-féle differenciálegyenletnek nevezzük a k = 1 esetet, vagyis amikor az együtthatók legfeljebb elsőfokú polinomok:

$$\sum_{m=0}^{n}\left(a_m + b_m x\right)\frac{d^m y}{dx^m} = 0.$$

A Fourier-transzformáció ezt az egyenletet egy elsőrendű differenciálegyenletbe viszi át, ami kvadratúrával megoldható:

$$P(-is)\tilde{y}(s) - i\frac{d}{ds}\left[Q(-is)\tilde{y}(s)\right] = 0\,,\ \left(\text{ahol } P(z) \equiv \sum_{m=0}^{n} a_m z^m;\ Q(z) \equiv \sum_{m=0}^{n} b_m z^m.\right)$$

$$\tilde{y}(s)\left[P(-is) - i\frac{d}{ds}Q(-is)\right] = iQ(-is)\cdot\frac{d\tilde{y}(s)}{ds}\,,$$

$$\frac{d}{ds}\left(\ln\tilde{y}\right) = -\frac{d}{ds}\ln Q(-is) - i\frac{P(-is)}{Q(-is)}\,,$$

$$\tilde{y}(s) = \text{állandó}\cdot\frac{1}{Q(-is)}\cdot e^{-i\int\frac{P(-is')}{Q(-is')}ds'}$$

$$y(x) = \text{állandó}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-isx}\frac{1}{Q(-is)}\cdot e^{-i\int\frac{P(-is')}{Q(is')}ds'}\,.$$

Vezessük be s helyett a t = -is új integrációs változót, ezzel

$$y(x) = \text{állandó}\cdot\int_{-i\infty}^{i\infty} dt\, e^{xt}\frac{1}{Q(t)}e^{\int dt\frac{P(t)}{Q(t)}}\,.$$

Első pillanatra furcsának tűnhet, hogy egy n-ed rendű differenciálegyenletet - melynek általában n lineárisan független megoldása lehet - sikerült visszavezetnünk egy elsőrendű egyenletre, melynek viszont csupán egyetlen szabadon választható integrációs állandója van.

Kövessük nyomon egy egyszerű példán, hogy hol "vesztettünk el" megoldásokat a Fourier-transzformáció során! Tekintsük az

$$y''(x) + 2xy'(x) = 0$$

másodrendű egyenletet, melynek két lineárisan független megoldása elemi után is meghatározható: A Fourier-transzformációval nyert megoldás

$$y_1(x) \equiv 1 \ ,$$

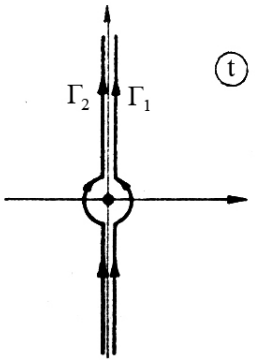
$$y_2(x) = \int_0^x dx' \left(e^{-x'}\right)^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erf}(x)$$

A Fourier-transzformációval nyert megoldás

$$P(t) \equiv t^2 \ ; \quad Q(t) \equiv 3t \ ;$$

$$y(x) = \text{állandó} \cdot \int_{-i\infty}^{i\infty} dt\, e^{xt + \frac{t^2}{4}} \frac{1}{t} \cdot$$

Az integrandusnak, mint a komplex t változó függvényének az origóban pólusa van. Emiatt y(x) fenti integrál előállítása csak azután lesz értelmes, ha előírjuk, hogy a pólust melyik oldalról kell megkerülje a Γ integrációs görbe. Csupán két lehetőségünk van: vagy balról (Γ_2), vagy pedig jobbról (Γ_1) kerüljük meg a pólust. Könnyen belátható, hogy a kétféle választás két lineárisan független megoldásra vezet. Számítsuk ki ugyanis Γ_1 és Γ_2 összegére, illetve különbségére vett integrálokat:



36. ábra

$$y_{II}(x) = \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} dt \frac{1}{t} e^{xt + \frac{t^2}{4}} = 2\mathbb{P} \int_{-i\infty}^{i\infty} dt \frac{1}{t} e^{xt + \frac{t^2}{4}}$$

Ez az integrál x = 0-nál szimmetria-okokból eltűnik, a deriváltja pedig

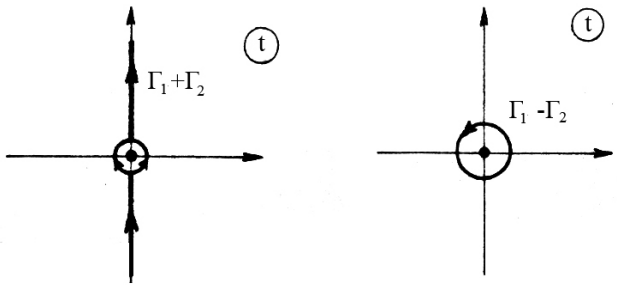
$$\frac{dy_{II}}{dx} = 2 \int_{-i\infty}^{i\infty} dt\, e^{xt + \frac{t^2}{4}} = -4i\sqrt{\pi}\, e^{-x^2} \ ,$$

tehát

$$y_{II}(x) = -4i\sqrt{\pi} \int_0^x \left(e^{-x'}\right)^2 dx' \equiv \text{állandó} \cdot y_2(x) \ .$$

Másrészt

$$y_I(x) = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} dt \frac{1}{t} e^{xt + \frac{t^2}{4}} \equiv 2\pi i = \text{állandó} \cdot y_1(x) \ .$$



37. ábra

Azt látjuk tehát, hogy az eredeti differenciálegyenlet különböző megoldásait úgy kaphatjuk meg, hogy a Fourier-transzformált $\tilde{y}(s = it)$ függvényt (amely egy triviális szorzófaktortól eltekintve egyértelműen meg van határozva) különböző Γ görbén integrálva transzformáljuk vissza.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a Fourier-transzformációt és annak eredményeként kapott differenciálegyenletet körültekintően (értsd: disztribúció-értelemben) kezeljük. Az idézett

$$y''(x) + 2xy'(x) = 0$$

egyenlet Fourier-transzformáltja

$$-s^2\,\tilde{y}(s) - 2\,\frac{d}{ds}\left[s\,\tilde{y}(x)\right] = 0\ ,$$

ahonnan

$$s\,\tilde{y}(s) = C\cdot e^{-\frac{s^2}{4}} \qquad (C = \text{állandó})$$

A $C \neq 0$ választás megfelel az $y(x) = \text{állandó}\cdot\int_0^x \left(e^{-x'}\right)^2 dx'$ megoldásnak. A C = 0 eset $s\,\tilde{y}(s) = 0$-ra vezet, melyet - ha $\tilde{y}(s)$-t függvénynek tekintjük - el kell dobjunk, hiszen az az y(s) = 0, tehát y(x) ≡ 0 triviális megoldásnak felel meg. Nem ez a helyzet azonban a disztribúciók körében, hiszen $s\,\tilde{y}(s) = 0$-ból $\tilde{y}(s)$= állandó · δ(s), vagyis y(x) = állandó következik ami éppen az egyik megoldás.

A fenti gondolatmenet arra hívja fel a figyelmet, hogy a Fourier-transzformációs módszerrel csak úgy kapjuk meg egy differenciálegyenlet valamennyi megoldását, ha $\tilde{y}(s)$-t disztribúciónak tekintjük. Egy disztribúció-differenciálegyenlet megoldása azonban nehezebb (vagy legalábbis szokatlanabb), mint egy függvényre vonatkozó differenciálegyenleté.
Emiatt nagyon hasznos, hogy a Z′-beli szinguláris disztribúciók is felírhatok a következő alakban

$$\left\langle \varphi(s)\ ,\ \tilde{y}\right\rangle = \int_\Gamma \varphi(s)\,\tilde{y}(s)\,ds\ ,$$

ahol $\tilde{y}(s)$ egy analitikus függvény, Γ pedig valamilyen (véges, vagy végtelen) görbe a komplex s síkon.

Kereshetjük tehát a

$$\sum_{m=0}^{n}\left(a_m + b_m\cdot x\right)\frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

Laplace-típusú differenciálegyenlet megoldását rögtön

$$y(x) = \int_\Gamma dt\, e^{xt}\, Z(t)$$

alakban. Ez kielégíti a differenciálegyenletet, ha

$$Z(t) = \frac{1}{Q(t)}\, e^{\int dt\,\frac{P(t)}{Q(t)}}\ ;\ \ P(t) = \sum a_m z^m\ ;\ \ Q(t) = \sum b_m t^m$$

és a parciális integrálás során megjelenő $e^{xt}Q(t)Z(t)$ kifejezés a görbe végpontjain ugyanazt az értéket veszi fel (ezt

$$\left[e^{xt}\,Q(t)\,Z(t)\right] = 0$$

módon jelöljük). Általában $\left[f(t)\right]_\Gamma = 0$ teljesüléséhez elegendő az, hogy f(t) eltűnjön a Γ görbe végpontjain, illetve zárt Γ esetén az, hogy f(t) egyértékű függvény legyen.

A fenti feltételeknek eleget tevő Z(t) függvény egy szorzótényezőtől eltekintve egyértelmű, Γ választásában azonban általában többféle lehetőségünk van. A vizsgált differenciálegyenlet lineárisan független megoldásai különböző Γ választással kaphatók meg.

ÖSSZEFOGLALÁS: A $\sum_{m=0}^{n}\left(a_m + b_m x\right)\frac{d^m y}{dx^m} = 0$ függvényegyütthatós homogén, lineáris (ún. Laplace-típusú) differenciálegyenlet megoldását az alábbi módon kaphatjuk meg (Laplace-módszer):

1. Keressük a megoldást

$$y(x) = \int_\Gamma e^{xt}\, Z(t)\, dt$$

komplex vonalintegrál alakban (Z(t) lényegében az $\tilde{y}(s)$ Fourier-transzformált függvény a t = -is helyen).

2. Bevezetjük a

$$P(t) \equiv \sum_m a_m t^m \; ; \; Q(t) = \sum_m b_m t^m$$

jelöléseket.

3. Ha az $e^{xt}Q(t)Z(t)$ mennyiség a Γ görbe végpontjai között nem változik, akkor a $Z(t)$ függvénynek ki kell elégítenie a

$$P(t)Z(t) - \frac{d}{dt}\left[Q(t)Z(t)\right] = 0$$

differenciálegyenletet. Ennek megoldása

$$Z(t) = \text{állandó} \cdot \frac{1}{Q(t)} e^{\int dt \frac{P(t)}{Q(t)}} .$$

4. Γ különböző választásaival megkaphatjuk az egyenlet különböző - lineárisan független - megoldásait.
5. Az

$$y(x) = \int_\Gamma e^{xt} Z(t)\, dt$$

integrált nyeregpont-módszerrel kiértékelve (lásd I. Függelék) általában $y(x)$ különböző aszimptotikus alakjait kaphatjuk meg.

Az alábbiakban néhány részletesen kidolgozott példán mutatjuk be a Laplace-módszer alkalmazását:

<u>1. példa:</u>

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0 \qquad \left(n = \text{valós állandó},\ n > -\frac{1}{2}\right)$$

Ez az ún. Hermite-féle differenciálegyenlet, amely Laplace-típusú, tehát alkalmazható rá a Laplace-módszer.

$$P(t) = t^2 + 2n ,$$
$$Q(t) = -2t ,$$

tehát

$$Z(t) = -\frac{1}{2t} \cdot e^{\int\left(-\frac{t}{2} - \frac{n}{t}\right)dt} = -\frac{1}{2t} e^{-\frac{t^2}{4} - n\ln t + \text{állandó}} = \text{állandó} \cdot \frac{1}{t^{n+1}} e^{-\frac{t^2}{4}} ;$$

$$y(x) = \text{állandó} \cdot \int_\Gamma e^{xt - \frac{t^2}{4}} \frac{dt}{t^{n+1}} .$$

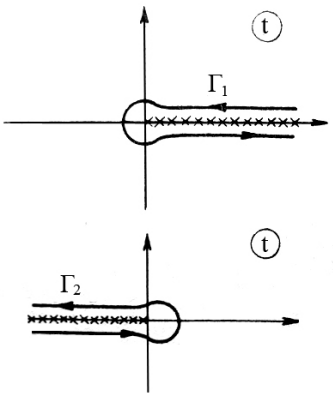
Az integrálást egy olyan Γ görbére kell elvégezzük, melyre

$$\left[\frac{1}{t^{n+1}} e^{-\frac{t^2}{4} + xt}\right]_\Gamma = 0$$

A valós tengely mentén $t \to \pm\infty$-re a szögletes zárójelben álló kifejezés nullához tart, emiatt az ábrán látható Γ_1 és Γ_2 görbék megfelelőek. (Az integrandusnak vágása indul az origóból minden $n \neq$ egész paraméterértéknél, és ez a vágás irányítható akár a pozitív, akár a negatív valós féltengely mentén.)

Könnyen belátható, hogy $y_{(\Gamma_2)}(x)$ $x \to \infty$-re e^{x^2}-ként végtelenhez tart, $y_{(\Gamma_1)}(x)$ pedig $x \to -\infty$ limeszben viselkedik e^{x^2}-ként. Fizikai alkalmazásokban (pl. egy harmonikus oszcillátor kvantummechanikai leírásánál) a Hermite-féle egyenletnek olyan megoldásait keressük, melyekre

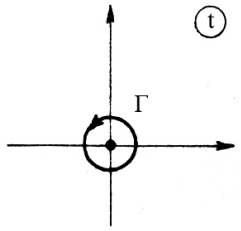
$$\lim_{|x| \to \infty} e^{-x^2} y(x) = 0 .$$



38. ábra

Ezt a feltételt (melyet a fentebbi megoldások egyike sem teljesíti)

csak akkor elégíthetjük; ki, ha n = egész. Ilyenkor ugyanis $\frac{1}{t^n} e^{xt-\frac{t^2}{4}}$ egyértékű függvény, tehát minden zárt görbe választható integrációs kontúrnak. A t = 0 pólust körbeintegrálva



39. ábra

$$y(x) = \text{állandó} \cdot \oint e^{xt-\frac{t^2}{4}} \frac{dt}{t^{n+1}} =$$

$$= \text{állandó} \cdot e^{x^2} \oint \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}} =$$

$$= \text{állandó} \cdot e^{+x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

megoldást kapjuk. Az arányossági tényezőt megállapodásszerűen $(-1)^n$-nek választva a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right) e^{-x^2}$$

Hermite-polinomokat kapjuk:

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} + \ldots$$

Ezek a polinomok az e^{-x^2} súlyfüggvénnyel teljes ortogonális függvényrendszert alkotnak az L^2 térben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right) \cdot \delta_{nm}$$

<u>2. példa:</u> Egy homogén erőtérben mozgó részecske Schrödinger-egyenlete és egyéb fizikai problémák differenciálegyenlete

$$y'' - xy = 0$$

alakra hozható. Ez az ún. Airy-féle differenciálegyenlet.

Mivel

$$P(t) = t^2,$$
$$Q(t) = -1,$$
$$Z(t) = e^{-\frac{t^3}{3} + \text{állandó}},$$

a megoldás

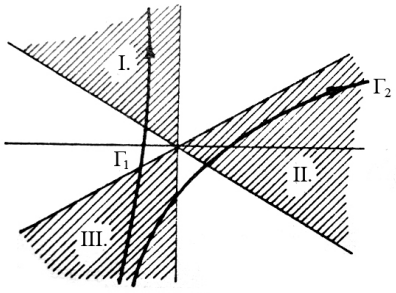
$$y(x) = \text{állandó} \cdot \int_{\Gamma} e^{xt-\frac{t^3}{3}} dt$$

A Γ görbét úgy kell megválasztanunk, hogy $\left[e^{xt-\frac{t^3}{3}}\right]_{\Gamma} = 0$ teljesüljön. Ez minden zárt görbére fennáll, viszont ilyenkor y(x) = 0 adódik, hiszen az integrandus egy egész-függvény. Így tehát Γ-nak a végtelenbe kell nyúlnia, méghozzá olyan irányban, amely mentén $e^{-\frac{t^3}{3}+xt}$ nullához tart. Mivel $|t| \to \infty$-re az integrandust $\frac{t^3}{3}$ dominálja és ez a függvény három szögtartományban (az ábrán a bevonalkázott I, II és III részek) - ahol $\mathrm{Re}(t^3) > 0$ - exponenciálisan eltűnik, ezek bármelyikéből bármelyik másikba vezethet az integrációs kontúr. Két független lehetőségünk van:

$$y_1(x) = \int_{\Gamma_1} e^{xt-\frac{t^3}{3}} dt, \text{ és}$$

$$y_2(x) = \int_{\Gamma_2} e^{xt-\frac{t^3}{3}} dt$$

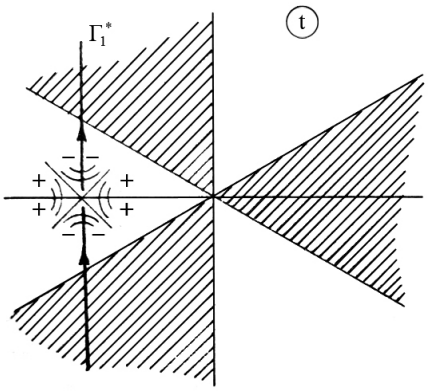
(Az I és II tartományokat összekötő görbére vett integrál már nem független Γ_1 és Γ_2-től, azok különbségeként állítható elő.)



40. ábra

A két megoldás közül $y_2(x)$-ről be lehet látni, hogy $x \to +\infty$-re túlságosan gyorsan ($e^{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}$ - szerint) növekszik, ezért fizikailag érdektelen. A továbbiakban csak $y_1(x)$-szel foglalkozunk. A Γ_1 görbét el lehet tolni a képzetes tengelybe. A normálás alkalmas választásával és a $t = iz$ jelöléssel az Airy-függvénynek nevezett megoldás
alakba irható.

Határozzuk meg az Airy-függvény aszimptotikus alakját nyeregpont-módszerrel (lásd I.Függelék). Az



41. ábra

$$f(x,t) \equiv xt - \frac{t^3}{3}$$

függvénynek $x > 0$ esetén a $t = \pm\sqrt{x}$ helyen van nyeregpontja és a leggyorsabb csökkenés iránya párhuzamos a képzetes tengellyel. $\Gamma_1 - t$ a $\operatorname{Re} t = -\sqrt{x}$ egyenesbe tolva és

$$f(x,t)\,|_{t=-\sqrt{x}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f''(x,t)\,|_{t=-\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} = -2A$$

figyelembevételével

$$\Phi(x \to +\infty) \sim \frac{1}{2x^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}}$$

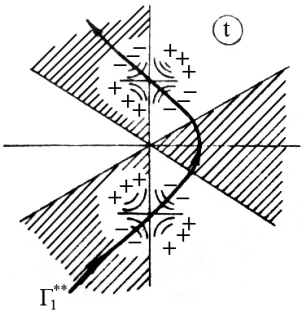
adódik.

Más a helyzet $x < 0$ esetén. Ekkor a kitevő stacionárius pontjai

$$t = \pm i\sqrt{|x|}$$

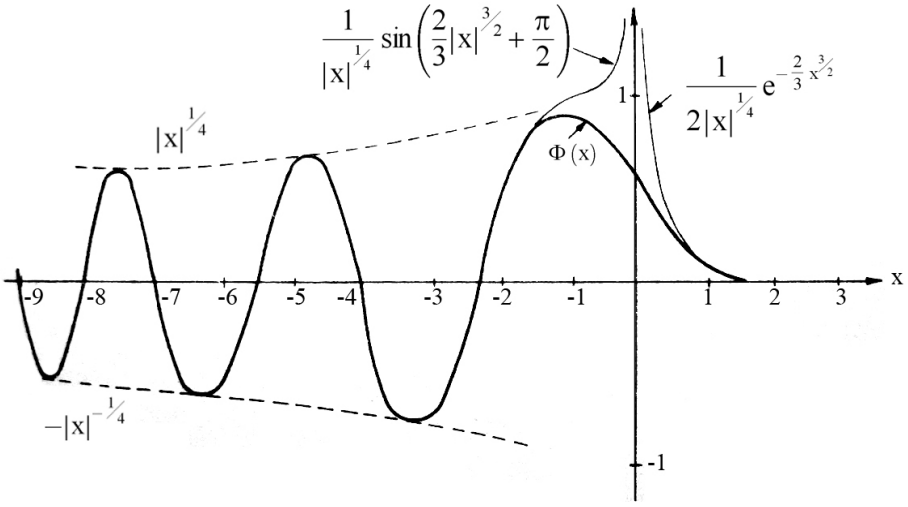
és a leggyorsabb csökkenés iránya 45°-os szöget zár be a képzetes tengellyel. Mindkét nyeregponton a megfelelő irányban halad keresztül a Γ^{**} görbe. E mentén integrálva a nyeregpontok járuléka

$$\Phi(x \to -\infty) \sim \frac{1}{|x|^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$



42. ábra

A két aszimptotikus alak az $x = 0$ pont kis környezetétől eltekintve jó közelítését adja az egzakt Airy-függvénynek:



43. ábra

<u>3. példa:</u> Befejezésül tekintsük a Bessel-féle differenciálegyenletet:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y(x) = 0\ .$$

Ez látszólag nem Laplace-típusú, de az

$$y(x) = x^n\, u(x)$$

helyettesítéssel

$$x u''(x) + (2n+1)\, u'(x) + x u(x) = 0$$

alakra hozható. Mivel

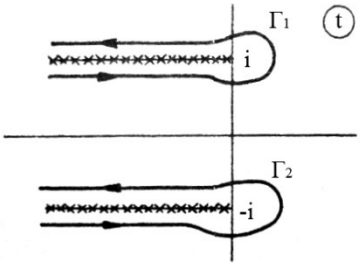
$$P(t) = (2n+1)\, t\,,$$

$$Q(t) = t^2 + 1\,,$$

$$Z(t) = \frac{1}{t^2+1}\, e^{\int \frac{(2n+1)\,t}{t^2+1}\,dt} = \text{állandó} \cdot \left(t^2+1\right)^{\frac{2n-1}{2}}\,,$$

így

$$u(x) = \text{állandó} \cdot \int_{\Gamma} e^{xt}\left(t^2+1\right)^{\frac{2n-1}{2}}\, dt$$



44. ábra

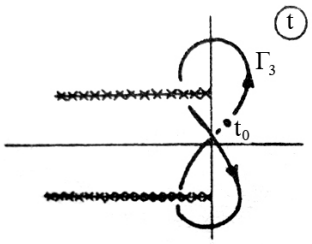
Az integrál alatti függvénynek vágásai indulnak a t = i és a t = -i pontokból. Ezeket a vágásokat a negatív valós tengellyel párhuzamosan irányítjuk. Az ábrán látható Γ_1 és Γ_2 görbék megfelelő integrációs utak, ha x > 0, hiszen

$$e^{xt}\, Q(t)\, Z(t) \equiv e^{xt}\left(t^2+1\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

a Γ görbék végeinél nullához tart.

Jelöljük a Γ_1, illetve a Γ_2-nek megfelelő megoldásokat $u_1(x)$, illetve $u_2(x)$-szel. Belátható, hogy ezek x = 0-nál nem regulárisak. Ha a Bessel-egyenletnek olyan megoldását akarjuk megkapni, amely az origóban véges, úgy u_1 és u_2 megfelelő lineáris kombinációját kell képezzük. Ezt közvetlenül is megkaphatjuk, ha nyolcas alakú görbét választjuk integrációs útnak. Ez megengedett, hiszen a vágásokon áthaladva - és analitikus folytatást képezve – az

$$e^{xt}(t+i)^{n+\frac{1}{2}}(t-i)^{n+\frac{1}{2}}$$



45. ábra

mennyiség egyszer $e^{2\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)}$, majd $e^{-2\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ értékkel szorzódik, tehát végül

$$\left[e^{xt}\left(t^2+1\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]_{\Gamma_3} = 0$$

Mivel Γ_3 véges görbe és az integrandus x-től analitikusan függ, így az

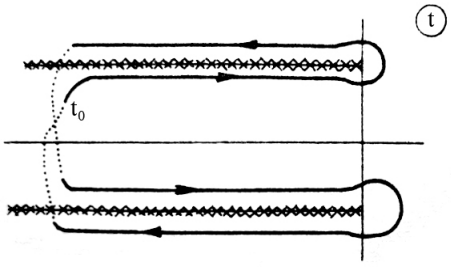
$$x^n\, u_3(x) = x^n \int_{\Gamma_3} e^{xt}\left(t^2+1\right)^{n-\frac{1}{2}}\, dt$$

függvény - amely megoldása a Bessel egyenletnek - x-nek analitikus egész függvénye.

Másrészt a Γ_3 görbe menti integrál független a t_0 kiindulási pont helyzetétől, így az akár a negatív végtelenbe is eltolható (a két vágás között). Ily módon:

$$\int_{\Gamma_3} (\cdots) = \int_{\Gamma_1} (\cdots) - e^{2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)} \int_{\Gamma_2} (\cdots)$$

$$u_3(x) = u_1(x) - e^{2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)}\, u_2(x)$$



46. ábra

A $H_n^{(i)}(x) = \text{állandó} \cdot x^n\, u_i(x)$ (i=1,2) függvényeket Hankel-függvényeknek nevezik, a

$$J_n(x) = \text{állandó} \cdot x^n\, u_3(x)$$

megoldást pedig Bessel-függvénynek. Ez utóbbi

$$J_n(x) = \text{állandó} \cdot x^n \int_{-i}^{i} \left(t^2+1\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{xt}\, dt$$

alakba is írható, ami $t = i\sin\varphi$ helyettesítéssel és alkalmas normálási állandó választással

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n}\varphi \cos\left(x\sin\varphi\right) d\varphi$$

alakra hozható.

A fentebbi integrál-előállításokból kényelmesen le lehet olvasni a Hankel- és a Bessel-függvények aszimptotikus sorfejtését.

FELADATOK:

3.2.1. A Bessel-függvények

$$J_n(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dz\, e^{i\left(x\cos z + nz - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

integrál-előállításából kiindulva - a nyeregpont módszer felhasználásával határozzuk meg $J_n(an)$ $n \to \infty$-beli aszimptotikus alakját! ($a \geq l$)

3.2.2. Oldjuk meg Laplace-módszerrel az

$$xy''(x) + (\gamma - x)\, y'(x) - \alpha y(x) = 0$$

elfajult hipergeometrikus differenciálegyenletet! Milyen α paraméterértékek mellett van az egyenletnek polinom alakú megoldása?

3.2.3. Határozzuk meg a Hankel-függvények aszimptotikus sorának vezető tagját és ezek segítségével a Bessel-függvény $x \to \infty$-beli viselkedését!

3.3 A Green-függvény

Tekintsünk ismét egy inhomogén lineáris differenciálegyenletet:

$$\hat{D}\, y(x) = f(x)\ ,$$

$\hat{D}$ egy differenciálásokat is tartalmazó lineáris operátor, pl.

$$\hat{D} = P_n\left(\frac{d}{dx}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{d}{dx}\right)^k .$$

Az egyenlet megoldásához szükséges bizonyos határfeltételek, vagy kezdeti feltételek előírása. Ha pl. $f(x) \equiv 0$ $x < 0$-ra, akkor kereshetjük az $y(x < 0) \equiv 0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást. Ez fizikailag annak felel meg, hogy egy kezdetben nyugalomban levő rendszert $x = 0$ időpillanattól kezdve $f(x)$ "zavar", külső behatás "gerjeszteni" kezdi. Ha sikerül megtalálnunk annak a disztribúció-egyenletnek a megoldását, melyben az inhomogén tag egy Dirac-delta, és ez a megoldás az eredeti egyenlet kezdeti-, vagy határfeltételeinek is eleget tesz

$$\hat{D}\, G(x) = \delta(x)\ ,$$

akkor egyúttal az általános eset megoldása is a kezünkben van:

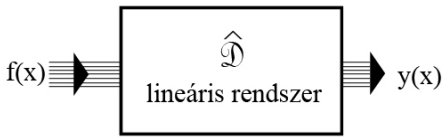
$$y(x) = G * f.$$

Valóban, mivel egy konvolúció deriválásánál elegendő az egyik "tényezőt" deriválni, így

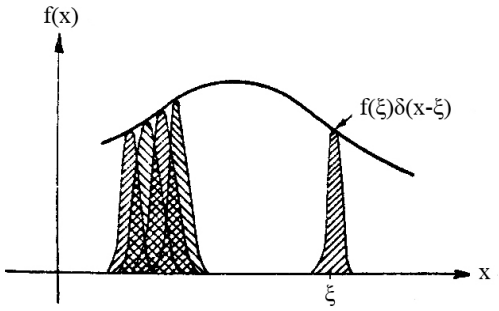
$$\hat{D}(G * f) = \left(\hat{D}\, G\right) * f = \delta * f = f(x).$$

DEFINÍCIÓ: A G(x) függvényt (reguláris disztribúciót) a $\hat{D}$ differenciáloperátor Green-függvényének, vagy másnéven alapmegoldásának nevezzük.

A Green-függvény szemléletes jelentése a következő. A lineáris operátor egy "lineáris rendszert" jellemez, amely az f(x) bemenő jelre y(x) kimenő jellel válaszol. (A lineáris rendszer lehet pl. egy elektromos áramkör, mely adott bementő feszültségre valamilyen lineáris módon - kimenő feszültséggel válaszol, de lehet a lineáris rendszer egy sok szabadsági fokú mechanikai vagy például optikai berendezés is.) Amennyiben meghatározzuk, hogy milyen választ ad a rendszer egy x = ξ "időpontbeli" egységnyi erősségű, de nagyon rövid (tűszerű) δ(x - ξ) bemenő jelre - ezt a választ jelöljük G(x - ξ)-vel, - akkor a rendszer linearitása miatt egy f(ξ) · δ(x - ξ) erősségű jelre adott válasz



47. ábra



48. ábra

$$f(\xi) \cdot G(x - \xi) ,$$

sok rövid jel összegére (integráljára) pedig

$$\int f(\xi)\, G(x-\xi)\, d\xi = f * G = y(x)$$

a válaszfüggvény. A fentiekben kihasználtuk, hogy a rendszer invariáns az időeltolásra, azaz nincsen "memóriája". (Ez például biztosan teljesül, ha $\hat{D}$ állandó együtthatós lineáris differenciáloperátor.) Példaként oldjuk meg az

$$y''(x) = f(x)$$

differenciálegyenletet y(x<0) ≡ 0 kezdőfeltétellel. A megoldást kétszeri integrálással közvetlenül is megkaphatjuk

$$y(x) = \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx''\, f(x'') ,$$

de "egyszerűbben" célhoz érünk, ha meghatározzuk a G(x) Green-függvényt:

$$G'' = \delta .$$

Ha $x \neq 0$, akkor $G''(x) = 0$, tehát G lineáris függvénye x-nek:

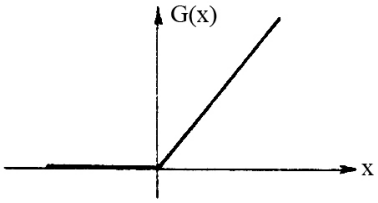
$$G(x) = \Theta(x)(ax + b)$$

G folytonos kell legyen, emiatt b = 0, a deriváltja pedig 1-et ugrik x = 0-ban, így a = 1.

$$G(x) = x\,\Theta(x)$$

A megoldás tehát

$$y(x) = G * f = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\, f(x-\xi)\, d\xi = \int_0^x d\xi \cdot \xi \cdot f(x-\xi) = \int_0^x d\xi\, (x-\xi)\, f(\xi) = \iint^{''} f(x)^{''} .$$



49. ábra

(Az utolsó egyenlőség arra utal, hogy y(x) az f(x) függvényből kétszeri határozatlan integrálással is megkapható.) Ez valóban megoldás, hiszen

$$y'(x) = (x-\xi)\, f(\xi)\Big|_{x=\xi} + \int_0^x d\xi\, f(\xi) ,$$

$$y''(x) = f(x) .$$

Érdekes, hogy csak egyszeres integrált kell kiszámítanunk, jóllehet a differenciálegyenlet másodrendű volt.

Hasonló módon oldható meg a

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n y(x) = f(x)$$

egyenlet is. A Green-függvény most

$$G(x) = \Theta(x)\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!},$$

a megoldás - f(x) n-szeres integrálja - tehát

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x d\xi\,(x-\xi)^{n-1} f(\xi) = \overset{//}{\int\int\ldots\int_{(n)}} f(x)^{//}$$

A fenti formula értelmezhető <u>tört</u>, sőt <u>komplex</u> n-re is:

$$\overset{//}{\int\int\ldots\int_{(\nu)}} f(x)^{//} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-\xi)^{\nu-1} f(\xi)\,d\xi\,.$$

Egy állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet Green-függvényét általában a Fourier-transzformáció segítségével határozhatjuk meg:

$$P_n\left(\frac{d}{dx}\right)G(x) = \delta(x)\,, \qquad G(x<0) \equiv 0\,,$$

$$P_n(-is)\,\widetilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

$$G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds\,\frac{1}{P_n(-is)}\,e^{-isx}\,.$$

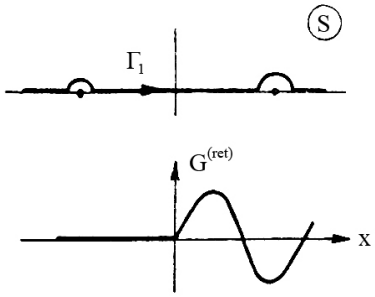
(Mivel az eredeti differenciálegyenletnek olyan megoldásait keressük, melyek $|x| \to \infty$-re korlátosak maradnak, a G(x) Green-függvény és a Fourier-transzformáltja egyaránt S' eleme. Emiatt a $P_n(-is)$ polinom komplex zérushelyeinek megfelelő $\delta(s-s_k) \notin S'$ disztribúciók nem jelentek meg $\widetilde{G}(s)$ kifejezésében.) Ha $P_n(-is)$ valamennyi zérushelye az Im s < 0 alsó félsíkon fekszik, akkor G(x < 0) = 0 teljesül. Ha valamelyik pólus (vagy esetleg több is) a valós tengelyre esik, akkor a visszatranszformációs képlet értelmetlenné válik. Ilyenkor meg kell adjuk, hogy a komplex s síkon melyik oldalról kerüljük meg a pólust. Nézzük például az y"(x) + y(x) = f(x) egyenletet. A Green-függvényre fennáll:

$$G^{//}(x) + G(x) = \delta(x)\,,$$

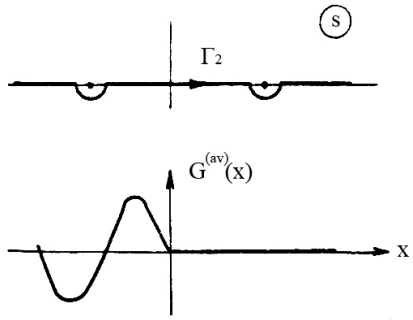
$$\left(-s^2+1\right)\widetilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Amennyiben a visszatranszformálásnál a pólusokat felülről kerüljük meg, úgy az ún. retardált Green-függvényt kapjuk:

$$G^{(ret)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{e^{-isx}}{-s^2+1} = \Theta(x)\cdot\sin x$$



50. ábra



51. ábra

Ha alulról kerüljük meg a pólusokat, akkor az ún. avanzsált Green-függvényhez jutunk:

$$G^{(av)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} ds \frac{e^{-isx}}{-s^2+1} = -\Theta(-x) \cdot \sin x$$

A kétféle Green-függvény a homogén egyenletnek egy partikuláris megoldásában különbözik egymástól. Mindkettőnek a deriváltja egységnyit ugrik az origóban és mindkettő korlátos a végtelenben, ezért közöttük csak fizikai megfontolások alapján választhatunk. Mivel minket az $y(x < 0) = 0$ kezdőfeltételű megoldás érdekel és azt vizsgáljuk, hogy egy $f(\xi)$ zavar milyen hatást fejt ki $x > \xi$ időpillanatokban, ezért a retardált Green-függvényt kell választanunk. Érvelhetünk úgy is, hogy a csillapítás nélküli rezgőmozgás - amit a vizsgált differenciálegyenlet leír – egy matematikai idealizálás eredménye. A valóságban mindig meglevő (de esetleg nagyon kicsi) csillapítás miatt a retardált Green-függvény $e^{-\gamma t}$-vel arányosan nullához tart, az avanzsált Green-függvény viszont nagy negatív időkre minden határon túl növekedne, ami fizikailag irreális. (A fizikában bizonyos esetekben az avanzsált Green-függvényeknek is van jelentése, sőt a kétféle Green-függvény lineáris kombinációja is alkalmazásra kerül.) Matematikai szempontból a Green-függvény határozatlansága úgy jelentkezik, hogy a

$$P_n(-is)\,\widetilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

egyenlet megoldása

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{P} \frac{1}{P_n(-is)} + \sum_k \alpha_k \cdot \delta(s - s_k)\,. \qquad (s_k \text{ valós})$$

P_n valós gyökeinek megfelelő $\delta(s-s_k)$ disztribúciók már S' elemei, így semmi okunk nincs rá, hogy kihagyjuk ezeket a megoldásból. Az α_k tetszőleges együtthatók alkalmas választásával megkaphatjuk a retardált, az avanzsált, vagy a kevert Green-függvényeket.

Ha $P_n(-is)$-nek a felső félsíkon is vannak zérushelyei, az arra utal, hogy a rendszer instabil. Emiatt fizikailag nem reális az az előírás, hogy $x < 0$-ra $y(x) \equiv 0$ teljesüljön, hiszen akármilyen infinitezimálisan kicsi zavar véges méretű mozgásba hozhatja a rendszert (lásd a 3.3.1. feladatot).

A Green-függvényes technika nemcsak akkor alkalmazható, ha a rendszer az időeltolásra invariáns. Általános esetben a Green-függvényt a

$$\hat{D}_{(x)}\, G(x,\xi) = \delta(x - \xi)$$

egyenlet definiálja, és a probléma megoldása a Green-függvény segítségével

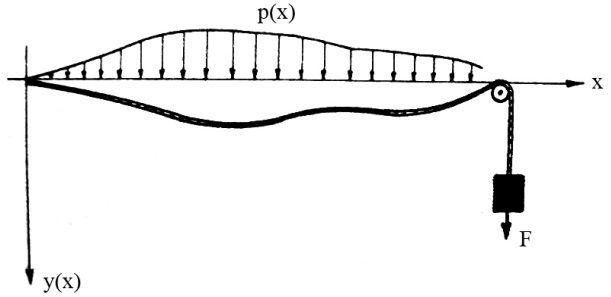
$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, G(x,\xi)\, f(\xi)\,.$$

módon kapható meg. Valóban

$$\hat{D} \cdot y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \hat{D}_{(x)}\, G(x,\xi)\, f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \delta(x - \xi)\, f(\xi) = f(x).$$

A Green-függvénynek az x változójában ugyanolyan határfeltételeknek kell eleget tennie, amilyen határfeltételeket az y(x) megoldásra elő akarunk írni.

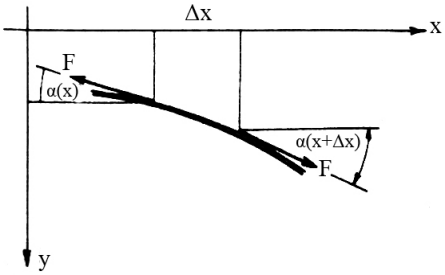
Tekintsük például egy ℓ hosszúságú kötelet, melyet <u>hosszegységen-ként</u> p(x) erővel terheltünk meg:



52. ábra

Kis lehajlás esetén: egy Δx hosszúságú kötéldarab egyensúlyának feltétele:

$$0 = p \cdot \Delta x + F\left[\sin\alpha\,(x+\Delta x) - \sin\alpha\,(x)\right] \approx p\Delta x + F\left[\mathrm{tg}\alpha\,(x+\Delta x) - \mathrm{tg}\alpha\,(x)\right] \approx \left[p + F\frac{d^2 y}{dx^2}\right] dx\ .$$



53. ábra

Tehát a rendszer differenciálegyenlete:

$$-y''(x) = \frac{1}{F}\cdot p(x)\ ,$$

a határfeltételek pedig

$$y(0) = y(\ell) = 0\ .$$

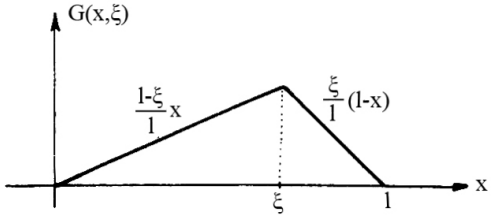
Az $x = \xi$ helyen ható pontszerű terhelés hatására a lehajlás $G(x\,,\xi)$. A

$$-\frac{d^2}{dx^2}G(x,\xi) = \delta(x-\xi)\ ;$$

$$G(0,\xi) = G(\ell,\xi) = 0$$

egyenlet megoldása

$$G(x,\xi) = \frac{1}{\ell}(\ell-\xi)\cdot\Theta(\xi - x) + \frac{\xi}{\ell}(\ell - x)\cdot\Theta(x-\xi)\ .$$



54. ábra

Tetszés szerinti p(x) terhelésre a lehajlás

$$y(x) = \int_0^{\ell} G(x,\xi)\frac{p(\xi)}{F}\,d\xi = \frac{\ell - x}{\ell F}\cdot\int_0^{x}\xi\ p(\xi)\,d\xi + \frac{x}{\ell F}\cdot\int_0^{\ell}(\ell-\xi)\,p(\xi)\,d(\xi)\ .$$

Érdekes, hogy a fenti példában a Green-függvény szimmetrikus, vagyis

$$G(x,\xi) = G(\xi, x)\ .$$

Vajon ez általában is igaz? Amennyiben $\hat{D}$ egy önadjungált operátor (vagyis ha a $\left(\psi_2\,,\hat{D}\psi_1\right) = \left(\hat{D}^{+}\psi_2\,,\psi_1\right)$ összefüggéssel definiált $\hat{D}^{+}$ adjungált operátor megegyezik $\hat{D}$-vel és az értelmezési tartományuk is azonos), akkor $\hat{D}$ sajátfüggvényei teljes ortonormált függvényrendszert alkotnak. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy valamennyi λ_n sajátérték diszkrét, egyszeres és nullától különbözik:

$$\hat{D}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x)\ .$$

$$(\varphi_n\,,\varphi_m) \equiv \int dx\,\overline{\varphi_n(x)}\,\varphi_m(x) = \delta_{nm} \qquad (\text{ortonormáltság}),$$

$$\sum_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)} = \delta(x-\xi) \qquad (\text{teljesség})$$

A Green-függvény ilyenkor

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}$$

alakban kapható meg, ami - valós sajátfüggvények esetében - nyilván szimmetrikus. Valóban:

$$D_{(x)}\left\{\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}\right\} = \sum_n \frac{1}{\lambda}\left\{\hat{D}_{(x)}\varphi_n(x)\right\}\cdot\overline{\varphi_n(\xi)} = \sum_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)} = \delta(x-\xi)\ .$$

A terhelt kötél példájában a $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ peremfeltételeket kielégítő sajátfüggvények

$$-\varphi_n''(x)=\lambda_n\varphi_n(x)\ ;$$

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\ell}}\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x\ ;$$

$$\lambda_n=\frac{n^2}{\ell^2}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

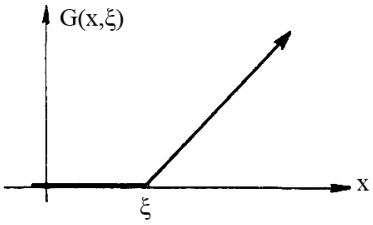
és így a Green-függvény

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ell}{n^2}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\ \sin\frac{n\pi}{\ell}x=\frac{\ell-\xi}{\ell}x\ \Theta(\xi-x)+\frac{\ell-x}{\ell}\xi\ \Theta(x-\xi)\ .$$

Ha viszont pl. az y(0) = y'(0) = 0 határfeltételeket írjuk elő az y''(x) = f(x) differenciálegyenlet megoldására, akkor a megfelelő Green-függvény

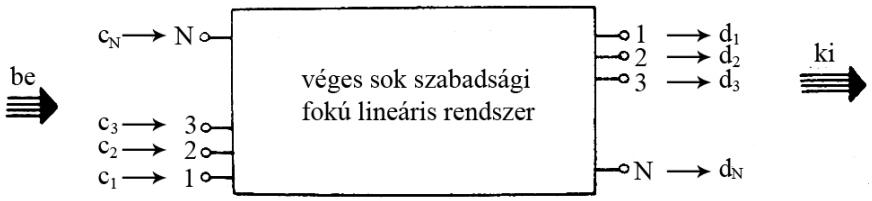
$$G(x,\xi)=\Theta(x-\xi)(x-\xi)\neq G(\xi,x)$$

nem szimmetrikus. Ezen nem kell csodálkoznunk, hiszen a $\hat{D}=\frac{d^2}{dx^2}$ operator ilyen határfeltételek mellett <u>nem</u> önadjungált, nincs egyetlen sajátfüggvénye sem.



55. ábra

A Green-függvénynek további szemléletes jelentés adható, ha olyan lineáris rendszert vizsgálunk, melynek bemenetére csak véges sok (N-féle) jel lineáris kombinációja adható és a kimenet is csak N-féle jel lineáris kombinációja lehet:



56. ábra

A bemenő jel ilyenkor egyértelműen jellemezhető a $\underline{c}=(c_1,c_2,c_3,\ldots,c_N)$ vektorral, a kimenő jel pedig a $\underline{d}=(d_1,d_2,\ldots,d_N)$ vektorral. A rendszer dinamikája valamilyen lineáris kapcsolatot létesít $\underline{c}$ és $\underline{d}$ között.

$$\sum_m A_{nm}d_m=c_n\ ,\ \text{azaz}$$

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{d}=\underline{c}$$

Ha sikerülne meghatározni, hogy a k-adik bementre adott egységnyi erősségű jel hatására mekkora kimenőjel jelenik meg az m-edik kimeneten - jelöljük ezt G_{mk}-val, - akkor ezáltal az általános megoldást is ismernénk:

$$d_m=\sum_k G_{mk}c_k\ ,\ \text{azaz}\ \underline{d}=\underline{\underline{G}}\cdot\underline{c}$$

A Green-függvényt (tulajdonképpen „Green-mátrixot") meghatározó összefüggés:

$$\sum_m A_{nm}G_{mk}=\delta_{nk}\ ,\ \text{azaz}\ \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{G}}=\underline{\underline{E}}$$

Látható, hogy $\underline{\underline{G}}$ nem más, mint a rendszer dinamikáját meghatározó $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze. Egy probléma Green-függvényének meghatározása annyit jelent, hogy a legáltalánosabb inhomogén tagra is meg tudjuk adni a megoldást. Ezért nem csoda, hogy a Green-függvény kiszámítása általában nem könnyű feladat.

A folytonos - végtelen szabadsági fokú - esetben δ_{nk} szerepét $\delta(x-\xi)$ veszi át, G_{mk}-nek pedig $G(x,\xi)$ felel meg. Az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak megfelelő operátor a leggyakoribb esetekben lokális, vagyis az ismeretlen függvény valamely pontbeli értéke és ugyanezen pontbeli deriváltjai között teremt kapcsolatot. Véges mátrix közelítésben ez annak felel meg, hogy A_{nm} majdnem diagonális, csak a főátlóhoz közeli elemei különböznek nullától. Az inverz mátrixra ez már természetesen nem áll fenn, hasonlóan $G(x,\xi)$ sem lokális, mint azt a példánkban is láthattuk.

ÖSSZEFOGLALÁS:

1. A $\hat{D}\, y(x) = f(x)$ inhomogén (nem feltétlenül állandó együtthatós) lineáris differenciálegyenlet Green-függvényét a
$$\hat{D}_{(x)}\, G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$
egyenlet (+ határfeltételek) szabják meg.
2. A Green-függvény ismeretében a megoldást az
$$y(x) = \int d\xi\, G(x,\xi)\, f(\xi)$$
integrálból kapjuk meg. Amennyiben G csak az x - ξ különbségtől függ, úgy y = G * f.
3. Önadjungált operátor Green-függvénye szimmetrikus: G(x,ξ) - G(ξ,x) és a sajátfüggvényekből
$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(\xi)}$$
módon kapható meg.
4. G(x,ξ) a $\hat{D}$ operátor inverzének tekinthető. (Ha $\hat{D}$ valamelyik sajátértéke nullával egyenlő, akkor a Green-függvény nem létezik!)
5. Ha $\hat{D} = P_n\left(\frac{d}{dx}\right)$ állandó együtthatós lineáris differenciál-operátor és a határfeltétel G(x < 0 , ξ) = 0, akkor Fourier-transzformációval adódik, hogy
$$\widetilde{G(x-\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{P_n(-is)}$$
A P_n(-is) polinom zérushelyei - ha a vizsgált egyenlet stabil fizikai rendszert ír le - nem eshetnek a felső félsíkra. Amennyiben a valós tengelyen is található zérushely, úgy az ennek megfelelő pólust a visszatranszformálásnál felülről kell megkerülni.

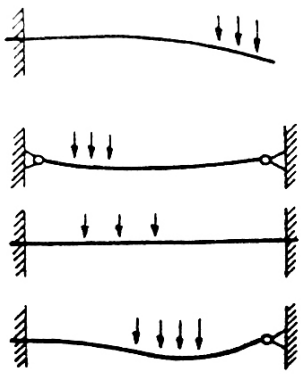
FELADATOK:

3.3.1. Határozzuk meg az
$$y''(x) + ky'(x) = f(x)\,, \qquad y(x<0) \equiv 0$$
differenciálegyenlet Green-függvényét Fourier-transzformáció segítségével! Interpretáljuk az eredményt k > 0 és k < 0 esetekben!

3.3.2. Egy m tömegű, e töltésű részecske (pl. elektron) mozgásnak leírására - a sugárzási visszahatást is figyelembe véve - a következő egyenletet javasolták:
$$\left(m\frac{d^2}{dt^2} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^3}{dt^3}\right) x(t) = F(t) \qquad \text{(Abraham-Lorentz egyenlet).}$$
Lehet-e ez az egyenlet egy klasszikus töltött részecske helyes mozgásegyenlete ?

3.3.3. Határozzuk meg egy transzverzálisan terhelt rugalmas rúd problémájának Green-függvényét, ha a rúd:
a) egyik vége mereven befogott, a másik vége szabad;
b) mindkét vége csuklósan rögzített;
c) mindkét vége mereven befogott;
d) egyik vége mereven befogott, a másik pedig csuklósan rögzített.

3.3.4. Határozzuk meg egy végtelen hosszú, rugalmasan alátámasztott és transzverzálisan terhelt rúd (például egy vasúti sín) Green-függvényét!



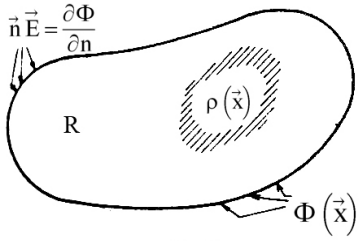
57. ábra

3.4 Parciális differenciálegyenletek és Green-függvényeik

A fizika legkülönbözőbb problémái fogalmazhatók meg parciális differenciálegyenletek alakjában. Ezek megoldásánál is hasznos segédeszköznek bizonyul a Green-fiiggvény fogalma és a Fourier-transzformáció módszere.

A parciális differenciálegyenletek különböző (matematikai és fizikai) szempontok szerint osztályozhatók. Egyik csoportjuk sztatikus (vagy általánosabban egyensúlyi) helyzetet ír le. Ilyen esetben a független változók általában a tér koordinátái és az idő nem szerepel az egyenletekben. Tipikus példa erre az elektrosztatika Poisson-egyenlete:

$$\Delta\Phi\,(x,y,z) = -\,4\pi\rho\,(x,y,z)$$



58. ábra

Itt $\rho(\vec{r})$ adott töltéssűrűség és a keresett mennyiség a $\Phi(\vec{r})$ potenciál valamilyen R tartomány belsejében. A tartomány határán – mint határfeltételt - meg kell adjuk Φ értékét, vagy a $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ normál-deriváltat, esetleg ezek lineáris kombinációját.

A feladat Green-függvényének a

$$\Delta_{(\vec{r})}\, G\left(\vec{r},\vec{r}^{\,/}\right) = -\,4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\right)$$

egyenlet megoldását nevezzük, ha G ugyanazokat a határfeltételeket elégíti ki az $\vec{r}$ változójában, mint amelyeket $\Phi(\vec{r})$-re előírtunk. A Green-függvény segítségével a megoldás

$$\Phi(\vec{r}) = \int\limits_{(R)} d^3 r^{/}\; G\left(\vec{r},\vec{r}^{\,/}\right)\rho\left(\vec{r}^{\,/}\right)$$

alakban állítható elő.

Például ha E a teljes háromdimenziós tér és a határfeltétel $\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(\vec{r}) = 0$, akkor a Green-függvény (lásd. 2.6. pontot)

$$G\left(\vec{r},\vec{r}^{\,/}\right) = \frac{1}{|\,\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\,|}$$

és a potenciált a

$$\Phi(\vec{r}) = \int\int\int d^3 r^{/}\,\frac{\rho\left(\vec{r}\right)^{/}}{|\,\vec{r}-\vec{r}^{\,/}\,|}$$

Poisson-formula adja meg.

A parciális differenciálegyenletek másik nagy osztályához az ún. kezdetiérték-feladatok (másnéven Cauchy-feladatok) kapcsán jutunk el. Ezekben valamilyen "térmennyiség" időbeli fejlődését, változását vizsgáljuk. A keresett mennyiséget $\Phi(\vec{r},t)$-vel jelöljük, $\vec{r}$ valamilyen R tartomány belső pontja. Ha az egyenlet legfeljebb m-edik időderiváltat tartalmaz, akkor a $t = 0$ időpillanatban szabadon megadhatjuk a

$$\Phi(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \varphi_0(\vec{r})\,;\quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \varphi_1(\vec{r})\,;\ \ldots;\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \varphi_{m-1}(\vec{r})$$

kezdeti értékeket, továbbá az R térbeli tartomány határán bizonyos peremfeltételeket.

A Cauchy-feladatra jellegzetes példa a lineáris hővezetés

$$H\Delta\Phi\left(\vec{r},t\right) = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

egyenlete ($\Phi\left(\vec{r},t\right)$ a t időpillanatban c helyen mérhető hőmérsékletet jelöli, H a hővezetési állandó). A kezdeti $\varphi_0\left(\vec{r}\right)$ hőmérséklet-eloszlás szabadon megadható (tetszés szerint beállítható), a

tartomány határán pedig előírhatjuk például az időegységenként beáramló hő mennyiségét, ami $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ -nel arányos.

Másik ismert kezdetiérték-feladat a rezgő húr mozgásegyenlete (egydimenziós hullámegyenlet):

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

(c egy adott állandó, amely a húr feszítettségétől, sűrűségétől és a keresztmetszetétől függ). Ennél a feladatnál önkényesen előírhatjuk a húr kezdett alakját

$$\Phi(x,0) = \varphi_0(x) ,$$

valamint a kezdősebességét minden pontban:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) .$$

Véges méretű húrnál ezen kívül a húr végpontjainak helyzete is tetszés szerint megadható, hiszen a húr végeit akárhogyan mozgathatjuk:

$$\Phi(x_1,t) \equiv f_1(t) ; \qquad \Phi(x_2,t) \equiv f_2(t) .$$

Rögzített végű húrnak nyilván $f_1(t) = f_2(t) = 0$ felel meg.

A Cauchy-probléma <u>elemi megoldásának</u> azt az $\vec{r}\,'$ paramétertől függő $E(\vec{r},t;\vec{r}\,')$ függvényt nevezzük, amely az $\vec{r}$ és t változójában eleget tesz a homogén differenciálegyenletnek és a peremfeltételeknek, ezenkívül a

$$E(t=0) = \left.\frac{\partial}{\partial t}E\right|_{t=0} = \ldots = \left.\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}E\right|_{t=0} = 0 ,$$

$$\left.\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E(\vec{r},t;\vec{r}\,')\right|_{t=0} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') .$$

kezdeti feltételeket teljesíti. Amennyiben a vizsgált Cauchy-probléma olyan, hogy az (m-l)-edik kivételével valamennyi időderivált nulla a kezdőpillanatban, akkor a megoldás $E(\vec{r},t;\vec{r}\,')$ segítségével nyilván

$$\Phi(r,t) = \int d^3 r' \; E(r,t;r)\,\varphi_{m-1}(\vec{r}\,')$$

módon állítható elő. Megmutatjuk, hogy az elemi megoldást ismerve nemcsak ebben a speciális esetben, de a legáltalánosabb kezdeti feltételek esetén is meghatározhatjuk a megoldást. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a peremfeltétel $\Phi(\vec{r}_{\text{határ}}, t) = 0$ alakú.

Tekintsik először az

$$E_0 = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E(\vec{r},t;\vec{r}\,')$$

függvényt. Ez kielégíti a differenciálegyenletet, hiszen

$$\hat{D}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E\right) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\left(\hat{D}E\right) = 0 ,$$

továbbá a peremfeltételeknek is eleget tesz. Mivel t = 0-kor E_0 nulladik deriváltja (tehát maga E_0) Dirac-délta, emiatt a

$$\Phi_0(\vec{r},t) = \int d^3 r' \; E_0(\vec{r},t;\vec{r}\,')\,\varphi_0(\vec{r}\,')$$

függvény "tudja" a $\Phi_0(\vec{r},t=0)\,\varphi_0(\vec{r})$ kezdeti feltételt (a magasabb deriváltakra vonatkozó kezdeti feltételeket azonban természetesen nem!) A

$$\Phi^* \equiv \Phi\left(\vec{r},t\right) - \Phi_0\left(\vec{r},t\right)$$

függvény tehát egy olyan Cauchy-problémának a megoldása, melyre $\varphi_0^*\left(\vec{r}\right) \equiv 0$ és a többi kezdeti értékek $\varphi_1^*\left(\vec{r}\right); \varphi_2^*\left(\vec{r}\right); \ldots; \varphi_{m-1}^*\left(\vec{r}\right)$ az eredeti $\varphi_i\left(\vec{r}\right)$-ből és Φ_0 megfelelő magasabb időderiváltjából számítható ismert függvények.

Hasonlóan az $E_1 \equiv \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} E$ függvény is eleget tesz a differenciálegyenletnek, $t = 0$-kor azonosan eltűnik, az első időderiváltja viszont $\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$. Így a

$$\Phi_1\left(\vec{r},t\right) = \int d^3 r' \; E_1\left(\vec{r},t;\vec{r}\,'\right) \varphi_1^*\left(\vec{r}\,'\right)$$

függvény már az első két kezdeti feltételt teljesíti, tehát a

$$\Phi^{**} = \Phi^* - \Phi_1$$

különbségre

$$\Phi^{**}(t=0) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi^{**}(t=0) = 0$$

Hasonló lépések sorozatával végül eljutunk az eredeti probléma valamennyi kezdeti feltételének eleget tevő megoldáshoz.

A fentieket két példával illusztráljuk:

<u>1. példa</u> Határozzuk meg egy nagyon hosszú, vékony rúd hőmérsékletének időbeli változását. Feltételezzük, hogy nagyon messze a rúd állandó (nullának választható) hőmérsékletű, kezdetben egy véges hosszúságú szakaszon valamilyen nullától különböző $\varphi_0(x)$ hőmérséklet-eloszlást hozunk létre.

Az egydimenziós hővezetés egyenletét kell megoldanunk

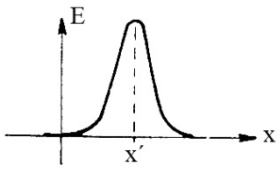
$$H\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x,t) = 0$$

peremfeltétellel és

$$\Phi\left(x,t=0\right) = \varphi_0(x)$$

kezdeti feltétellel. Behelyettesítéssel igazolható, hogy a feladat elemi megoldása



59. ábra

$$E\left(x,t;x'\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi H t}} e^{-\frac{\left(x-x'\right)^2}{4Ht}}$$

a teljes megoldás tehát

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi H t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, e^{-\frac{\left(x-x'\right)^2}{4Ht}} \varphi_0\left(x'\right) .$$

<u>2. példa</u> Oldjuk meg egy "végtelen hosszú" rezgő húr problémáját!

A mozgásegyenlet:

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(x,t) = 0$$

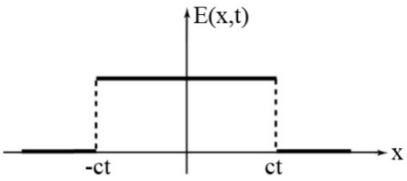
A peremfeltétellel:

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x,t) = 0$$

a kezdeti feltételek pedig:

$$\Phi\left(x,t=0\right)\varphi_0(x) \; ; \; \left.\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) .$$

Az $\quad E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & , \text{ ha } |x| < ct \\ 0 & , \text{ ha } |x| > ct , \end{cases}$



60. ábra

azaz $\quad E(x,t)=\frac{1}{2c}\left[\Theta(x+ct)-\Theta(x-ct)\right]$

függvény kielégíti a differenciálegyenletet, hiszen

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{1}{2c}\left[\delta(x+ct)-\delta(x-ct)\right]; \qquad \frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[\delta(x+ct)-\delta(x-ct)\right];$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\frac{1}{2c}\left[\delta'(x+ct)-\delta'(x-ct)\right]; \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{c}{2}\left[\delta'(x+ct)-\delta'(x-ct)\right].$$

Ezenkívül

$$E\left(x,t=0\right)\equiv 0\ ; \quad \left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0} \delta(x)$$

miatt E éppen a feladat elemi megoldása x' = 0 esetén, általában pedig az eltolási invariancia miatt E(x,t; x') = E(x-x',t).

A

$$\Phi_0(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial E\left(x-x',t\right)}{\partial t}\varphi_0\left(x'\right)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+ct)+\varphi_0(x-ct)\right]$$

függvény kielégíti a hullámegyenletet és tudja a $\Phi\left(x,0\right)=\varphi_0(x)$ kezdeti feltételt. Mivel $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0\left(x,0\right)=0$, így a

$$\Phi^*(x,t)=\Phi(x,t)-\Phi_0(x,t)$$

különbség kezdeti feltételei:

$$\Phi^*\left(x,t=0\right)=0\ ; \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}\Phi^*(x,t)\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)$$

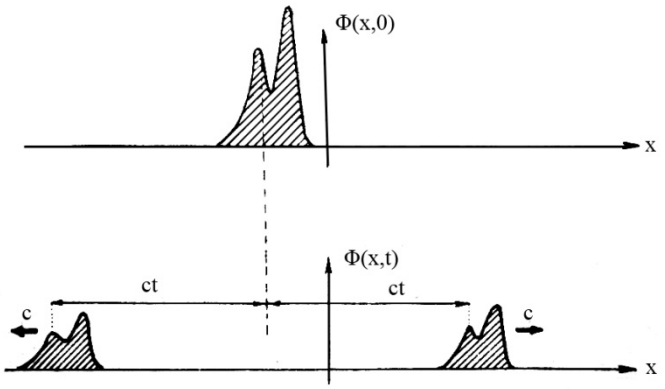
Az elemi megoldás segítségével Φ^* is meghatározható:

$$\Phi^*(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ E\left(x-x',t\right)\varphi_1\left(x'\right)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\ \varphi_1\left(x'\right).$$

A teljes megoldás tehát:

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+ct)+\varphi_0(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\ \varphi_1\left(x'\right).$$

Ez a húr mentén ±c sebességgel terjedő hullámokat ír le. Ha például $\varphi_1(x)\equiv 0$, $\varphi_0(x)$ pedig egy keskeny "hullámcsomag", akkor t idő elteltével ugyanilyen alakú, de fele amplitúdójú hullámokat találunk az eredeti helyzettől ±ct távolságban:



61. ábra

A Cauchy-probléma elemi megoldása sok szempontból a Green-függvényhez hasonló szerepet játszik, azonban mégsem azonos azzal, hiszen míg az elemi megoldás egy <u>homogén</u> egyenletnek tesz eleget, addig a Green-függvény egy Dirac-delta forrásnak megfelelő <u>inhomogén</u> egyenlet megoldása!

A hullámegyenletnél is kereshetjük a

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(x,t)=\delta(x)\,\delta(t)\ ,$$

vagy általánosabban a

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G\left(x,t\,;x^{/},t^{/}\right)=\delta\left(x-x^{/}\right)\delta\left(t-t^{/}\right)$$

egyenlet megoldását. Ennek a G Green-függvénynek a segítségével a

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(x,t)=f(x,t)$$

általános inhomogén hullámegyenletet is megoldhatjuk:

$$\Phi(x,t)=\int\int dx^{/}\,dt^{/}\ G\left(x,t\,;x^{/},t^{/}\right)f\left(x^{/},t^{/}\right)\ .$$

Amennyiben G csak az x-x' és a t-t' különbségektől függ, úgy

$$\Phi=G*f\ .$$

Hasonló módon értelmezhetjük más - magasabb időderiváltakat tartalmazó - egyenletek Green-függvényeit is.

Azzal a kérdéssel, hogy különböző parciális differenciálegyenletek Green-függvényét hogyan lehet konkrétan meghatározni, a következő pontban foglalkozunk.

FE LADATOK:

3.4.1. Mi a fizikai jelentése a

$$H\Delta\Phi-\partial\frac{\Phi}{\partial t}=f\left(\vec{r},t\right)$$

hővezetési, illetve a

$$\left(c^2\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi\left(\vec{r},t\right)=f\left(\vec{r},t\right)$$

hullámegyenletben az $f\left(\vec{r},t\right)$ inhomogén tagnak?

3.4.2. Határozzuk meg a

$$\Delta\Phi\left(\vec{r}\right)=-4\pi\rho\left(\vec{r}\right)$$

Poisson egyenlet Green-függvényét a $z>0$ féltérben

a) $\Phi(z=0)=0$,

b) $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t)\Big|_{t=0}=0$ határfeltételek esetén!

3.4.3. Határozzuk meg egy rögzített végű, félig végtelen húr mozgásegyenletének elemi megoldását és ennek segítségével a

$$\Phi\left(x\,,t=0\right)=f(x)\qquad(x>0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,t)\Big|_{t=0}=g(x)\quad(x>0)$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldást!

3.5 Green-függvények és elemi megoldások meghatározása Fourier-transzformáció módszerével

Az előző pontban megmutattuk, miként lehet meghatározni különböző parciális differenciál-egyenletek megoldását a Green-függvény, illetve az elemi megoldás ismeretében. Nyitott maradt azonban az a kérdés: hogyan lehet egy adott probléma Green-függvényét, vagy az elemi megoldását kiszámítani. Ez általában nem könnyű feladat, általában az analitikus megoldás csak bizonyos speciális peremfeltételek mellett ismert.

Jól alkalmazhatjuk a Fourier-transzformáció módszerét abban az esetben, amikor a vizsgált tartomány a teljes tér (alacsonyabb dimenzióban a teljes számegyenes, illetve a teljes sík) és peremfeltételként azt írjuk elő, hogy a megoldás a végtelenben korlátos legyen, sőt esetleg nullához tartson.

Tekintsük példaként a Poisson egyenletet és képezzük a

$$\Delta G\left(\vec{r}\right) = -4\pi\delta\left(\vec{r}\right)$$

egyenlet Fourier-transzformáltját mindhárom változója szerint:

$$-\vec{k}^{\,2}\,\widetilde{G}\left(\vec{k}\right) = -4\pi\,(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

ahonnan

$$\widetilde{G}\left(\vec{k}\right) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{k^2}\ .$$

A visszatranszformálás a k-térbeli polárkoordináták segítségével közvetlenül elvégezhető és az ismert eredményt adja:

$$G\left(\vec{r}\right) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int\int\int d^3k\,\frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\Phi\,\frac{e^{-ikr\cos\theta}}{k^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin(kr)}{kr} = \frac{1}{r}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\,\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{r}\ . \qquad \left(r = |\vec{r}\,|\right)$$

A feladat (vagyis az egyenlet + a peremfeltételek) eltolási invarianciája miatt a Green-függvény általában:

$$G\left(\vec{r}\,,\vec{r}\,'\right) = \frac{1}{|\vec{r}\,,\vec{r}\,'|}\ .$$

A Fourier-transzformáció alkalmas segédeszköz kezdetiérték-feladatok elemi megoldásának meghatározásánál is. Tekintsük például a

$$\left(H\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi\,(x,t) = 0$$

hővezetési egyenletet. Az elemi megoldás a homogén egyenletnek tesz eleget:

$$\left(H\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)E\left(x,t\,;x'\right) = 0$$

a Fourier-transzformáltjára tehát fennáll: $\left(-Hk^2 + i\omega\right)\widetilde{E}\left(k,\omega\right) = 0$ (k és ω az x és t változóknak megfelelő transzformált változók.) Ennek az egyenletnek a legáltalánosabb disztribúció-megoldása

$$\widetilde{E}\left(k,\omega\right) = f(k)\cdot\delta\left(\omega + iHk^2\right)\ ,$$

ahol f(k) tetszőleges függvény. A visszatranszformálás eredménye

$$E\left(x,t\,;x'\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,e^{-ikx-i\omega t}\,f(k)\,\delta\left(\omega + iHk^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,f(k)\cdot e^{-Htk^2-ikx}\ .$$

Mivel az elemi megoldásnak t = 0-kor $\delta\left(x-x'\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk\, e^{-ik\left(x-x'\right)}$-vel kell megegyeznie, innen $f(k)=\frac{e^{ikx'}}{\sqrt{2\pi}}$ adódik. A kiszámítandó integrál Gauss-típusú:

$$E\left(x,t\,;x'\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-Ht\left(k-i\frac{x-x'}{2Ht}\right)^2}\cdot e^{\frac{-\left(x-x'\right)^2}{4Ht}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi Ht}}\,e^{-\frac{\left(x-x'\right)^2}{4Ht}}$$

Hasonló módon járhatunk el a

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E\left(x,t\,;x'\right)=0\qquad\left(\lim_{|x|\to\infty}E\left(x,t\,;x'\right)=0\right)$$

hullámegyenletnél is. A transzformált

$$\left(-c^2k^2+\omega^2\right)\widetilde{E}\left(k,\omega\right)=0$$

egyenlet megoldásában - mivel a hullámegyenlet az időben másodrendű - két tetszőleges függvény jelenik meg:

$$\widetilde{E}\left(k,\omega\right)=f_1(k)\,d\omega+ck\,f_2(k)\,\delta\left(\omega-ck\right)\;;$$

$$E\left(x,t\,;x'\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left[f_1(k)\,e^{-ik(x-ct)}+f_2(k)\,e^{-ik(x+ct)}\right].$$

téhát

$$E\left(x,t\,;x'\right)=\frac{1}{4\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{1}{k}\left[e^{-ik\left(x-x'-ct\right)}-e^{-ik\left(x-x'+ct\right)}\right]+\text{állandó}$$

Az integrálás könnyen elvégezhető (például felülről kerülve meg a látszólagos k = 0 pólust) és az eredmény:

$$E\left(x,t\,;x'\right)=\frac{1}{2c}\left[\Theta\left(x-x'+ct\right)-\Theta\left(x-x'-ct\right)\right]$$

A δ(k)-ból adódó tagban az állandó a peremfeltételek miatt nullával egyenlő.

FELADATOK

3.5.1. Határozzuk meg a

$$\left(c^2\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi\left(\vec{r},t\right)=0$$

térbeli hullámegyenlet elemi megoldását! (A vizsgált tartomány a teljes tér, a peremfeltétel pedig: $\lim_{r\to\infty}\Phi\left(\vec{r},t\right)=0$.)

3.5.2. Határozzuk meg a hővezetés egyenletének Green-függvényét egy végtelen hosszú rúd esetében! Milyen kapcsolatban van ez a Green-függvény az elemi megoldással? Mi a szemléletes magyarázata ennek a kapcsolatnak?

3.5.3. Határozzuk meg egy végtelen hosszú rugalmas rúdban terjedő transzverzális hullámok

$$E\,I\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi(x,t)+\rho\,\frac{\partial^2\Phi}{dt^2}=0$$

egyenletének elemi megoldását! (E, I és ρ anyagi állandók.)

3.5.4. Egy m tömegű részecske relativisztikus téregyenlete ($\hbar$ = c = 1)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta+m^2\right)\Phi\left(\vec{r},t\right)=\rho\left(\vec{r},t\right).$$

Határozzuk meg a retardált Green-függvényt és az elemi megoldást! Használjuk ki, hogy az

egyenlet Lorentz-invarianciája miatt ezek csak a $t^2 - \vec{r}^{\,2} \equiv x_\mu^2$ Minkowski-távolságtól és sgn t-től függhetnek. Milyen szingularitást mutat az elemi megoldás az $x_\mu^2 = 0$ "fénykúp" közelében?

3.6 Disztribúciók a kvantummechanikában

A kvantummechanika matematikai felépítésében alapvető fontosságú fogalmak a Hilbert-tér, az önadjungált operátorok, ezek sajátértékei és sajátfüggvényei. Ezen fogalmak és a köztük fennálló összefüggések - különösen a folytonos spektrumú operátorok - természetes módon igénylik a disztribúcióelméletnek, elsősorban a delta-disztribúciónak és deriváltjainak alkalmazását. A kvantummechanika formalizmusa - teljes matematikai precizitással - megfogalmazható a disztribúcióelmélet eredményeinek felhasználása nélkül is, de sokkal körülményesebben, nehézkesebben, mint annak igénybevételével.

Az összehasonlítás és a könnyebb érthetőség kedvéért foglaljuk össze a véges N dimenziós komplex Euklideszi-tér és az elemeire ható önadjungált operátorok néhány fontos tulajdonságát:

a) Az N-dimenziós komplex vektortér elemei a

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

komplex szám N-esek, melyekre a lineáris kombináció és a skalár-szorzat műveletét az

$$\left|\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2\right\rangle_i = \alpha_1 \,|c_1\rangle_i + \alpha_2 \,|c_2\rangle_i$$

és a

$$\left\langle c_1 \,|\, c_2\right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \overline{c}_{1i}\, c_{2i}$$

összefüggésekkel definiáljuk.

b) A $|c\rangle \overset{\hat{A}}{\Rightarrow} |d\rangle$, más jelöléssel $|d\rangle = \hat{A}\,|c\rangle$ leképezést végrehajtó lineáris operátor egy

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots\ldots, & A_{1N} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots\ldots, & A_{2N} \\ \vdots & & & \\ A_{N1}, & A_{N2}, & \ldots\ldots, & A_{NN} \end{pmatrix}$$

mátrixszal adható meg, mely segítségével

$$d_i = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}\, c_k \qquad (n = 1,2,\ldots,N)\,.$$

c) Az $\hat{A}$ lineáris operátor önadjungált, ha a vektortér bármely $|x\rangle$ és $|y\rangle$ elemére fennáll:

$$\left\langle y \,|\, Ax\right\rangle = \left\langle Ay \,|\, x\right\rangle\,.$$

Önadjungált operátor mátrixára $A_{ik} = \overline{A}_{ki}$.

d) Önadjungált operátor sajátértékei valósak:

$$\hat{A}\left|s^{(n)}\right\rangle = \lambda_n \left|s^{(n)}\right\rangle \qquad (n = 1,2,\ldots,N)$$

$$\lambda_n = \overline{\lambda}_n\,.$$

e) Önadjungált operátor különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak, az elfajult sajátértékhez tartozó sajátaltérből pedig kiválaszthatók ortogonális sajátvektorok. Ha a sajátvektorokat normáljuk is, akkor

$$\left\langle s^{(m)} \middle| s^{(n)} \right\rangle = \delta_{nm} .$$

f) Mindegyik sajátvektor az önmagával képzett diadikus szorzat által egy

$$\hat{P}^{(n)} = \left| s^{(n)} \right\rangle \left\langle s^{(n)} \right|$$

projektort definiál $\left(\hat{P}^{2(n)} = \hat{P}^{(n)} \right)$, amely éppen az n-ik sajátvektorra vetítő operátor.

g) Az $\left| \underline{s}^{(n)} \right\rangle$ sajátvektorok teljes rendszert alkotnak:

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{P}^{(n)} = \hat{E} ,$$

azaz

$$\sum_{n=1}^{N} s_i^{(n)} \overline{s_j^{(n)}} = \varepsilon_{ij}$$

Ezt az előállítást az egységoperátor diadikus felbontásának nevezik.

h) Az $\hat{A}$ operátor f($\hat{A}$) függvényét az

$$f\left(\hat{A}\right) = \sum_{n=1}^{N} f\left(\lambda_n\right) \hat{P}^{(n)}$$

összefüggés definiálja. Maga $\hat{A}$

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \hat{P}^{(n)}$$

alakban állítható elő, az inverze pedig

$$\hat{A}^{-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \hat{P}^{(n)}$$

Nézzük meg, mi felel meg a fenti összefüggéseknek egy (végtelen dimenziós) Hilbert térben, például az L^2-ben.

a) A tér elemei a négyzetesen integrálható $|f\rangle \equiv f(x)$ függvények: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| f(x) \right|^2 < \infty$. A lineáris kombinációt és a skalárszorzatot az

$$\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) ; \quad \left\langle f_1 \middle| f_2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{f_1(x)}\, f_2(x)$$

összefüggések definiálják. Amennyiben a függvényeket egy teljes ortonormált $\varphi_n(x)$ rendszer szerint kifejtjük:

$$\left| f(x) \right\rangle \sum_{i=0}^{\infty} f_i \left| \varphi_i(x) \right\rangle ; \quad f_i = \left\langle \varphi_n \middle| f \right\rangle ,$$

úgy $\left| f(x) \right\rangle$ jellemezhető az $f_i (i = 1,2,\ldots,\infty)$ számsorozattal.

A műveletek a véges dimenziós esettel analóg módon számíthatók, <u>formálisan</u> $N = \infty$ helyettesítéssel.

b) Az $\left| f(x) \right\rangle \overset{\hat{A}}{\Rightarrow} \left| g(x) \right\rangle$ lineáris leképezést végrehajtó operátor jellemezhető az $A_{ik} (i = 1,2,\ldots)$ mátrixszal, mely segítségével

$$g_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k .$$

c) $\hat{A}$ önadjungált, ha bármely f(x) és g(x) $\in L^2$-re $\left\langle f \middle| \hat{A} g \right\rangle = \left\langle \hat{A} f \middle| g \right\rangle$. Önadjungált operátor mátrixelemeire fennáll: $A_{ik} = \overline{A_{ki}}$.

d) Önadjungált operátor sajátértékei valósak. Tekintsünk először diszkrét sajátértékű operátorokat, ezekre:

$$\hat{A}\left|s^{(n)}(x)\right\rangle = \lambda_n \left|s^{(n)}(x)\right\rangle; \qquad \lambda_n = \overline{\lambda}_n .$$

e) Diszkrét sajátértékű önadjungált operátor különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei ortogonálisak és normálhatók:

$$\left\langle s^{(m)} \middle| s^{(n)} \right\rangle = \delta_{nm}.$$

f) A sajátfüggvények projektorokat definiálnak:

$$\hat{P}^{(n)} = \left|s^{(n)}\right\rangle\left\langle s^{(n)}\right| ; \qquad P_{ij}^{(n)} = s_i^{(n)}\,\overline{s_j^{(n)}} .$$

g) A sajátfüggvények teljes rendszert alkotnak:

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{P}^{(n)} = \hat{E} ,$$

azaz

$$\sum_{n=1} s_i^{(n)}\,\overline{s_j^{(n)}} = \delta_{ij} .$$

h) Az $\hat{A}$ operátor f($\hat{A}$) függvényét az

$$f\left(\hat{A}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\lambda_n\right) \hat{P}^{(n)}$$

összefüggéssel definiáljuk.

Hol alkalmazhatók a fenti sémában a disztribúciók? Milyen előnyök származnak abból, ha a kvantummechanikai hullámfüggvényeket disztribúcióknak tekintjük, a fizikai mennyiségeknek pedig a disztribúciókra ható operátorokat (pl. deriválást, függvénnyel való szorzást) feleltetünk meg?

Az első hely, ahol disztribúciók megjelennek, az egy $s^{(n)}(x)$ függvényrendszer <u>teljességét</u> kifejező

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{(n)}(x)\,\overline{s^{(n)}}(y) = \delta(x-y)$$

összefüggés. Ennél nem kell egy bázist segítségül hívni, mint a g) pontban, hanem magukkal az $s^{(n)}(x)$ függvényekkel fejezhetjük ki a teljességet. Ez az alak ekvivalens g)-belivel, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_i^{(n)}\,\overline{s_j^{(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\overline{\varphi_i(x)}\,s^{(n)}(x)\right]\overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} dy\,\overline{\varphi_j(y)}\,s^{(n)}(y)\right]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_j(y)\left[\sum_{n=1}^{\infty} s^{(n)}(x)\,\overline{s^{(n)}(y)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\,\overline{\varphi_i(x)}\,\varphi_j(y)\,\delta(x-y) = \left\langle \varphi_i \middle| \varphi_j \right\rangle = \delta_{ij}$$

és fordítva, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^{(n)}(x)\,\overline{s^{(n)}}(y) \equiv E(x,y)$$

jelöléssel

$$\delta_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\overline{\varphi_i(x)}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} dy\,E(x,y)\,\varphi_j(y)\right\}$$

csak úgy állhat fenn minden $\varphi_i(x)$-re, ha a { }-ben álló függvény $\varphi_j(x)$, azaz E(x,y) a $\delta(x-y)$ disztribúció.

A másik alkalmazási területe a disztribúcióknak a folytonos (és a kevert) spektrumú operátorok esete. Bizonyos - fizikailag fontos - önadjungált operátoroknak nincsenek L^2-béli sajátfüggvényük. Ilyen például az $\hat{x}$ helyoperátor és a $\hat{p}$ impulzusoperátor:

$$\hat{x}f(x) = x\,f(x) ,$$

$$\hat{p}f(x) = -\,i f'(x) . \qquad \left(\hbar = 1 \text{ egységrendszerben}\right)$$

A helyoperátor sajátfüggvényének - ha x_0-lal jelöljük a sajátértéket - ki kellene elégítenie az

egyenletet, aminek a függvények körében nincsen triviálistól különböző megoldása. Tekintsük azonban s(x)-t S'-beli disztribúciónak! A fentebbi összefüggésnek, mint disztribúció-egyenletnek már minden valós x_0 mellett van nem-triviális megoldása. Az x operátor spektruma tehát folytonos és a "sajátfüggvények":

$$s(x) = \alpha\delta(x - x_0) .$$

A sajátfüggvények (pontosabban sajátdisztribúciók) <u>nem</u> elemei L^2-nek, így nem is normálhatók.

Az impulzus operátor sajátfüggvényeit formálisan a

$$-i\frac{ds(x)}{dx} = p_0 s(x)$$

differenciálegyenletből kapjuk meg

$$s(x) = \alpha e^{ip_0 x} .$$

Ez ugyan függvény (reguláris disztribúció), de nem normálható, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{ip_0 x}\right|^2 dx = \infty .$$

A spektrum ismét folytonos, p_0 tetszőleges valós szám lehet.

Az e) pontban szereplő ortogonalitási feltétel az általánosított sajátfüggvényekre is érvényes. Ha

$$\hat{A}s_\lambda(x) = \lambda s_\lambda(x) \text{ és}$$

$$\hat{A}s_{\lambda'}(x) = \lambda' s_{\lambda'}(x) ,$$

akkor $\lambda \neq \lambda'$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{s_{\lambda'}(x)}\, s_\lambda(x) = 0 .$$

Ez az összefüggés úgy értendő, hogy $s_\lambda(x)$-t és $s_{\lambda'}(x)$-t a λ, illetve a λ' változókban disztribúciónak tekintjük, melyek az x paramétertől is függnek. A kiintegrált disztribúció $\lambda \neq \lambda'$-re eltűnik, azaz a tartója mindössze a $\lambda = \lambda'$ pont. Például a hely sajátfüggvényekre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{s_{x_1}(x)}\, s_{x_2}(x)\, dx = \text{állandó} \cdot \int dx\, \delta(x - x_1)\, \delta(x - x_2) = \text{állandó} \cdot \delta(x_1 - x_2) = 0 , \text{ ha } x_1 \neq x_2 .$$

Hasonlóan az impulzus-sajátfüggvényekre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{s_{p_1}(x)}\, s_{p_2}(x)\, dx = \text{állandó} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(p_2 - p_1)x} = \text{állandó} \cdot \delta(p_2 - p_1) = 0 , \text{ ha } p_1 \neq p_2 .$$

Belátható, hogy $s_\lambda(x)$ és $s_{\lambda'}(x)$ "skalárszorzata" mindig $\delta(\lambda - \lambda')$-vel arányos. Az ortogonalitási összefüggést felhasználhatjuk arra, hogy a normálhatatlanság miatt eddig még le nem rögzített arányossági tényezőnek határozott értéket adjunk. Válasszuk a sajátfüggvények együtthatóját úgy, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{s_\lambda(x)}\, s_{\lambda'}(x) = d\lambda - \lambda'$$

teljesüljön. (Ezt szokás Dirac-deltára normálásnak is nevezni.)
Ehhez a hely-sajátfüggvényeknél

$$s_{x_0}(x) = \delta(x - x_0) ,$$

az impulzusnál pedig az

$$s_{p_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0 x}$$

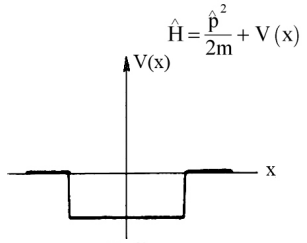
választás szükséges.

Fontos tétel, hogy a folytonos spektrumú önadjungált operátorok sajátfüggvényei is teljes rendszert alkotnak, azaz a fenti "normálás" mellett

$$\int d\lambda\, s_\lambda(x)\overline{s_\lambda(y)} = \delta(x-y)\ .$$

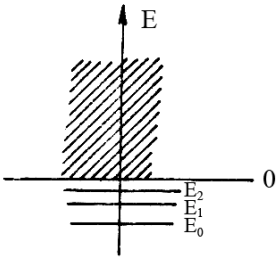
Vannak olyan operátorok melyeknek a spektruma egyaránt tartalmaz diszkrét és folytonos részeket. Ilyen például egy derékszögű potenciálgödörhöz tartozó "Hamilton-operátor:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$$



62. ábra

Ennek az operátornak (a gödör paramétereitől és a részecske tömegétől függően) néhány diszkrét energia-sajátértéke van (kötött állapotok), ezenkívül folytonos spektruma az $E > 0$ tartományban (szórási állapotok). A diszkrét sajátértékekhez tartozó hullámfüggvények normálhatóak, a szórás állapotok azonban nem. Különkülön egyikük sem alkot teljes rendszert csupán együtt:



63. ábra

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x)\overline{s_n(y)} + \int_{-\infty}^{\infty} dE\, s_E(x)\overline{s_E(y)} = \delta(x-y)\ .$$

Hasonló tulajdonságú a hidrogénatom Hamilton-operátora:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) \equiv -\frac{1}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|\vec{r}\,|}\ ,$$

melynek végtelen sok kötött állapota van, de ezenkívül szórásállapotok is léteznek:

$$\sum_{\ell,m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{n\ell m}(\vec{r})\overline{\varphi_{n\ell m}(\vec{r}\,')} + \int_0^{\infty} dE\,\varphi_{E,\ell m}(\vec{r})\overline{\varphi_{E,\ell m}(\vec{r})'}\right\} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

(A forgási invariancia miatt az alapállapot kivételével valamennyi energiaszint elfajult, a degenerált nívókat célszerű az impulzusnyomaték-kvantumszámokkal jellemzi.)

Annak érdekében, hogy a folytonos spektrumot - és ezzel együtt a disztribúciók használatának szükségességét - elkerüljük, szokás a kvantummechanikai rendszert <u>képzeletben</u> egy L hosszúságú "dobozba" bezárni, vagy a hullámfüggvény L szerinti periodicitását előírni. Ha L sokkal nagyobb, mint a fizikai rendszer jellemző méretei, akkor a kétféle tárgyalásnak ugyanazt az eredményt kell adnia. Mi a kapcsolat a kétféle leírásmód között? Tekintsünk például egy szabad részecskét, melynek állapotait jól jellemzi az impulzus:

$$\hat{p}s_k(x) = ks_k(x)\ ;\ \hat{H}\,s_k(x) \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m}s_k(x) = \frac{k^2}{2m}s_k(x)\,,\quad \text{ahol}\quad s_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}.$$

Ha a részecskét egy L hosszúságú dobozba zárjuk és periodikus határfeltételeket írunk elő a hullámfüggvényre, akkor k lehetséges értékei:

$$k_n = \frac{2\pi}{L}n\,.\quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\ .$$

A normált sajátfüggvények

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik_n x} \equiv \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\,s_{k_n}(x)\ .$$

A teljességi összefüggés a diszkrét spektrumra:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} = \delta(x-y)\ .$$

Ugyanezt a nem normált s_{k_n}, függvényekkel megfogalmazva:

$$\delta(x-y) = \sum_n \frac{2\pi}{L}s_{k_n}(x)\overline{s_{k_n}(y)}\ .$$

Mivel L a fizikailag érdekes hosszúságokhoz képest nagyon nagy, a lehetséges nívók nagyon közel, $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ távolságban helyezkednek el. A szummát integrállal közelítve

$$\delta(y-x)=\sum_{\{k_n\}}\Delta k\cdot s_{k_n}(x)\overline{s_{k_n}(y)}\approx\int_{-\infty}^{\infty}dk\cdot s_k(x)\overline{s_k(y)}$$

éppen a folytonos spektrumú (Dirac-deltára normált) állapotokkal megfogalmazott teljességi összefüggést kapjuk. Más, bonyolultabb operátoroknál is hasonló a helyzet, mindössze annyi a különbség, hogy az állapotsűrűség nem állandó, hanem a sajátérték függvénye.

A Dirac-deltára normált állapotok használata a hullámfüggvény valószínűségi értelmezésénél is nagyon kényelmes. A diszkrét spektrum esetén egy

$$\left|\psi(x)\right\rangle=\sum_n a_n\left|\varphi_n(x)\right\rangle\qquad\left(\text{ahol }\hat{F}\varphi_x=\lambda_n\varphi_n(x)\right)$$

állapotban annak valószínűsége, hogy az $\hat{F}$ fizikai mennyiség mért értéke éppen λ_n, az $|a_n|^2$-tel egyenlő. Folytonos spektrumnál a

$$\left|\psi(x)\right\rangle=\int d\lambda\ a(\lambda)\left|\varphi_\lambda(x)\right\rangle$$

állapotban $|a(\lambda)|^2$ annak a <u>valószínűség-sűrűségét</u> adja meg, hogy a $\varphi_\lambda(x)$-nek megfelelő fizikai mennyiség mért értéke λ és $\lambda+d\lambda$ közé essen.

A harmadik témakör, ahol a disztribúciók a kvantummechanikában alkalmazásra találnak, az a lineáris operátorok ún. koordináta-reprezentációja. Az $f(x)\xrightarrow{A}g(x)$ lineáris leképezés bizonyos esetekben előállítható integrál alakban:

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}dy\ A(x,y)\,f(y)\ .$$

Az A(x,y) függvényt magfüggvénynek, vagy másnéven az $\hat{A}$ operátor koordináta-reprezentációjának nevezik. A fenti alak - amely csak akkor értelmes, ha az A(x,y) függvény bizonyos feltételeknek tesz eleget - nyilvánvalóan lineáris leképezést valósít meg. Nem minden lineáris operátor állítható elő azonban koordináta-reprezentációban, legalábbis ha nem akarunk kilépni a hagyományos függvényfogalomból. Sajnos már olyan egyszerű operátoroknak sem létezik magfüggvénye, mint az egységoperátor, a hely- vagy az impulzus operátora, márpedig a legtöbb kvantummechanikai rendszer Hamilton-operátora ilyenekből épül fel.

Ha az A(x,y) magfüggvényt disztribúciónak tekintjük, akkor már létezik az említett operátorok koordináta-reprezentációja:

$$\hat{E}\to\delta(x-y),\qquad\text{hiszen}\qquad\int dy\ \delta(x-y)\,f(y)=f(x)\ ,$$

$$\hat{x}\to x\delta(x-y),\qquad\text{hiszen}\qquad\int dy\ x\delta(x-y)\,f(y)=xf(x),$$

$$\hat{p}\to-i\delta'(x-y),\quad\text{hiszen}\quad-i\int\delta'(x-y)\,f(y)\,dy=-i\int\delta(x-y)\,f'(y)\,dy=-if'(x)\ .$$

Általában

$$f\left(\hat{x}\right)\to f(x)\,\delta(x-y),$$

$$\hat{p}^n\to(-i)^n\delta^{(n)}(x-y)$$

Mivel két operátor szorzata koordináta-reprezentációban

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}dz\ A(x,z)\,B(z,y)$$

módon állítható elő, egy $\hat{A}$ operátor inverzének azt a $\hat{B}$-t nevezzük, melyre:

$$\int_{-\infty}^{\infty}A(x,z)\,B(z,y)=\delta(x-y)\ .$$

Ha egy $\hat{D}$ operátor koordináta-reprezentációban D(x,y), akkor egy G(y) függvényre a hatása:

$$\left(\hat{D}G\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, D(x,y)\, G(y)\ .$$

Ha G egy z paramétertől is függ és megköveteljük, hogy

$$\left(\hat{D}G\right)(x) = \delta\,(x - z)$$

teljesüljön - vagyis G a $\hat{D}$ operátor Green-függvénye -, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, D(x,y)\, G(y,z) = \delta\,(x - z)$$

Láthatjuk, hogy a Green-függvény nem más, mint a $\hat{D}$ operátor inverzének koordináta-reprezentációja.

FELADATOK:

3.6.1. Határozzuk meg egy szabad részecske Schrödinger-egyenletének Green-függvényét!

3.6.2. Egy m tömegű részecskére állandó F erő hat. Határozzuk meg a kvantummechanikai probléma "normált" hullámfüggvényeit! (Egydimenziós mozgás.)

3.6.3. Határozzuk meg egy szabadon mozgó részecske hullámfüggvényeit melyek az energia-változóban Dirac-deltára vannak normálva! Mi az általános kapcsolat egy folytonos spektrumú $\hat{F}$ operátor és ennek valamilyen f($\hat{F}$) függvényének sajátfüggvényei között?

IV. A FELADATOK MEGOLDÁSA

2.1.1. Nem, mert $\varphi \in \mathcal{D}$ esetén $\varphi'(x)$ is eltűnik egy véges intervallumon kívül (azaz kompakt tartójú) és ha $\varphi(x)$ akárhányszor deriválható, akkor $\varphi'(x)$ is akárhányszor deriválható.

2.1.2. Igen, hiszen a D-térbeli konvergencia definíciója szerint $\varphi_n(x)$ valamennyi deriváltja egyenletesen tart $\varphi(x)$ megfelelő deriváltjaihoz, emiatt ugyanez teljesül $\varphi'_n(x)$ és $\varphi'(x)$-re is. Másrészt, ha valamennyi $\varphi_n(x)$ tartója egy véges intervallumba foglalható, akkor ugyanez érvényes $\varphi'_n(x)$ tartóira is.

2.2.1. A disztribúciók lineáris kombinációjának, eltoltjának és nyújtottjának definíciója szerint

$$\langle \varphi, \sin x + 3\delta(2x-5)\rangle = \langle \varphi, \sin x\rangle + 3\langle \varphi, \delta(2x-5)\rangle = \langle \varphi, \sin x\rangle + 3\langle \varphi(x+5), \delta(2x)\rangle =$$

$$= \langle \varphi, \sin x\rangle + \frac{3}{2}\left\langle \varphi\left(\frac{x+5}{2}\right), \delta\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\varphi(x)\sin x + \frac{3}{2}\varphi\left(\frac{5}{2}\right).$$

2.2.2. Mivel

$$\langle \varphi, g(x)\delta\rangle = \langle \varphi g(x), \delta\rangle = \varphi(0)\,g(0) = g(0)\langle \varphi(x), \delta\rangle,$$

így

$$g(x)\delta = g(0)\delta .$$

2.2.3. Reguláris esetben

$$\int_{-\infty}^{\infty} ,ph(x)\,f[u(x)]\,dx = \int_{u(-\infty)}^{u(+\infty)} \varphi[x(u)]\,f(u)\frac{dx(u)}{du}\,du .$$

Ennek alapján próbálkozhatunk a

$$\langle \varphi(x), f[u(x)]\rangle = \langle x'(u)\,\varphi[x(u)], f(u)\rangle$$

definícióval. Ez biztosan értelmes definíció, ha u(x) akárhányszor deriválható, szigorúan monoton függvény és a teljes számegyenest a teljes számegyenesbe képezi le. Ezzel

$$\langle \varphi, f[sh(x-3)]\rangle = \left\langle \varphi(\operatorname{arsh} u + 3)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \delta(u)\right\rangle = \varphi(3),$$

tehát

$$\delta[sh(x-3)] = \delta(x-3) .$$

2.2.4. Ha $a(x)\,f = 0$, akkor $\langle \varphi(x), a(x)\,f]\rangle = \langle a(x)\,\varphi(x), f\rangle = 0$, tehát f minden olyan próbafüggvényre eltűnik, amelyik az $x = x_0$ pontban nulla értéket vesz fel. Mivel az ilyen tulajdonságú próbafüggvények felírhatók $(x-x_0)\,\psi(x)$ ($\psi(x)\in\mathcal{D}$) alakban, és viszont, ezért

$$\langle (x-x_0)\,\psi(x), f\rangle = \langle \psi(x), (x-x_0)\,f\rangle = 0 \quad \text{minden } \psi \in \mathcal{D}\text{-re},$$

tehát

$$(x-x_0)\,f = 0 .$$

Ennek az egyenletnek - mint azt beláttuk - a legáltalánosabb megoldása $f = \alpha\delta(x-x_0)$. Amennyiben a(x) első deriváltja eltűnne az x_0 pontban, úgy a megoldás

$$f = \alpha_1\,\delta(x-x_0) + \alpha_2\,\delta'(x-x_0)$$

lenne stb.

2.3.1. A definíciók alapján:

$$\langle \varphi, [f\,g(x)]'\rangle = \langle -\varphi', f\,g(x)\rangle = \langle -\varphi'(x)\,g(x), f\rangle = \langle -[\varphi(x)\,g(x)]', f\rangle + \langle \varphi(x)\,g'(x), f\rangle =$$

$$\langle \varphi(x)\, g(x)\,,\, f' \rangle + \langle \varphi(x)\,,\, f\, g'(x) \rangle = \langle \varphi\,,\, f'\, g + g'\, f \rangle\,.$$

2.3.2. $\langle \varphi\,,\, x\delta' \rangle = \langle x\varphi(x)\,,\delta' \rangle = \left\langle -\left[x\varphi(x)\right]'\,,\delta \right\rangle = -\left[\varphi(x) + x\varphi'(x)\right]_{x=0} = -\varphi(0) = \langle \varphi\,,\, -\delta \rangle\,,$

tehát $x\delta' = -\delta$.

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk az $x\delta = 0$ egyenlőség deriválásából is, ha felhasználjuk az előző feladat megoldását.

2.3.3. Lássuk be, hogy ha $f_1' = g$ és $f_2' = g$, akkor $f \equiv f_1 - f_2 =$ állandó. Mivel $f' = 0$ annyit jelent, hogy

$$\langle \varphi(x)\,,\, f' \rangle = -\langle \varphi'(x)\,,\, f \rangle = 0\,,$$

vagyis $f = 0$ a $\psi = \varphi'$ alakú próbafüggvényre. Az ilyen $\psi(x)$ függvényeket az jellemzi, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi(x) = 0\,.$$

Válasszunk ki egy rögzített $\varphi_0 \in D$ függvényt, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_0(x) = 1\,.$$

Ekkor minden $\varphi \in D$ felírható

$$\varphi = \psi + \alpha\, \varphi_0(x)$$

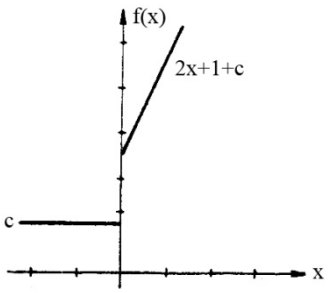
alakban, ahol $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \langle \varphi\,,\, 1 \rangle$ Mivel $\langle \psi\,,\, f \rangle = 0$, ezért egy tetszőleges $\varphi \in \mathcal{D}$–re

$$\langle \varphi\,,\, f \rangle = \alpha \langle \varphi_0\,,\, f \rangle = \alpha \cdot \text{állandó} = \text{állandó} \cdot \langle \varphi\,,\, 1 \rangle\,,$$

tehát $f =$ állandó és éppen ezt akartuk bizonyítani.

2.3.4. Mivel $\delta = \Theta'$ és a $2\Theta(x)$ reguláris disztribúció függvényként integrálható, így

$$f = \Theta(x) + \int 2\Theta(x)\, dx = \Theta(x) + 2x\Theta(x) + C\,.$$



64. ábra

2.3.5. $f_n \xrightarrow{D'} f$ annyit jelent, hogy minden $\varphi \in D$-re $\langle \varphi\,,\, f_n \rangle \to \langle \varphi\,,\, f \rangle$.

Mivel $\varphi \in D$-ből következik, hogy $\varphi'(x) \in D$, ezért:

$$\langle \varphi\,,\, f_n' \rangle = \langle -\varphi'(x)\,,\, f_n \rangle \to \langle -\varphi'(x)\,,\, f \rangle = \langle \varphi\,,\, f' \rangle\,,$$

tehát valóban fennáll, hogy $f_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} f'$.

2.3.6. Tekintsük a

$$g_n(x) = \frac{1}{n} e^{inx}$$

reguláris disztribúciósorozatot. Mivel $g_n(x)$ mint függvénysorozat egyenletesen tart a nullához, ezért

$$\langle \varphi\,,\, g_n(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{n} e^{inx}\, dx \to 0\,.$$

Tehát

$$\frac{1}{n} e^{inx} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0\,,$$

ahonnan deriválással közvetlenül adódik, hogy

$$e^{inx} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0\,.$$

Ezt k-szor deriválva, majd a valós és a képzetes részeket szétválasztva az

$$n^k \sin nx \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0,$$

$$n^k \cos nx \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$$

összefüggéseket kapjuk.

2.3.7. Ha a $\varphi(x)$ az x_0 pont tetszőlegesen kicsiny környezetében azonosan nulla, akkor $\left\langle \varphi , \delta^{(n)}(x-x_0)\right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(x_0) = 0$. Tehát hatása nulla az $\delta'(x-x_0)$ pontot nem tartalmazó nyílt halmazon, emiatt a tartója az x_0 pont. Speciálisan δ' tartója az origó.

2.3.8. Az $f_0 = \mathbb{P}\dfrac{1}{a(x)}$ disztribúció nyilván megoldása a vizsgált egyenletnek, hiszen

$$\left\langle \varphi , a(x) f_0\right\rangle = \left\langle \varphi(x) a(x) , f_0\right\rangle = \mathbb{P}\int \varphi(x) a(x) \frac{1}{a(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \left\langle \varphi , 1\right\rangle .$$

Az $f-f_0$ disztribúció viszont kielégíti az

$$a(x)\left(f - f_0\right) = 0$$

egyenletet, ahonnan következik (lásd. 2.2.4. feladat megoldását), hogy

$$f - f_0 = c\delta(x - x_0)$$

Az általános megoldás tehát

$$f = \mathbb{P}\frac{1}{a(x)} + c\delta(x - x_0) .$$

2.3.9. A definíció szerint

$$\left\langle \varphi(x) , \left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \right\rangle = \left\langle -\varphi(x) , \mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} -\varphi'(x)\frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} -\varphi'(x)\frac{1}{x} dx \right\}.$$

Parciálisan integrálva

$$\left\langle \varphi(x) , \left(\mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\left(\frac{-1}{x^2}\right) dx + \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}$$

A második tag számlálóját helyettesíthetjük $2\varphi(0)$-lal, hiszen

$$\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = \left[\varphi'(0) + \vartheta(\varepsilon)\right] - \left[\varphi'(0) + \vartheta(\varepsilon)\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \cdot^{1}$$

Limesz-eljárás nélkül úgy írhatjuk fel $\mathbb{P}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hatását, ha $\varphi(x)$-t egy páros és egy páratlan függvény összegére bontjuk:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$$

A páros részre szimmetria-okokból

$$\left\langle \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} , \mathbb{P}\frac{1}{x}\right\rangle = 0,$$

a páratlan résznél pedig - mivel $\dfrac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2x}$ az origóban is véges - elhagyhatjuk a főértékintegrálás jelét:

$$\left\langle \varphi(x) , \mathbb{P}\frac{1}{x}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

---

[1] Megjegyzés: ϑ a Landautól származó ordó-jelölés. Az analízisben és alkalmazásaiban függvények becslését megkönnyítő jelölésmód. Leggyakrabban hibatagok menetközbeni becslésére alkalmazzuk, pl. $(x+1)^2 = x^2 + \vartheta(x)$ $x \to \infty$ mellett, hiszen a hibatag $2x + 1$, legfeljebb $3x$ minden $x \geq 1$-re. Másik pl.: $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x} + \vartheta\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Hasonló alakot $\frac{d}{dx}\left(\mathbb{P}\frac{1}{x}\right)$ -nél úgy kaphatunk, ha felhasználjuk a

$$\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx$$

azonosságokat. Ezekkel

$$\left\langle \varphi(x)\,,\ \frac{d}{dx}\left(\mathbb{P}\frac{1}{x}\right)\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right\} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{-x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{-x^2}\left(\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)\right).$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy az integrandus véges határértékkel rendelkezik, ha $\varepsilon \to 0$.

2.4.1. Minden olyan lokálisan integrálható függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{véges} \neq 0,$$

alkalmas egy delta sorozat megadására. A

$$g(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy}\, f(x)$$

függvény integrálja ugyanis 1, és ugyanez teljesül az x tengely mentén n-edrészére zsugorított, y irányban pedig az n-szeresére nyújtott g(x) függvényre is:

$$g_n(x) = n\cdot g(nx)\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = 1$$

Másrészt $g_n(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$, mert akármilyen kicsiny (de rögzített) ε-ra

$$\left\langle \varphi(x)\,,\ g_n(x)\right\rangle = \int_{|x|<\varepsilon} \varphi(x)\,g(nx)\,d(nx) + \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\,g(nx)\,d(nx) =$$

$$\int_{|y|<n\varepsilon} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) g(y) + \int_{|y|>n\varepsilon} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \varphi(\xi)\int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} g(y)\,dy + \varphi(\eta)\int_{|y|>n\varepsilon} g(y)\,dy.$$

A második integrál $\varphi(x)$ korlátossága miatt $n\to\infty$-re nullához tart, az első pedig $\varphi(\xi)$-hez, ahol $|\xi| < \varepsilon$. Mivel ε tetszőlegesen kicsiny lehet, ezért

$$\left\langle \varphi(x)\,,\ g_n(x)\right\rangle \to \varphi(0) = \left\langle \varphi\,,\delta\right\rangle.$$

Például a $g(x) = \Theta(x)e^{-x}$-ből képzett delta-sorozat:

$$g_n(x) = n\Theta(x)e^{-nx}.$$

Egy másik példa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

felhasználásával

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{2n^2}{\pi}}\,\sin(nx)^2 \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta\,.$$

2.4.2. A matematikai analízisből ismert, hogy a

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{iC_n}{n}\,e^{-inx} + C_0\cdot x = F(x)$$

sor egyenletesen konvergens és az F(x) függvény f(x) primitív függvénye. A fenti

összefüggést disztribúció-értelemben deriválva, és kihasználva, hogy a $\mathcal{D}'$ térben a deriválás művelete lineáris és folytonos, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{-N}^{N} C_n e^{-inx} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}'} f(x)$$

2.4.3. A vizsgált disztribúció hatása egy $\varphi(x)\in\mathcal{D}$ próbafüggvényre:

$$\left\langle \varphi(x)\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{isx} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds \left\langle \varphi(x)\ ,\ e^{isx} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) e^{isx} = 2\pi\varphi(0)$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy $\varphi(x)$-re érvényes a

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi(x) e^{is(x-y)}$$

Fourier-integrál előállítás. Így tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{isx} = 2\pi\delta(x).$$

2.4.4. $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi) e^{-inx} dx = \begin{cases} \frac{i}{n}, & \text{ha } n \neq 0, \\ 0, & \text{ha } n = 0. \end{cases}$$

Az f(x) reguláris disztribúciót előállítja a Fourier-sora (lásd a 2.4.2. feladatot):

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq\infty)}}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}$$

Deriválva és kihasználva, hogy

$$f'(x) = 1 - 2\pi\left[\delta(x) + \delta(x-2\pi) + \delta(x+2\pi) + \delta(x-4\pi) + \ldots\right],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k)$$

adódik. Ennek az összefüggésnek a deriválásából kapjuk, hogy:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{inx} = -2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x-2\pi k)$$

2.5.1. A definíció értelmében

$$\left\langle \varphi(x)\ ,\ f * \delta(x-x_0) \right\rangle = \left\langle \psi(x)\ ,\delta(x-x_0) \right\rangle = \psi(x_0),$$

ahol

$$\psi(x_0) = \left\langle \varphi\left(y+x_0\right)\ ,\ f(y) \right\rangle = \left\langle \psi(y)\ ,\ f(y-x_0) \right\rangle = \left\langle \psi(x)\ ,\ f(x-x_0) \right\rangle.$$

Tehát

$$f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)$$

A fordított sorrendben képzett konvolúció ugyanezt az eredményt adja:

$$\left\langle \varphi(x)\ ,\delta(x-x_0) * f(x) \right\rangle = \left\langle \left\langle \varphi(x+y)\ ,\delta(x-x_0) \right\rangle\ ,\ f(y) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \varphi\left(x_0+y\right)\ ,\ f(y) \right\rangle = \left\langle \varphi(y)\ ,\ f(y-x_0) \right\rangle.$$

2.5.2. Mivel $\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$ lokálisan integrálható függvény, az önmagával képzett konvolúcióját közvetlenül megkaphatjuk integrálással:

$$\left(\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * \left(\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \Theta\left(\xi\right)\frac{1}{\sqrt{\xi}} \cdot \Theta\left(x-\xi\right)\frac{1}{\sqrt{x-\xi}} =$$

$$= \Theta(x) \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(x-\xi)}} = \pi\Theta(x).$$

Ennek felhasználásával az

$$f * \left(\Theta(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = T\sqrt{2g}\,\Theta(x)$$

konvolúció-egyenlet megoldása

$$f(x) = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{x}}\,\Theta(x).$$

Mivel $f(\xi) = \dfrac{1}{\sin\alpha(\xi)}$, a görbe érintőjének hajlásszögére

$$\sin\alpha = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{\xi}{2g}} \qquad \left(\mathrm{tg}\alpha = \frac{d\xi}{d\eta} \right)$$

adódik. Ez a keresett $\xi(\eta)$ függvényre nézve egy differenciálegyenlet, melynek megoldását paraméteres alakban célszerű megadni. Vezessük be független változónak az α szöget

$$\xi(\alpha) = \frac{2gT^2}{\pi^2}\sin^2\alpha \equiv 2R\sin^2\alpha = R(1-\cos 2\alpha)$$

és határozzuk meg $\eta(\alpha)$-t! Mivel

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{d\xi}{d\alpha}}{\frac{d\eta}{d\alpha}} = \frac{4R\sin\alpha\cos\alpha}{\eta'(\alpha)},$$

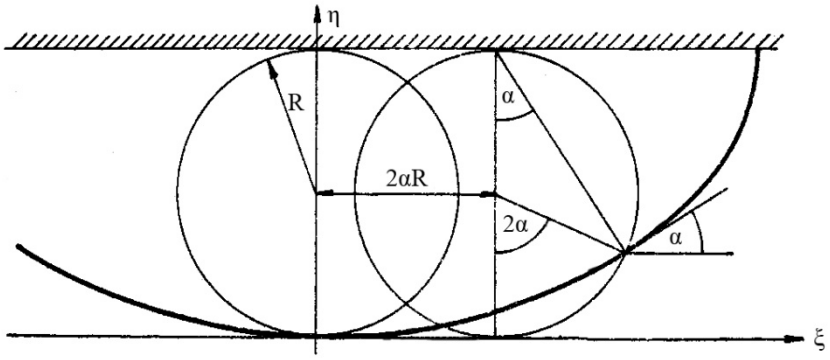
így

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = 4R\cos^2\alpha = R(2+2\cos 2\alpha)$$

vagyis

$$\eta(\alpha) = 2R\alpha + R\sin 2\alpha.$$

Az $\eta(\alpha)$ és $\xi(\alpha)$ összefüggések egy ciklois paraméteres egyenletei.



65. ábra

(A ciklois egy olyan görbe, melyet egy egyenesen gördülő kör valamely kerületi pontja ír le. Jelen esetben a kör sugara $r = \dfrac{gT^2}{\pi^2}$ és az $\eta = 2R$ egyenes alatt gördül.)

2.6.1. Az $r \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} = 0$ pont kivételével az $f(r) \equiv r^{2-m}$ függvény mindenhol deriválható és fennáll, hogy

$$\Delta f(r) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} f(r) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(f'(r)\frac{x_k}{r} \right) =$$

$$= f''(r) + \frac{m-1}{r} f'(r) = \frac{1}{r^{m-1}} \left(r^{m-1} \frac{df}{dr} \right) \equiv 0.$$

Emiatt a Δf disztribúció-tartója csak az $r = 0$ pont lehet. Határozzuk meg Δf hatását egy $\varphi(\vec{x})$ próbafüggvényre!

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), \Delta f \right\rangle = \left\langle \Delta\varphi, f \right\rangle = \int d^m x \, f(r) \, \Delta\varphi(\vec{x}).$$

Mivel a fenti integrál konvergens, kihagyhatjuk az origónak egy infinitezimálisan kicsiny környezetét:

$$\left\langle \varphi, \Delta f \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r>\varepsilon} d^m x \, f(r) \, \Delta\varphi(\vec{x})$$

Alkalmazva a Gauss-tételt:

$$\int_{r>\varepsilon} d^m x \, f(r) \, \Delta\varphi = \int_{r>\varepsilon} d^m x \, \varphi(\vec{x}) \, \Delta f(r) + \oint \operatorname{grad}\varphi(\vec{x}) \frac{1}{r^{m-2}} \overrightarrow{dS} - \oint \varphi(\vec{x}) \operatorname{grad} \frac{1}{r^{m-2}} \overrightarrow{dS}.$$

Mivel $\varphi(\vec{x})$ kompakt tartójú, a felületi integrálok az $r = \varepsilon$ sugarú m dimenziós gömbfelületre veendők; $\overrightarrow{dS}$ a gömb középpontja felé mutató felületelem-vektor. A térfogati integrál $\Delta f \equiv 0$ miatt azonosan nulla, az első felületi integrál pedig $\varepsilon \to 0$ limeszben tűnik el, hiszen $\operatorname{grad}\varphi$ korlátos és $\left| \frac{1}{r^{m-2}} \overrightarrow{dS} \right| \sim \frac{1}{\varepsilon^{m-2}} \varepsilon^{m-1} \sim \varepsilon \to 0$. Az utolsó tagban $\varphi(\vec{x})$ valamilyen átlagos $\vec{x}_0$ pontban véve kiemelhető az integrál elé (középértéktétel), a maradék pedig:

$$-\oint \operatorname{grad} \frac{1}{r^{m-2}} \overrightarrow{dS} = -\oint \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \varepsilon^{m-1} \, d\Omega^{(m)} = -(m-2)\Omega^{(m)},$$

ahol $\Omega^{(m)}$ az m-dimenziós egységgömb felszíne. Mivel $\varepsilon \to 0$ limeszben

$$\varphi(\vec{x}_0)\Big|_{|\vec{x}_0| = \varepsilon} \to \varphi(0) \text{ így } \left\langle \varphi, \Delta \frac{1}{r^{m-2}} \right\rangle = -(m-2)\Omega^{(m)} \left\langle \varphi(\vec{x}), d\vec{x} \right\rangle.$$

Három dimenzióban az ismert $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta$ azonosságot kapjuk.

2.6.2. Az előző feladat megoldásához hasonlóan $m = 2$ dimenzióban:

$$\Delta(\ln r) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln\sqrt{x^2 + y^2} \equiv 0, \quad \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0,$$

emiatt

$$\left\langle \varphi, \Delta \ln r \right\rangle = \left\langle \Delta\varphi, \ln r \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{r>\varepsilon} dxdy \, (\ln r) \, \Delta\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\iint_{r>\varepsilon} \varphi \Delta(\ln r) \, dxdy + \oint_{r=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \ln r \, ds - \oint_{r=\varepsilon} \frac{d}{dr}(\ln r) \, ds \right] =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\vec{x}_0)\Big|_{|\vec{x}_0| = \varepsilon} \cdot \oint \frac{1}{r} \, ds = -2\pi\varphi(0).$$

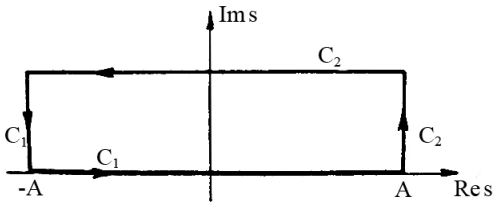
Tehát

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln\sqrt{x^2 + y^2} = -2\pi\delta(\vec{x}).$$

2.7.1. Ha $\varphi(s) \in Z$, akkor létezik olyan m és C_q, hogy

$$\left| S^q \varphi(s) \right| < C_q \, e^{m|\operatorname{Im} s|} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots)$$

Emiatt $x > m$ esetén az



66. ábra

$$\int_{C_1} \varphi(s)\, e^{ixs}\, ds + \int_{C_2} \varphi(s)^{ixs}\, ds$$

integrálok közül a második $A \to \infty$ limeszben nullához tart. Tekintve, hogy a C_1-re vett integrál határértékben $2\pi\, \widetilde{\varphi}(x)$-et ad, a két integrál összege viszont nulla, hiszen $\varphi(s)e^{isx}$ egész függvény, így

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \text{ha } x > m.$$

Hasonlóan látható be, hogy $\varphi(x)$ $x < m$ esetben is eltűnik, tehát kompakt tartójú.

2.7.2. Nem, mert $f \in S$-hez az is szükséges, hogy $f(x)$ deriváltjai is minden hatványnál gyorsabban nullához tartsanak, ha $|x| \to \infty$. (Ha ezt nem követelnénk meg, akkor a deriválás művelete kivezetne S-ből!)
Mivel

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(e^{x^2}\right)$$

nem tart nullához $x \to \infty$-re, ezért $f(x) \notin S$.

2.7.3. Konvergens, hiszen minden $\varphi(s) \in Z$-re

$$\left\langle \varphi(s)\,,\, f_N \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} \left.\frac{d\varphi(s)}{ds}\right|_{s=0} \cdot \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[N \to \infty]{} \varphi(a) = \left\langle \varphi(s)\,, \delta(s-a) \right\rangle,$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \delta^{(n)}(s) \overset{Z'}{=} \delta(s-a)$$

A fentiekben kihasználtuk, hogy $\varphi(s) \in Z$ analitikus függvény melyet előállít a Taylor-sora. Ugyanaz a $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ függvényekről nem mondható el, ezért a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(x)}{n!} a^n$$

disztribúciósorú a $\mathcal{D}'$ térben nem konvergens!

2.7.4. Mivel

$$\ln(x + i\varepsilon) = \ln\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2}},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln(x + i\varepsilon) = \ln|x| + i\pi\Theta(-x)$$

A fenti egyenlőség deriválásából

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \frac{d}{dx}\left[\ln|x| + i\pi\Theta(-x)\right] = \mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\,\delta(x)$$

adódik.

2.8.1. (A megoldást lásd a 67. ábrán!)

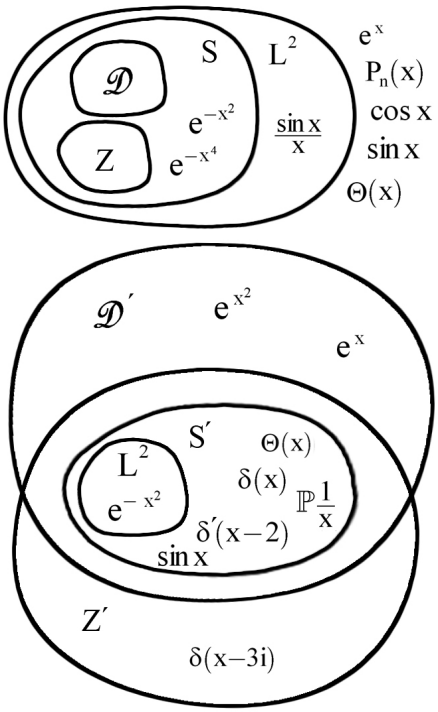
2.8.2. Mivel $\widetilde{e^{ax}} = \sqrt{2\pi}\,\delta(s - ia)$ minden komplex a-ra, ezért

$$\widetilde{\sin(ax)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2i} \widetilde{\left(e^{iax} - e^{-iax}\right)} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-a) - \delta(s+a)\right],$$

$$\widetilde{\cos(ax)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \widetilde{\left(e^{iax} + e^{-iax}\right)} = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-a) + \delta(s+a)\right].$$

2.8.3.

$$\left\langle \varphi(s)\,,\, \widetilde{x^k} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\varphi(s)}\,,\, x^k \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi(s)\, ds =$$



67. ábra

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \widetilde{\left(-i\frac{d}{ds}\right)^k \varphi(s)} = \left(-i\frac{d}{ds}\right)^k \varphi(s)\Bigg|_{s=0} \sqrt{2\pi}\,.$$

Tehát

$$\widetilde{x^k} = \left(-i\frac{d}{ds}\right)^k \delta(s)\sqrt{2\pi}\,.$$

2.8.4. Az előző feladat megoldása szerint

$$\widetilde{\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} x^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-ia)^k}{k!} \delta^{(k)}(s)\sqrt{2\pi}\,.$$

Mivel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} x^k = e^{ax};$$

így

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ia)^k}{k!} \delta^{(k)}(s) = \frac{\widetilde{e^{ax}}}{\sqrt{2\pi}} = \delta(s-ia),$$

mint ahogy azt már a 2.7.3. feladatban más úton beláttuk.

2.8.5. A disztribúciók Fourier-transzformáltjának értelmezése szerint ha

$$g(s) = \widetilde{f(x)}, \text{ akkor}$$

$$\left\langle \widetilde{\varphi}(x)\,,\, f(x)\right\rangle = \left\langle \varphi(s)\,,\, g(s)\right\rangle = \int_{\Gamma} ds\, \varphi(s)\, g(s) = \int_{\Gamma} ds\; g(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x) e^{-isx} dx.$$

Mivel mindkét integrál véges tartományra terjed ki ($\widetilde{\varphi}(x) \in \mathcal{D}$, tehát kompakt tartójú), az integrálások sorrendje felcserélhető:

$$\left\langle \widetilde{\varphi}(x)\,,\, f(x)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-isx} g(s)\, ds$$

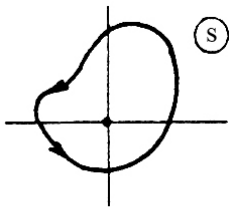
Leolvashatjuk, hogy g(s) inverz Fourier-transzformáltja az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} g(s) e^{-isx} ds$$

függvénnyel megadott reguláris disztribúció. Ez az összefüggés nagyon hasonló a függvények inverz Fourier-transzformálásához, a különbség csupán annyi, hogy a valós tengely helyett azon görbe mentén kell integráljuk, amely a $g \in Z'$ analitikus funkcionál értelmezésében is szerepelt.

Egy egyszerű példaként tekintsük a

$$\left\langle \widetilde{\varphi}(s)\,,\, \delta\right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{s} \varphi(s)\, ds$$



68. ábra

delta-disztribúciót. Ez az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

konstans függvény (reguláris disztribúció) Fourier-transzformáltja.

A feladat megoldásánál lényeges szerepet játszott az x és az s szerinti integrálások felcserélhetősége. Ez nemcsak véges Γ görbék esetében tehető meg, hanem olyankor is, amikor Γ végtelen, de akármilyen véges m-re az

$$e^{m(\mathrm{Im}\, s)} g(s)$$

függvény abszolút integrálható.

2.8.6. Előállítható, hiszen

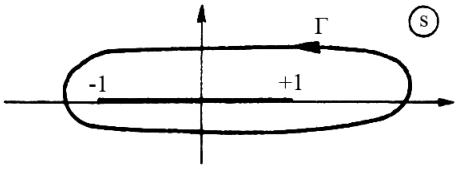
$$\int_{-1}^{1} ds\,\varphi(s) = \int_{-1}^{1} ds' \left\langle \varphi(s), \delta\left(s - s'\right)\right\rangle$$

és a δ disztribúció előállítható zárt görbére vett integrál segítségével.

$$\left\langle \varphi(s), \delta\left(s - s'\right)\right\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(s)\frac{1}{s - s'}\,ds$$

tehát

$$\int_{-1}^{1} ds\,\varphi(s) = \int_{\Gamma} ds\,\varphi(s)\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{ds'}{s - s'} = \int_{\Gamma} ds\,\varphi(s)\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{s-1}{s+1}.$$



69. ábra

A Γ görbét olyanra kell választanunk, hogy a (-1, +1) intervallumot teljesen körüljárja, pl. így:
Ha Γ-t ráhúzzuk a vágásra és kihasználjuk, hogy a logaritmus függvény ugrása a vágás mentén 2πi, úgy visszakapjuk a kiindulási alakot.

2.7.8. A definíció értelmében

$$\left\langle \varphi(s), \widetilde{e^{x^2}}\right\rangle = \left\langle \widetilde{\varphi(s)}, e^{x^2}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{x^2}\,\widetilde{\varphi}(x).$$

Használjuk ki, hogy minden véges x-re

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\frac{s^2}{4} - isx}\,ds = e^{x^2}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\left(\frac{s}{2} - ix\right)^2}\,ds \underset{\left(s = it \text{ helyettesítéssel}\right)}{=} ie^{x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{2} + x\right)^2}\,dt = 2i\sqrt{\pi}\,e^{x^2}.$$

Tehát a vizsgált disztribúció hatása

$$\left\langle \varphi(s), \widetilde{e^{x^2}}\right\rangle = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\widetilde{\varphi}(x)\int_{-i\infty}^{i\infty} ds\, e^{\frac{s^2}{4}}\, e^{-isx}$$

alakba is írható. Az integrálások sorrendje felcserélhető, hiszen

$$\widetilde{\varphi}(x)\, e^{\frac{s^2}{4}}\, e^{-isx}$$

abszolút integrálható a kérdéses tartományon. így azt kapjuk, hogy

$$\left\langle \varphi(s), \widetilde{e^{x^2}}\right\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds\, e^{\frac{s^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(x)\, e^{-isx}\,dx = \frac{1}{i\sqrt{2}}\int_{-i\infty}^{i\infty} ds\,\varphi(s)\, e^{\frac{s^2}{4}}$$

Az e^{x^2} disztribúció Fourier-transzformáltja tehát a

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{s^2}{4}}$$

holomorf függvénnyel és a Γ = (-i∞,i∞) integrációs úttal jellemzett analitikus disztribúció.

2.9.1. A megoldandó konvolució-egyenlet

$$f * \left(\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = T\sqrt{2g}\,\Theta(x)$$

Frourier-transzformáció után

$$\widetilde{f}(s)\cdot\widetilde{\left(\Theta(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = T\sqrt{2\pi}\,\widetilde{\Theta(x)}.$$

Tekintve, hogy

$$\widetilde{\Theta(x)} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{s + i\varepsilon},$$

$$\widetilde{\Theta(x)\cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{i}{2(s + i\varepsilon)}},$$

a keresett disztribúció Fourier-transzformáltja

$$\tilde{f}(s)=\frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\sqrt{\frac{i}{2(s+i\varepsilon)}}\,.$$

Mivel a fenti összefüggés jobb oldalán $\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$ Fourier-transzformátjával arányos kifejezés áll,

$$f(x)=\frac{T\sqrt{2g}}{\pi}\,\Theta(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

(Ugyanezt természetesen megkaphatjuk az inverz Fourier-transzformációs összefüggésből is.) A számítás további menete megegyezik a 2.5.2. feladat megoldásánál leírtakkal.

2.9.2. Hasonlítsuk össze $\widetilde{\overline{f(x)}}$ és $\overline{\widetilde{f(-x)}}$ hatását egy $\varphi(x)\in Z$ próbafüggvényre!

$$\left\langle \varphi(s)\,,\,\widetilde{\overline{f(x)}}\right\rangle=\left\langle \widetilde{\varphi(s)}\,,\,\overline{f(x)}\right\rangle=\overline{\left\langle \overline{\widetilde{\varphi}}(x)\,,\,f(x)\right\rangle},$$

másrészt

$$\left\langle \varphi(s)\,,\,\overline{\widetilde{f(-x)}}\right\rangle=\overline{\left\langle \overline{\varphi(s)}\,,\,\widetilde{f(-x)}\right\rangle}=\overline{\left\langle \overline{\widetilde{\varphi}}(-x)\,,\,f(x)\right\rangle}$$

A fenti két kifejezés akkor egyezik meg, ha minden $\varphi(x)\in Z$-re

$$\overline{\widetilde{\varphi}}(x)=\widetilde{\overline{\varphi}}(-x)$$

Ez viszont fennáll, hiszen

$$\overline{\widetilde{\varphi(x)}}=\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int ds\,\varphi(s)\,e^{isx}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int ds\,\overline{\varphi(s)}\;e^{is(-x)}=\widetilde{\overline{\varphi}}(x)$$

Tehát valóban teljesül az

$$\widetilde{\overline{f(x)}}=\overline{\widetilde{f(-x)}}$$

disztribúció-azonosság.

Bontsuk fel f(x)-t valós és képzetes, illetve ezeket páros és páratlan részek összegére! Az egyes tagok Fourier-transzformáltjáról a fentebb bebizonyított azonosság segítségével a következőket állíthatjuk:

$\widetilde{\text{valós páros}}$ = valós páros, pl: $\widetilde{\cos x}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-1)+\delta(s+1)\right]$,

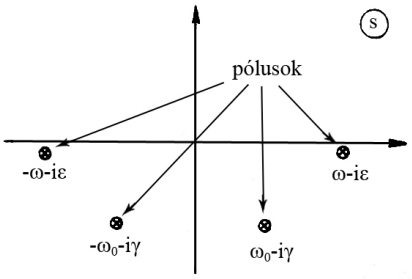
$\widetilde{\text{valós páratlan}}$ = képzetes páratlan, pl: $\widetilde{\sqrt{2\pi}\,\delta'(x)}=-is$,

$\widetilde{\text{képzetes páros}}$ = képzetes páros, pl: $\widetilde{i\frac{1}{x^2}}=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|s|$,

$\widetilde{\text{képzetes páratlan}}$ = valós páratlan, pl: $\widetilde{i\sin x}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s+1)-\delta(s-1)\right]$.

3.1.1. Az oszcillált tömegét egységnyinek választva a mozgásegyenlet

$$y''+\lambda y'+ky=\Theta(t)\sin\omega t.$$



70. ábra

Fourier-transzformálva

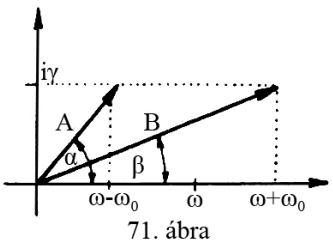
$$\left(-s^2-i\lambda s+k\right)\tilde{y}(s)=\widetilde{\Theta(t)\sin\omega t}=\frac{-\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(s-\omega+i\varepsilon)(s+\omega+i\varepsilon)}$$

adódik, ahonnan - figyelembe véve, hogy a $-s^2-i\lambda s+k=0$ egyenlet gyökei a feladat szövege szerint $s_{1,2}=\pm\omega_0-i\gamma$:

$$\tilde{y}(s)=\frac{\omega}{\sqrt{2\pi}}\;\frac{1}{s-\omega+i\varepsilon}\;\frac{1}{s+\omega+i\varepsilon}\;\frac{1}{s-\omega_0+i\gamma}\;\frac{1}{s+\omega_0+i\gamma}$$

Az inverz Fourier-transzformáció eredménye:

$$y(t)=\Theta(t)\cdot\mathrm{Res}\left\{-i\omega e^{-ist}\frac{1}{(s-\omega)(s+\omega)\left(s-\omega_0+i\gamma\right)\left(s+\omega_0+i\gamma\right)}\right\}=$$



71. ábra

$$=\frac{1}{AB}\left\{\frac{\omega}{\omega_0}e^{-\gamma t}\sin\left(\omega_0 t+\alpha-\beta\right)-\sin\left(\omega_0 t+\alpha+\beta\right)\right\},$$

ahol alkalmaztuk az

$$\omega-\omega_0+i\gamma=Ae^{i\alpha}$$
$$\omega+\omega_0+i\gamma=Be^{i\beta}$$

jelöléseket.

3.1.2. A mozgásegyenlet pozitív időkre:

$$my^{//}(t)=F_0e^{-ct},$$

melyet a kezdőfeltételek figyelembevételével

$$y^{//}=v_0\,\delta(t)+y_0\delta^{/}(t)+\frac{F_0}{m}e^{-ct}\,\Theta(t)$$

módon egészíthetünk ki a teljes $-\infty<t<\infty$ tartományra.

Fourier-transzformáció után

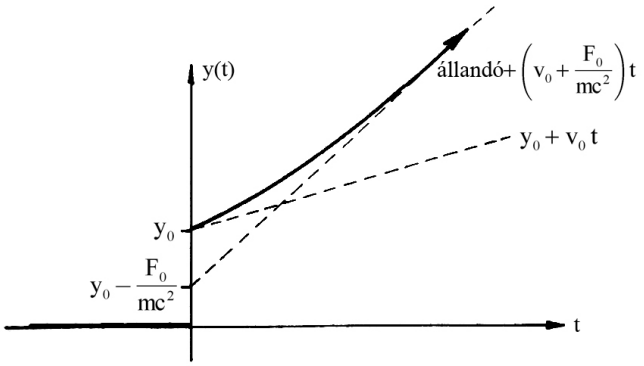
$$-s^2\tilde{y}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[v_0-is\,y_0+\frac{F_0}{m}\frac{1}{c-is}\right]$$

adódik, ahonnan:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int ds\,e^{-ist}\left[\frac{-v_0}{s^2}+\frac{iy_0}{s}-\frac{F_0}{m}\frac{1}{s^2(c-is)}\right].$$

A valós tengelyen (az origóban) levő kétszeres pólus arra figyelmeztet bennünket, hogy a homogén egyenlet $y\equiv 0$ megoldása kis perturbációkra nem stabil, hanem közömbös. A $t<0$-ra eltűnő megoldást úgy kapjuk meg, ha az $s=0$ pólust felülről kerüljük meg:

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}ds\,e^{ist}\left[\frac{-v_0}{s^2}+\frac{iy_0}{s}-\frac{F_0}{m}\frac{1}{s^2(s-ic)}\right]=\Theta(t)\left\{y_0+v_0t+\frac{F_0}{mc^2}\left(e^{-ct}-1+ct\right)\right\}.$$



72. ábra

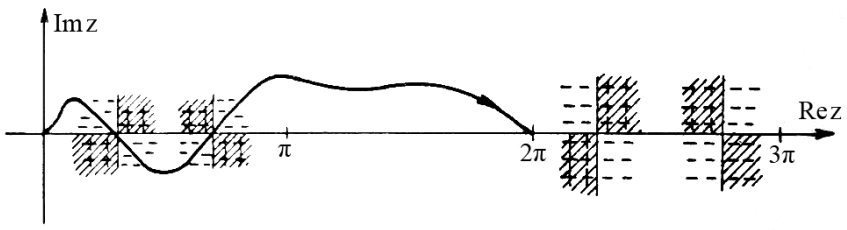
3.2.1. Határozzuk meg először a nyeregpontokat!

$$J_n(an)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dz\,e^{in\left(a\cos z+z-\frac{\pi}{2}\right)}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dz\,e^{i\Phi(z)}$$

A $\Phi(z)$ fázis deriváltja eltűnik a $\sin z-\frac{1}{a}=0$ egyenlet gyökeinél. A $[0,2\pi]$ intervallumon két gyök található, jelöljük a kisebbiket x_0 -lal, akkor a másik $\pi-x_0\cdot\Phi$ második deriváltja a nyeregpontokban

$$\Phi^{//}(z)\Big|_{z=x_0}=-n\sqrt{a^2-1}\quad\text{és}\quad\Phi^{//}(z)\Big|_{z=\pi-x_0}=+n\sqrt{a^2-1},$$

innen leolvashatjuk, hogy a leggyorsabb csökkenési irány a valós z-tengelyt $\pm 45°$-os szögben metszi. A nyeregpont módszer szerint eljárva az ábrán látható



73. ábra

Γ görbébe kell eltolnunk az integrációs utat. A 2π feletti nyeregpontokról azért nem kell tudomást vennünk, mert nincsen olyan görbe z = 0 és z=2π között, amely ezek valamelyikén

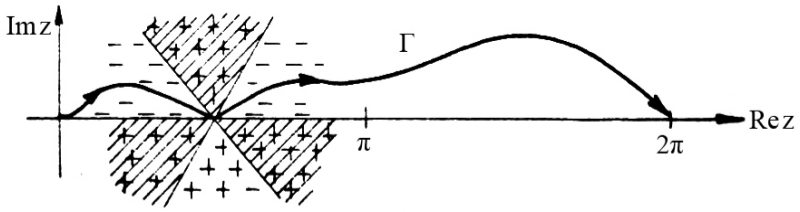
is keresztül haladna, de elkerülné a – jelzésű „veszélyes" tartományokat (A nyeregpontok közelében az integrál Gauss-típusú, szórása $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -nel arányos, tehát $n \to \infty$ limeszben ez a két rész válik dominánsa. Járulékukat összeadva

$$J_n(an) \sim \sqrt{\frac{2\operatorname{tg} x_0}{n\pi}} \cos\left\{n\left(\operatorname{ctg} x_0 + x_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right\} + \vartheta\left(n^{-\frac{3}{2}}\right),$$

adódik. Az a = l eset külön tárgyalást igényel. Ekkor

$$\Phi(z) \approx \Phi(x_0) + \frac{\Phi'''(x_0)}{3!}(z - x_0)^3 = \frac{n\pi}{2} + \frac{n}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

A nyeregpont környékén a kitevő valós része most így néz ki:



74. ábra

A Γ görbe mentén integrálva $n \to \infty$ limeszben ismét egyre inkább a $z = \frac{\pi}{2}$ pont környezete dominál:

$$J_n(n) \sim \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

3.2.2. Az általános módszert követve a

$$P(t) = \gamma t - \alpha,$$
$$Q(t) = t(t-1),$$
$$Z(t) = \frac{1}{t(t-1)} e^{\int \frac{\gamma t - \alpha}{t(t-1)} dt} = \text{állandó} \cdot t^{\alpha - 1}(t-1)^{\gamma - \alpha - 1}$$

függvények adódnak, így

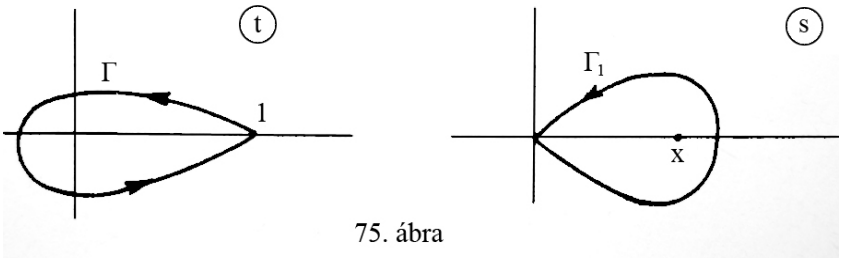
$$y(x) = \text{állandó} \cdot \int_\Gamma e^{xt}\, t^{\alpha - i}(t-1)^{\gamma - \alpha - 1}\, dt.$$

Az integrációs utat úgy kell megválasztanunk, hogy a körüljárása során az

$$e^{xt}\, t^{\alpha}(t-1)^{\gamma - \alpha}$$

mennyiség ismét az eredeti értékét vegye fel. Megfelelő például a t = l pontból kiinduló, a t = 0-t pozitív irányban körbejáró, majd a t = l-be visszatérő görbe.

Alkalmazzuk a $t = 1 - \frac{s}{x}$ helyettesítést, ezáltal elérjük, hogy a körüljárt pont az s = x legyen:



75. ábra

Ha α = -n negativ egész szám, úgy az integrandusnak csak pólusa van az s = x pontban és emiatt y(x) polinom:

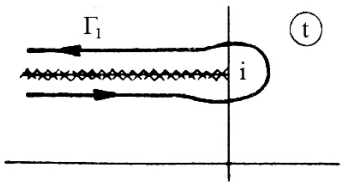
$$y(x) = \text{állandó} \cdot e^{x} x^{1-\gamma} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \left[e^{-x} x^{\gamma+n-1}\right].$$

A normálási tényező szokásos definíciója: y(0) = 1 ; ekkor

$$y(x) = \frac{1}{\gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \ldots \cdot (\gamma+n-1)} e^{x} x^{1-\gamma} \left(\frac{d}{dn}\right)^{n} \left(e^{-x} x^{\gamma+n-1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{n}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} .$$

3.2.3. Induljunk ki a



76. ábra

$$H_n^{(1)}(x) = \text{állandó} \cdot x^n \int_{\Gamma_1} dt \left(t^2 + t\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{xt}$$

integrálélőállításból. Célszerű bevezetni a z = t - i új integrációs változót, ezzel

$$H_n^{(1)}(x) = \text{állandó} \cdot x^n e^{ix} \int dz \left[z(z+2i)\right]^{n-\frac{1}{2}} e^{zx}.$$

Az integrandus ugrása a negatív valós tengely mentén a

$$|z|^{n-\frac{1}{2}} e^{-x|z|} \left(2i - |z|\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

kifejezéssel arányos, tehát

$$H_n^{(1)}(x) = \text{állandó} \cdot x^n e^{ix} \int_0^{\infty} ds\, s^{n-\frac{1}{2}} e^{-sx} \left(1 - \frac{s}{2i}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Nagy pozitív x-ekre az integrál a fő járulékot az s << 1 tartományból gyűjti össze, emiatt $\left(1 - \frac{s}{2i}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ Taylor-sorba fejthető:

$$H_n^{(1)}(x) = \text{állandó} \cdot x^n e^{ix} \int_0^{\infty} ds\, s^{n-\frac{1}{2}} e^{-sx} \left[1 + \vartheta(s)\right] = \text{állandó} \cdot \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \left[1 + \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Az állandó a szokásos konvenció mellett $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{i\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$.

Hasonlóan látható be, hogy

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + \vartheta\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

továbbá

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \vartheta\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

3.3.1. Green-függvény

$$G''(x) + kG'(x) = \delta(x)$$

differenciálegyenletét Fourier-transzformálva

$$\left(-s^2 - iks\right)\widetilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

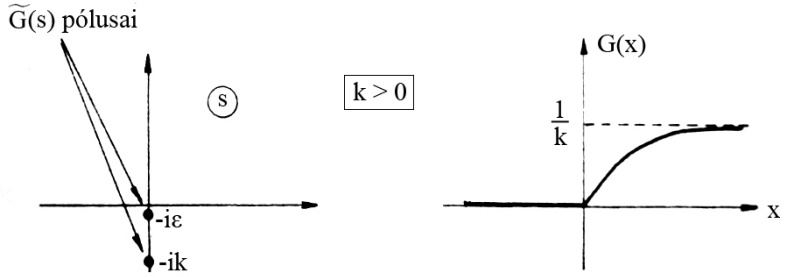
adódik, ahonnan

$$\widetilde{G}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{-1}{s(s+ik)}$$

Az s = 0 pólus a rendszer eltolási-invarianciájával kapcsolatos, azt fejezi ki, hogy a homogén egyenletnek y = állandó is megoldása.

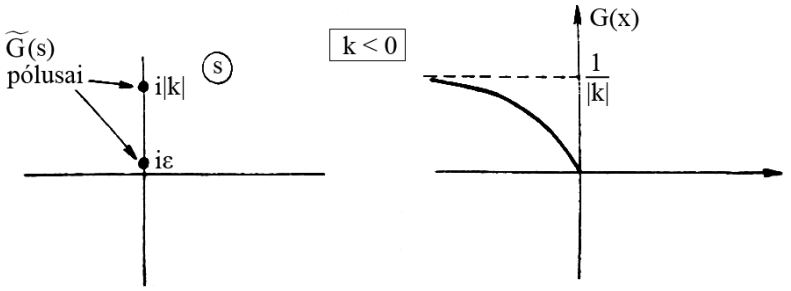
Ha k > 0 - ami a valóságos, a sebességgel ellentétes irányú fékezőerőnek felel meg - úgy $\widetilde{G}(s)$ másik pólusa az lm s < 0 alsó félsíkra kerül. A visszatranszformálás eredménye:

$$G(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-isx}\,\frac{1}{(s+i\varepsilon)(s+ik)} = \Theta(x)\,\frac{1-e^{-kx}}{k}\ .$$



77. ábra

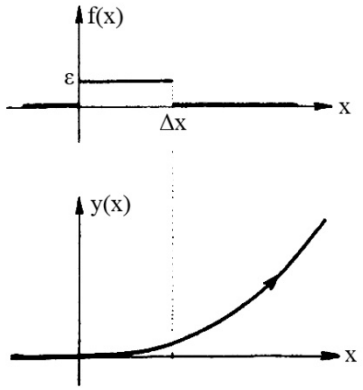
Ha viszont k < 0, akkor $\widetilde{G}(s)$ egyik pólusa a felső félsíkra kerül és emiatt a Green-függvény nem tűnik el x < 0-ra. Most semmi nem indokolja, hogy az s = 0 pólust felülről kerüljük meg, választhatjuk az ellenkező oldalt is:



78. ábra

$$G(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-isx}\,\frac{1}{(s+i\varepsilon)\left(s+i|k|\right)} = \Theta(x)\,\frac{1-e^{-|k|x}}{k}$$

Ez a Green-függvény azonban nem azt írja le, hogy miként reagál a rendszer egy x = 0 pillanatbeli zavarra x > 0 időpontokban, hanem azt, hogy x < 0-kor már "magától" mozgó rendszert hogyan állítja meg az x = 0 pillanatban egy erőlökés. A rendszer azért jöhetett mozgásba az erőlökés <u>előtt</u>, mert <u>instabil</u>. Ez jól látható, ha meghatározzuk egy kicsiny ε erősségű, Δx ideig tartó erőhatásra az eredetileg nyugvó rendszer válaszát:



79. ábra

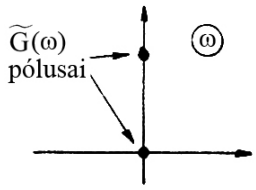
$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x<0 \\ \dfrac{e^{|k|x} - 1 - |k|x}{k^2}\,\varepsilon & \text{, ha } 0<x<\Delta x \\ \dfrac{\varepsilon}{|k|^2}\left\{\left(1-e^{-|k|\Delta x}\right)e^{|k|x} + \left(e^{|k|\Delta x} - 1 - |k|\Delta x\right)\right\} & \text{, ha } x>\Delta x \end{cases}$$

Látjuk hogy akármilyen kicsiny ε és Δx mellett - elegendően hosszú idő elteltével a rendszer véges (sőt egyre növekvő) értékkel kimozdul, tehát instabil.

Általában igaz, hogy egy instabil lineáris rendszer Green-függvényének a felső félsíkon is vannak pólusai.

3.3.2. Könnyen beláthatjuk, hogy nem! Az egyenlet Green-függvényének Fourier-transzformáltja ugyanis

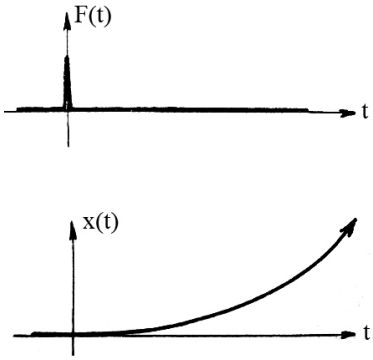
$$\widetilde{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{m(-i\omega)^2-\frac{2e^2}{3c^3}(-i\omega)^3}$$



80. ábra

olyan szingularitás-szerkezetű, hogy a felső fél síkon, $\omega=\frac{3mc^3}{2e^2}$-nél is van pólusa. Ez pedig a rendszer instabilitására utal. Valóban, egy akármilyen kicsiny erőlökés - például $F(t)=\varepsilon\cdot\delta(t)$ - hatására az Abraham-Lorentz egyenlet szerint az elektron exponenciálisan <u>növekvő</u> sebességgel mozgásba jön, ez pedig fizikailag képtelenség:

$$x(t)=\Theta(t)\,\varepsilon\left(\frac{2e^2}{3mc^3}\right)^2\cdot\left(e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}-1-\frac{3mc^3}{2e^2}t\right)$$



81. ábra

A stabil elektronmodellekben a Green-függvény a felső félsíkon analitikus kell legyen. Ezekben a – kísérletileg is megfigyelt sugárzási visszahatás figyelembevétele úgy jelentkezik, hogy $\left[\widetilde{G}(\omega)\right]^{-1}$ az origó körül sorba fejtve

$$\frac{1}{\widetilde{G}(\omega)}=\sqrt{2\pi}\left[m(-i\omega)^2-\frac{2e^2}{3c^3}(-i\omega)^3+\ldots\right]$$

módon viselkedik. Ha az x(t) függvény karakterisztikus változási ideje sokkal nagyobb, mint $\tau_0=\frac{2e^2}{3mc^3}=10^{-24}$ sec, akkor elegendő a Taylor-sor első két tagját megtartanunk, de természetesen az első két tagból nem következtethetünk a teljes $\widetilde{G}(\omega)$ szinguláris-szerkezetére.

A fentiekre egy explicit példa az a - Diractól származó - modell, melyben az elektron egy R sugarú töltött gömbhéj, s az elektromos taszítóerővel egy nem elektromos eredetű felületi feszültség tart egyensúlyt. Ebben a modellben a mozgásegyenlet egy integrodifferenciálegyenlet:

$$m\left[\frac{d^2}{dt^2}+\frac{R}{9c}\frac{d^3}{dt^3}+\frac{R^2}{9c^2}\frac{d^4}{dt^4}\right]\cdot\int_{t-\frac{2R}{c}}^{t}dt'\,x(t')=F(t)$$

A Green-függvény Fourier-transzformáltja

$$\widetilde{G}(\omega)=\frac{e^{-i\omega R}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\omega R}{\sin\omega R}\frac{1}{m\omega^2\left(-1+\frac{1}{9}i\omega R+\frac{1}{9}\omega^2R^2\right)}$$

melynek inverzét ω-szerint sorbafejtve valóban

$$\widetilde{G}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{m(-i\omega)^2-\frac{2e^2}{3c^3}(-i\omega)^3+\ldots}$$

adódik, ami az

$$\left(m\frac{d^2}{dt^2}-\frac{2e^2}{3c^3}\frac{d^3}{dt^3}+\ldots\right)x(t)=F(t)$$

mozgásegyenletnek felel meg. Másrészt $\widetilde{G}(\omega)$ a felső félsíkon analitikus, tehát az

"öngyorsító" megoldások nem léphetnek fel, az elektron stabil.

3.3.3. A rudak hajlítását leíró differenciálegyenlet

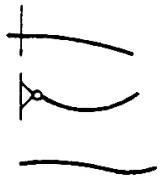
$$E\,I\,\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = -\,p(x),$$

ahol E·I a hajlítási merevségnek nevezett állandó, p(x) pedig a hosszegységre jutó terhelőerő. A határfeltételek:

merev befogásnál: $y = y' = 0$

csuklónál: $y = y''' = 0$

szabad végénél: $y'' = y''' = 0$



82. ábra

Alkalmasan választott egységrendszerrel elérhető, hogy E·I = 1 teljesüljön és a rúd végpontjai az x = 0 és az x = l helyeken legyenek.

A feladat Green-függvényére fennáll:

$$\frac{d^4}{dx^4}\,G\left(x,\xi\right) = -\,\delta\left(x-\xi\right).$$

Először belátjuk, hogy mind a négy határfeltételnél a Green-függvény szimmetrikus. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy a 0 < x < l intervallumon önadjungált-e a $\hat{D} = \left(\frac{d}{dx}\right)^4$ operátor. Ez akkor teljesül, ha a

$$\left(g, \hat{D}f\right) = \left(\hat{D}^{+}\,g, f\right)$$

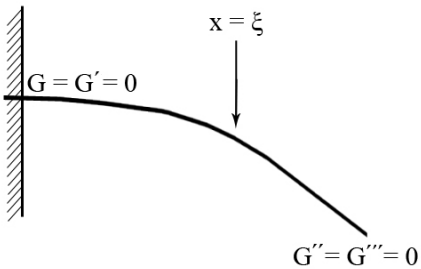
összefüggéssel definiált D^+ adjungált D-vel megegyezik és az értelmezési tartományuk is közös. $D=D^+$-ből következik, hogy

$$0 = \int_0^1 dx\left(gf''' - g'''\,f\right) = \left[gf''' - g'\,f'' + g''\,f' - g'''\,f\right]_{x=0}^{x=1}.$$

Ha például $\hat{D}$ értelmezési tartományába az $f(0) = f'(0) = f''(1) = f'''(1) = 0$ tulajdonságú, négyszer deriválható függvények tartoznak (ez az a) feladat határfeltételének felel meg), akkor a (g , Df) = (Dg , f) fennállásához $g(0) = g'(0) = g''(1) = g'''(1) = 0$ teljesülése szükséges, vagyis g(x)-nek ugyanazokat a határfeltételeket kell "tudnia", mint f(x)-nek. Tehát $\hat{D}$ valóban önadjungált, emiatt a G(x , ξ) Green-függvény szimmetrikus. Hasonló a helyzet a b), c) és d) esetekben is.

Az a) feladat Green-függvényének kiszámítása:

Az x = ξ pont kivételével G(x) negyedik deriváltja eltűnik, tehát G(x) egy harmadfokú polinom:



83. ábra

$$G(x) = \begin{cases} a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3, & \text{ha } x < \xi \\ b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + b_3\,x^3, & \text{ha } x > \xi\,. \end{cases}$$

A határfeltételek miatt $a_0 = a_1 = 0$ és $b_2 = b_3 = 0$. Az x = ξ pontban G harmadik deriváltjának ugrása -1, az alacsonyabb deriváltak pedig folytonosak. Ezekből a feltételekből

$$a_3 = \frac{1}{6},\; a_2 = -\frac{\xi}{2},\; b_1 = -\frac{\xi^2}{2} \text{ és } b_0 = \frac{\xi^3}{6}$$

adódik, vagyis

$$G\left(x,\xi\right) = \Theta\left(x-\xi\right)\left[\frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi^2}{2}\,x\right] + \Theta\left(\xi - x\right)\left[\frac{1}{6}\,x^3 - \frac{\xi}{2}\,x^2\right].$$

Láthatjuk, hogy G(x, ξ) valóban szimmetrikus.

Hasonló számolással kapjuk meg a másféle határfeltételeknek eleget tevő Green-függvényeket is:

b) $$G(x,\xi)=\frac{1}{6}\Theta(x-\xi)(x-1)\cdot\xi\left[x(2-x)-\xi^2\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\Theta(\xi-x)(\xi-1)\cdot x\left[\xi(2-\xi)-x^2\right].$$

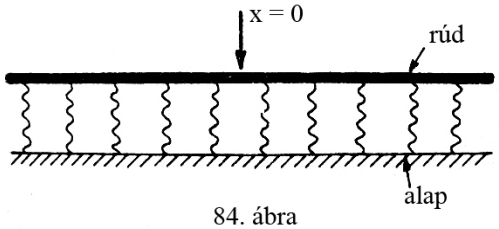
c) $$G(x,\xi)=\frac{1}{6}\Theta(x-\xi)\cdot\xi^2(x-1)^2\left[(2\xi+1)x-3\xi\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\Theta(\xi-x)\cdot x^2(\xi-1)^2\left[(2x+1)\xi-3x\right].$$

d) $$G(x,\xi)=\Theta(x-\xi)\cdot\xi^2\left[x-\frac{\xi}{3}+\frac{x^2}{6}(3-x)(3-\xi)\right]+$$
$$+\Theta(\xi-x)\cdot x^2\left[\xi-\frac{x}{3}-\frac{\xi^2}{6}(3-\xi)(3-x)\right].$$

3.3.4. A megoldandó egyenlet

$$E\cdot I\frac{d^4y(x)}{dx^4}+k\cdot y(x)=\delta(x)$$

ahol k a rugalmas alátámasztás direkciós ereje, E·I pedig a rúd hajlítási merevsége.



84. ábra

Az x = 0 pont kivételével fennáll, hogy

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4}+4\beta^4y(x)=0,\quad\left(\beta^4=\frac{k}{4EI}\right)$$

melynek megoldásait $e^{\lambda x}$ alakban keresve

$$y(x)=C_1e^{\beta(1+i)x}+C_2e^{\beta(-1+i)x}+C_3e^{\beta(1-i)x}+C_4e^{\beta(-1-i)x}$$

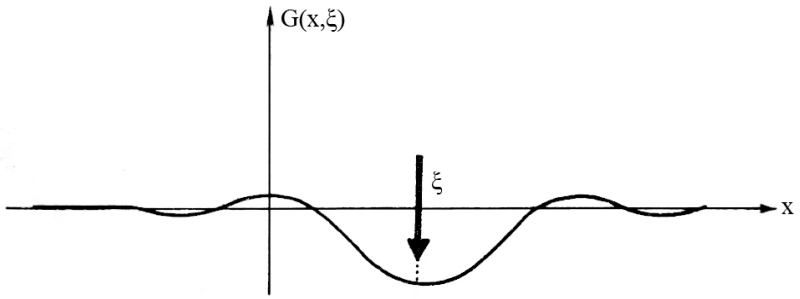
adódik. Mivel y(x) szimmetrikus és a végtelenben korlátos kell legyen

$$y(x)=\Theta(x)e^{-\beta x}\left(A\sin\beta x+B\cos\beta x\right)+\Theta(-x)e^{\beta x}\left(-A\sin\beta x+B\cos\beta x\right)$$

Az első derivált x = 0-beli folytonosságából A = B, a negyedik derivált delta-szingularitásából pedig $\frac{1}{A}=8EI\beta^3$ adódik.

A Green-függvény tehát

$$G(x,\xi)=\frac{1}{8EI\beta^3}\left\{\Theta(x-\xi)e^{-\beta(x-\xi)}\left[\cos\beta(x-\xi)+\sin\beta(x-\xi)\right]+\right.$$
$$\left.+\Theta(\xi-x)e^{-\beta(\xi-x)}\left[\cos\beta(\xi-x)+\sin\beta(\xi-x)\right]\right\}$$



85. ábra

3.4.1. A hővezetés lineáris elméletében a hőáramsűrűség a Φ hőmérséklet gradiensével arányos:

$$\vec{j}=-\alpha\ \mathrm{grad}\Phi\ .$$

Integráljuk a hővezetés egyenletének mindkét oldalát egy kicsiny V térfogatra:

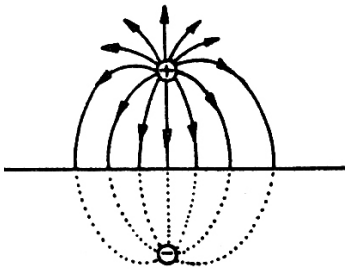
$$H\iiint \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi\, dV - \frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dV = \iiint f\left(\vec{r}, t\right) dV,$$

ahonnan

$$\oiint \vec{j}\, \overrightarrow{dF} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \frac{\alpha}{H}\Phi dV = -\frac{\alpha}{H}\iiint f\left(\vec{r}, t\right) dV$$

A fenti egyenlet bal oldalán a felületen időegységenként kiáramló hő, illetve a vizsgált tartomány belső energiájának növekedése szerepel. Ha $f\left(\vec{r}, t\right) \equiv 0$, akkor – az energia-megmaradás miatt – ez a két tag éppen ki kell ejtse egymást. Innen már leolvasható, hogy az általánosabb inhomogén esetben $f\left(\vec{r}, t\right)$ az $\vec{r}$ helyre t időpillanatban bevezetett energiával arányos. Ez az energia származhat például elektromos melegítésből, kémiai reakciókból, vagy nukleáris hasadásból.

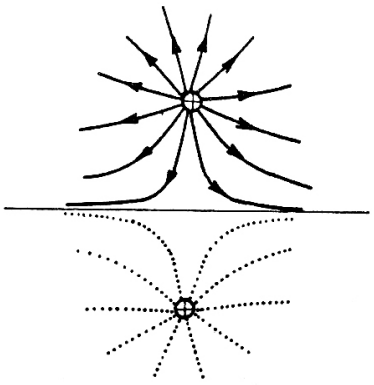
A hullámegyenletben, ha Φ elmozdulást jelöl, akkor Φ a belső erőkkel arányos, a $c^2 \Delta\Phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi$ különbség pedig a külső (nem rugalmas) erővel. Ha Φ fizikai jelentése más, akkor természetesen $f\left(\vec{r}, t\right)$ is eltérő jelentésű. A hanghullámok terjedésénél például a nyomásváltozásra egy hullámegyenlet érvényes, ott az inhomogén tag a külső térfogati erősűrűség divergenciájával arányos.



86. ábra

3.4.2. A megoldást az ún. tükrözéses módszer segítségével kaphatjuk meg. Ennek az a lényege, hogy megpróbáljuk a keresett megoldást különböző ponttöltések - végtelen térben érvényes, és emiatt a határfeltételeknek ellentmondó - potenciáljának összegként ($\Phi = \Phi_{\text{valódi}} + \Phi_{\text{fiktív}}$) előállítani. Ezek a fiktív "tükörtöltések" természetesen csak a vizsgált tartományon kívül helyezkedhetnek el, hiszen ellenkező esetben Dirac-deltás szingularitást okoznának, olyan pontokban is, ahol nincsen valódi töltés.

Közvetlen behelyettesítéssel belátható, hogy a jelen esetben az $\vec{r}^{//} = \left(x^{/}, y^{/}, -z^{/}\right)$ helyre elhelyezett +1 nagyságú tükörtöltés (és az $\vec{r}^{/} = \left(x^{/}, y^{/}, z^{/}\right)$ pontbeli valódi töltés) éppen az a), illetve a b) határfeltételeknek eleget tevő megoldást szolgáltat:



87. ábra

a) $$G\left(r^{/}, \vec{r}^{/}\right) = \frac{1}{\left|r^{/} - \vec{r}^{/}\right|} - \frac{1}{\left|r^{/} - \vec{r}^{/}\right|} =$$

$$= \left[\left(x - x^{/}\right)^2 + \left(y - y^{/}\right)^2 + \left(z - z^{/}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\left(x - x^{/}\right)^2 + \left(y - y^{/}\right)^2 + \left(z + z^{/}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

b) $$G\left(r^{/}, \vec{r}^{/}\right) = \frac{1}{\left|r^{/} - \vec{r}^{/}\right|} + \frac{1}{\left|r^{/} - \vec{r}^{/}\right|} =$$

$$= \left[\left(x - x^{/}\right)^2 + \left(y - y^{/}\right)^2 + \left(z - z^{/}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\left(x - x^{/}\right)^2 + \left(y - y^{/}\right)^2 + \left(z - z^{/}\right)^2\right]$$

3.4.3. Keressük azt az $E\left(x, x^{/}, t\right)$ függvényt, amelyik az (x,t) változóiban eleget tesz a hullámegyenletnek, t = 0-kor azonosan eltűnik és

$$\frac{\partial}{\partial t} E\left(x, x^{/}, t\right)\Big|_{t=0} = \delta\left(x - x^{/}\right)$$

Mivel ezt a függvényt arra akarjuk felhasználni, hogy belőle

$$\int_0^\infty f\left(x^/\right)[\ldots\ldots]dx^/ \quad \text{és} \quad \int_0^\infty g\left(x^/\right)[\ldots\ldots]dx^/$$

integrálással előállítsuk a megoldást, a $t = 0$ pillanatbeli kezdeti feltételeket elegendő az $x^/ > 0$ féltengelyen megkövetelnünk. Ez pontosabban annyit jelent, hogy az

$$E\left(x, x^/, t\right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial t} E\left(x, x^/, t\right)\Big|_{t=0} = \delta\left(x - x^/\right)$$

disztribúciók az $x^/ > 0$ nyílt halmazon el kell tűnjenek, de $x^/ \le 0$-ra akármilyen "értéket felvehetnek". Ezenkívül - mivel a $\Phi(x,t)$ megoldás az x változójában ugyanolyan határfeltételnek tesz eleget, mint $E\left(x, x^/, t\right)$ - teljesülnie kell az $E\left(x = 0, x^/, t\right) \equiv 0$ azonosságnak.

Könnyen belátható, hogy a végtelen húrhoz tartozó elemi megoldást x-ben antiszimmetrizálva egy olyan függvényt kapunk, amely valamennyi kritériumot teljesíti:

$$E\left(x, x^/, t\right) = \frac{1}{2c}\Big[\,\Theta\left(x^/ - x + ct\right) - \Theta\left(x^/ - x - ct\right) - \\ - \Theta\left(x^/ + x + ct\right) + \Theta\left(x^/ + x - ct\right)\Big].$$

Valóban, x = 0-nál $E\left(x, x^/, t\right)$ eltűnik, továbbá - mivel csak az $x \pm ct$ különbségtől függ - eleget tesz a

$$\left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E\left(x, x^/, t\right) = 0$$

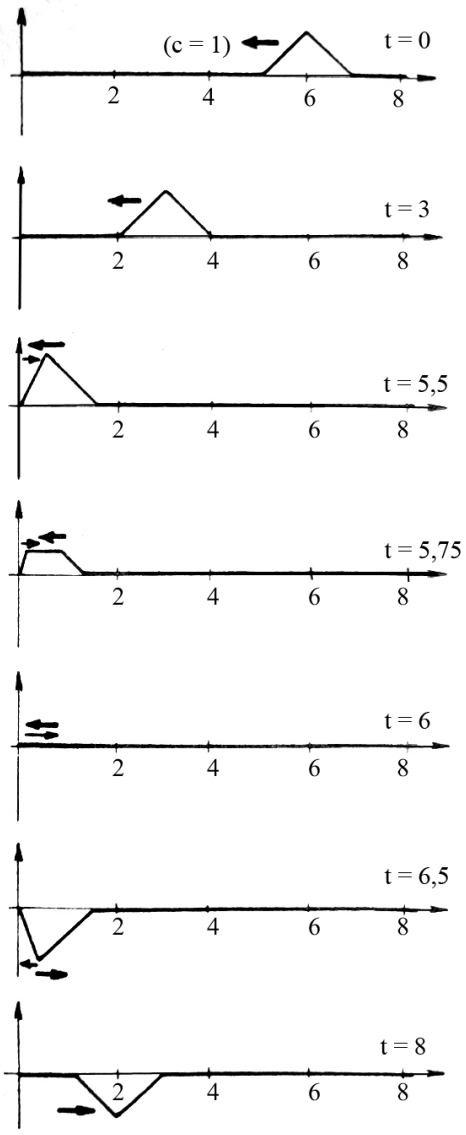
differenciálegyenletnek. Ezenkívül $E\left(x, x^/, t = 0\right) = 0$ és

$$\frac{\partial}{\partial t} E\left(x, x^/, t\right)\Big|_{t=0} = \delta\left(x^/ - x\right) - \delta\left(x^/ + x\right) = \delta\left(x^/ - x\right), \\ \text{ha } x, x^/ > 0$$

Az elemi megoldás segítségével - a szövegben szereplő végtelen húr példájához hasonlóan - a teljes megoldást is megkaphatjuk:

$$\Phi(xt) = \frac{1}{2}\Theta(x - ct)\left[f(x - ct) + f(x + ct)\right] - \\ - \frac{1}{2}\Theta(ct - x)\left[f(ct - x) - f(ct + x)\right] + \\ + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g\left(x^/\right)dx^/ \cdot \Theta(x - ct) + \\ + \frac{1}{2c}\Theta(ct - x)\int_{ct-x}^{ct+x} g\left(x^/\right)dx^/$$

A mellékelt ábrasoron jól látható, hogy a rögzített végű húr rögzítési pontjához érkező hullámcsomag ellentétes fázisban, de alaktorzítás nélkül verődik vissza.



88. ábra

3.5.1. Az elemi megoldás a homogén hullámegyenletnek tesz eleget

$$\left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E\left(\vec{r}, t\right) = 0$$

a kezdeti feltételek pedig

$$E\left(\vec{r},t\right)=0\,;\;\frac{\partial}{\partial t}E\left(\vec{r},t\right)\Big|_{t=0}\delta\left(\vec{r}\right)$$

(A probléma eltolási Invarianciája miatt E csak az $\vec{r}-\vec{r}^{/}$ különbségtől függ, emiatt elegendő az $\vec{r}^{/}=0$ esettel foglalkoznunk.)

Az egyenletet Fourier-transzformálva

$$\left(-c^2k^2+\omega^2\right)\widetilde{E}\left(\vec{k},\omega\right)=0\,,$$

ahonnan

$$\widetilde{E}\left(\vec{k},\omega\right)=f_1\left(\vec{k}\right)\delta\left(\omega-ck\right)+f_2\left(\vec{k}\right)\delta\left(\omega+ck\right),$$

$$k=\left|\vec{k}\right|\,.$$

A kezdeti feltételek meghatározzák az f_1 és f_2 függvényeket:

$$E\left(\vec{r},t\right)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2kc}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\left(e^{-ickr}-e^{ickt}\right)$$

Az integrálás a $\vec{k}$-térbeli polárkoordináták bevezetésével könnyen elvégezhető:

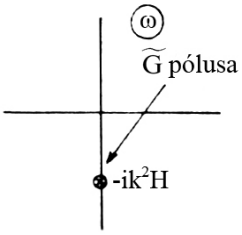
$$E\left(\vec{r},t\right)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\,k^2\int_{-1}^{1}d\left(\cos\Theta\right)\int_0^{2\pi}d\Phi\,e^{-ikr\cos\Theta}\frac{e^{-ikct}-e^{ikct}}{2kc}=$$

$$=\frac{1}{4\pi rc}\left[\delta\left(r+ct\right)-\delta\left(r-ct\right)\right]=\frac{1}{2\pi c}\,\mathrm{sgn}\left(t\right)\delta\left(r^2-c^2t^2\right)$$

A megoldás - mint azt vártuk is - csak az $\left|\vec{r}\right|\le c\left|t\right|$ "fénykupon" belül különbözik nullától, sőt a tartója - az egydimenziós esettől eltérően - csak a fénykúpot tartalmazza.

3.5.2. A Green-függvény differenciálegyenlete (az eltolási invariancia miatt $x^{/}=t^{/}=0$ választással

$$\left(H\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)G\left(x,t\right)=\delta\left(x\right)\cdot\delta\left(t\right)\,,$$



89. ábra

melyet Fourier-transzformálva

$$\widetilde{G}\left(k,\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-Hk^2+i\omega}$$

adódik. Mivel az ω változóban $\widetilde{G}$ analitikus a felső félsíkon, a

$$G\left(x,t\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,e^{-i\omega t}\frac{-i}{\omega+iHk^2}$$

Green-függvény $t<0$-ra azonosan eltűnik:

$$G\left(x,t\right)=-\Theta\left(t\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ikx}e^{-Htk^2}=-\Theta\left(t\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi Ht}}e^{-\frac{x^2}{4Ht}}\equiv-\Theta\left(t\right)\cdot E\left(x,t\right)\,,$$

ahol E(x,t) a probléma elemi megoldása. Közvetlen behelyettesítéssel megmutatható, hogy ez valóban megoldása a Green-függvény differenciálegyenletének:

$$\left(H\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[-\Theta\left(t\right)\cdot E\left(x,t\right)\right]=-\Theta\left(t\right)\left[H\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\right]E\left(x,t\right)+E\left(x,t\right)\cdot\Theta^{/}\left(t\right)=$$

$$=E\left(x,t\right)\cdot\delta\left(t\right)=E\left(x,0\right)\delta\left(t\right)=\delta\left(x\right)\cdot\delta\left(t\right)\,.$$

A Green-függvény és az elemi megoldás fentebbi kapcsolatának a következő szemléletes jelentése van: A Green-függvény azt írja le, hogy a t pillanatban az x helyen közölt egységnyi erősségű "hőimpulzus" hatására milyen lesz a hőmérsékletelosztás. Nyilván $t<0$-ra $G\equiv 0$, pozitív időkre pedig egy olyan függvény, amely kielégíti a homogén egyenletet és $t=0$-kor δ(x)-szel egyezik meg - vagyis éppen E(x,t).

3.5.3. Az elemi megoldást meghatározó homogén egyenletet Fourier-transzformálva

$$\left[EI\left(-ik\right)^4+\rho\left(-i\omega\right)^2\right]\widetilde{E}\left(k,\omega\right)=0\,,$$

adódik, ahonnan

$$\widetilde{E}\left(k,\omega\right)=f(k)\,\delta\left(\omega-\sqrt{\frac{E\cdot I}{\rho}}\,k^2\right)+g(k)\,\delta\left(\omega+\sqrt{\frac{E\cdot I}{\rho}}\,k^2\right).$$

Az f(k) és g(k) függvényeket az E(x,t=0) = 0 és $\frac{\partial}{\partial t}E(x,t)\Big|_{t=0}=\delta(x)$ kezdeti feltételek határozzák meg. Az eredmény:

$$E(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-ikx}\frac{\sin k^2 t\sqrt{EI/\rho}}{k^2\sqrt{EI/\rho}}.$$

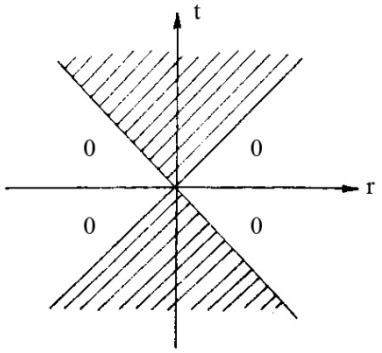
3.5.4. Határozzuk meg először az elemi megoldást! A 3.5.1. feladatnál alkalmazott módszerrel

$$\left(k^2+m^2-\omega^2\right)\widetilde{E}\left(\vec{k},\omega\right)=0\,,$$

$$\widetilde{E}\left(\vec{k},\omega\right)=f_1\left(\vec{k}\right)\delta\left(\omega-\omega_k\right)+f_2\left(\vec{k}\right)\delta\left(\omega+\omega_k\right),\ \left(\omega_k\equiv+\sqrt{k^2+m^2}\,.\right)$$

ahonnan a kezdeti feltételeket is figyelembe véve

$$E\left(\vec{r},t\right)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}$$



90. ábra

Mivel $E\left(\vec{r},t=0\right)=0$ és az egyenlet Lorentz-invariáns, az elemi megoldás a fénykúpon kívül (r > | t |-re) mindenhol el kell tűnjön. (Ellenkező esetben egy másik koordinátarendszerben E(r*,t* = 0) ≠ 0 teljesülne!)

A fénykúp mentén $E\left(\vec{r},t\right)$ szinguláris, a szingularitását az integrandus $k\to\infty$ viselkedése szabja meg. Mivel $\omega_k=\sqrt{k^2+m^2}\approx k$, ha $k^2 >> m^2$, ezért - szemléletesen - azt várjuk, hogy a fénykúp környékén az m = 0 esetnek megfelelő megoldást kapjuk (lásd a 3.5.1. feladatot). Valóban, ha az integrált

$$E\left(\vec{r},t\right)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\frac{\sin kt}{k}+\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{\sin\sqrt{k^2+m^2}\,t}{\sqrt{k^2+m^2}}-\frac{\sin kt}{k}\right)e^{-i\vec{k}\vec{r}}$$

módon két részre bontjuk, akkor az első tag $\frac{1}{2\pi}\operatorname{sgn}(t)\cdot\delta\left(r^2-t^2\right)$-tel egyenlő, a második pedig - mivel az integrál konvergens - egy reguláris disztribúciót szolgáltat. Ez utóbbi kifejezhető a Bessel-függvényekkel:

$$E\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sgn}(t)\cdot\delta\left(x^2\right)-\frac{m}{4\pi}\operatorname{sgn}t\cdot\Theta\left(x^2\right)\frac{I_1\left(m\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2}}\approx$$

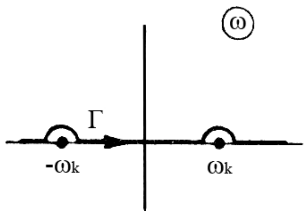
$$\underset{\left(x^2\to 0\right)}{\approx}\frac{1}{2\pi}\operatorname{sgn}(t)\,\delta\left(x^2\right)-\frac{m^2}{8\pi}\operatorname{sgn}(t)\cdot\Theta\left(x^2\right)\qquad\left(-x^2\equiv r^2-t^2\right)$$

A retardált Green-függvényt is Fourier-transzformációval határozhatjuk meg:

$$\left(k^2+m^2-\omega^2\right)\widetilde{G}^{(ret)}\left(\vec{k},\omega\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\,,$$

ahonnan

$$G^{(ret)}\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_{\Gamma}d\omega\,\frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}e^{-i\omega t}}{k^2+m^2-\omega^2}$$



91. ábra

Az ω-beli integrálást - a pólusokat felülről kerülve - elvégezhetjük

$$G^{(ret)}(r,t)=\Theta(t)\cdot\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\equiv\Theta(t)\cdot E\left(\vec{r},t\right).$$

A retardált Green-függvény és az elemi megoldás fentebbi kapcsolatának ugyanaz a fizikai jelentése, mint az 3.5.2. feladatnál.

3.6.1. Egy szabad tömegpont kvantummechanikai mozgásegyenlete

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

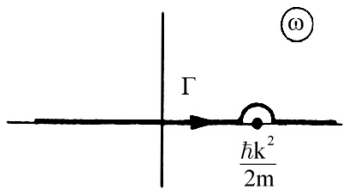
melynek Green-függvénye az

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right)G\left(\vec{r},t\right)=\delta\left(\vec{r}\right)\cdot\delta(t)$$

egyenletet elégíti ki. Ez látszólag a hővezetés egyenletéhez hasonlít, "csupán" annyi a különbség, hogy a "hővezetési állandó" képzetes (lásd. a 3.5.2. feladatot!). Emiatt azonban lényeges megváltozik a megoldás szerkezete, mert a Fourier-transzformált függvénynek az ω-béli pólusa a valós tengelyre kerül.

$$\widetilde{G}\left(k,\omega\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\hbar\omega-\frac{\hbar^2k^2}{2m}}$$

A retardált Green-függvényt úgy kapjuk meg, ha a pólust felülről kerüljük meg



92. ábra

$$G\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\int_\Gamma d\omega\,\frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}}{\hbar\omega-\frac{\hbar^2k^2}{2m}}=$$

$$=\Theta(t)\frac{-i}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,e^{-i\vec{k}\vec{r}-i\frac{\hbar t}{2m}k^2}=\frac{-i}{\hbar}\left(\frac{m}{2\pi\hbar t}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{imr^2}{2\hbar t}}\Theta(t)$$

Az egyenletnek - a hővezetéstől eltérően - van avanzsált Green-függvénye is, amely t > 0-ra tűnik el.

3.6.2. A vizsgált feladat Schrödinger-egyenlete

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=\frac{2m}{\hbar^2}(E+Fx)=0\ ,$$

amely a

$$\xi=\left(x+\frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

új változó bevezetésével az Airy-féle

$$\psi^{//}\left(\xi\right)+\xi\psi\left(\xi\right)=0$$

differenciálegyenletbe megy át. A minden x-re korlátos megoldás

$$\psi\left(\xi\right)=A\cdot\Phi\left(-\xi\right),$$

ahol

$$\Phi\left(\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty\cos\left(\frac{u^3}{3}+u\xi\right)du.$$

Az energiaspektrum folytonos: $-\infty < E < \infty$, az A normálási tényezőt pedig az

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\overline{\psi_E}(x)\psi_{E'}(x)=\delta\left(E-E'\right)$$

összefüggés rögzíti. Ehhez elegendő $\psi_E(x)$ aszimptotikus viselkedésének ismerete, hiszen ez szabja meg, hogy a fentebbi integrál $E \approx E'$-re hogyan válik szingulárissá. Mivel az Airy-függvények aszimptotikus alakja (lásd a I. Függeléket)

$$\Phi(\xi) \underset{-\xi \to \infty}{\sim} \frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}|\xi|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

így

$$\psi_E(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{A}{\xi^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\xi = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x + \frac{E}{F}\right)}$$

Használjuk ki, hogy csak E ≈ E' értékekre akarjuk kiértékelni a "skalárszorzatot", emiatt $\psi_{E'}(x)$-t sorbafejthetjük ΔE = E' - E szerint

$$\psi_{E'}(x) \approx \frac{A}{\left|\xi^{\frac{1}{4}}\right|}\left[1 + \theta(\Delta E)\right] \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{2m}{F^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \xi^{\frac{1}{2}} \Delta E\right)\Bigg|_{\xi = \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(x + \frac{E}{F}\right)}.$$

Ennek felhasználásával

$$\left\langle \psi_E | \psi_{E'} \right\rangle = \int_{-\infty}^{x_0} (\ldots)\, dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{A^2}{\xi^{\frac{1}{2}}}\left[\sin\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{2m}{F^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \xi^{\frac{1}{2}} \Delta E\right)\right] dx.$$

Az első integrál konvergens $E' \to E$-re; a második alsó határát akkorára választjuk, hogy jogos legyen az aszimptotikus alakok használata. Az

$$y = \left(\frac{2m}{F^2\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \xi^{\frac{1}{2}}$$

új integrációs változó bevezetésével és a $\Delta E \to 0$ limeszben véges tagok elhagyásával

$$\left\langle \psi_E | \psi_{E'} \right\rangle = A^2 \pi \frac{F^{\frac{1}{3}} \hbar^{\frac{4}{3}}}{(2m)^{\frac{2}{3}}} \delta\left(E - E'\right),$$

ahonnan

$$A = \frac{(2m)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{6}} \hbar^{\frac{2}{3}}}.$$

3.6.3. Az egydimenziós szabad Schrödinger-egyenlet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x),$$

melynek megoldása

$$\psi(x) = N \cdot e^{\pm \frac{i}{\hbar}\sqrt{2mE}\, x}$$

Jelöljük az energia-sajátfüggvényeket $\psi_{\alpha E}(x)$-szel, ahol α=1,2 a kitevő előjelét rögzíti. A spektrum az E > 0 tartományban folytonos és minden energiaszint - a mozgás irányának megfelelően - kétszeresen degenerált.

Az N normálási tényezőt az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{\psi_{\alpha E}(x)}\, \psi_{\beta E'}(x) = \delta_{\alpha,\beta} \cdot \delta\left(E - E'\right)$$

feltételből határozhatjuk meg:

$$N = \frac{4}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt[4]{\frac{m}{2E}}$$

Általában igaz, hogy ha

$$\hat{F} \cdot \psi_{F_0}(x) = F_0 \cdot \psi_{F_0}(x),$$

akkor

$$f\left(\hat{F}\right)\psi_{F_0}(x) = f\left(F_0\right)\cdot\psi_{F_0}(x) \equiv f_0\cdot\psi_{F_0}(x),$$

vagyis $\hat{F}$ és annak függvényei közös sajátfüggvényekkel rendelkeznek. A normálási feltétel azonban a két operátornál különbözik.

Ha ψ_{F_0} normált, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\overline{\psi_{F_0}(x)}\,\psi_{F_0^{/}}(x) = \delta\left(F_0 - F_0^{/}\right),$$

akkor f normált sajátfüggvényei $\psi_{f_0}(x) = N\cdot\psi_{F_0}(x)$ alakúak.

Mivel

$$\int dx\,\overline{\psi_{f_0}(x)}\,\psi_{f_0^{/}}(x) = |N|^2\int dx\,\overline{\psi_{F_0}(x)}\,\psi_{F_0^{/}}(x) = |N|^2\,\delta\left(F_0 - F_0^{/}\right) = |N|^2\left|\frac{dF}{df}\right|^{-1}\left(f_0 - f_0^{/}\right),$$

ezért az $\hat{f}$ operátor sajátfüggvényei $\hat{F}$ sajátfüggvényeitől egy

$$|N|\sqrt{\left|\frac{dF}{df}\right|}$$

faktorban különböznek. Példánkban $\hat{F} = \hat{p}$, $\hat{f} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \hat{E}$, a két-féle függvényrendszer közti átnormálási tényező

$$|N| = \left|\frac{d}{dE}\,p(E)\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{d}{dE}\,\sqrt{2mE}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{m}{2E}\right|^{\frac{1}{4}}.$$

Mivel az E új változó a régi p-nek nem monoton függvénye (és emiatt az invertálás nem egyértelmű), ezért szét kell vágni a $-\infty < p < \infty$ tartományt $p > 0$ és $p < 0$ részekre. Adott E mellett egy diszkrét kétértékű változó $\alpha = 1,2$ dönti el, hogy milyen p előjele; E és α már egyértelmű kapcsolatban áll p-vel.

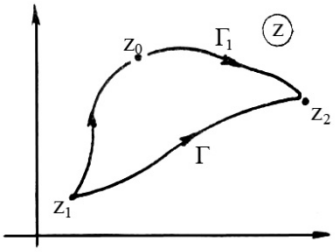
FÜGGELÉK

I. A nyeregpont-módszer

Gyakran előfordul, hogy

$$I(\lambda) = \int_{z_1}^{z_2} dz e^{f(z,\lambda)}$$

típusú integrált kell kiszámítanunk, ahol λ egy (valós, vagy komplex) paraméter, z_1 és z_2 (valós, vagy komplex) állandók, melyek azonban függhetnek a λ paramétertől, $f(z, \lambda)$ pedig a komplex z változó analitikus függvénye bizonyos tartományon.



93. ábra

A z_1 és a z_2 pontok közti Γ integrációs utat a Cauchy-tétel értelmében nyugodtan eldeformálhatjuk, ha eközben nem ütközünk bele $f(z, \lambda)$ szingularitásaiba. A nyeregpont-módszer lényege az, hogy megkeressük a kitevő stacionárius pontját - vagyis ahol $f'(z)\big|_{z=z_0} = 0$ - és az integrációs görbét a z_0-n átmenő Γ_1-be toljuk el. Bizonyos körülmények között az integrál a legnagyobb járulékot a z_0 pont kis környezetéből szedi össze, ilyenkor elegendő $f(z, \lambda)$ Taylor-sorának első néhány tagját ismerni.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)^2 + \ldots = f(z_0) - A(z - z_0)^2 + \ldots$$

ahol $A = \frac{-1}{2} f''(z_0)$ egy (általában komplex) állandó.

Vizsgáljuk meg először a $z_0 = 0$, A = valós > 0 esetet!

Ekkor

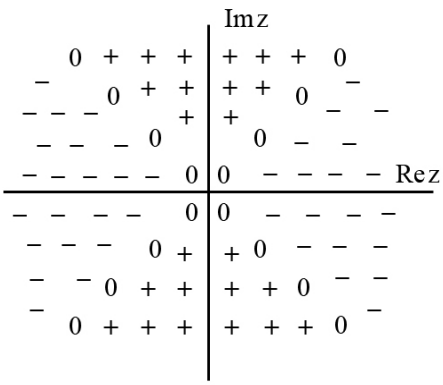
$$f(z) - f(0) \cong -Az^2 = -A\left(x^2 - y^2\right) - 2Aixy$$

Az integrandus abszolút értékét

$$\left|e^{f(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}\, f(z)} \approx e^{-A\left(x^2 - y^2\right)}$$

adja meg. A kitevő egy nyeregfelülettel szemléltethető, melynek a valós tengely mentén maximuma, a képzetes tengely mentén pedig minimuma van. Válasszuk a Γ_1 integrációs görbét úgy, hogy a leggyorsabb csökkenés irányában haladjon át z_0-on (jelen esetben ez a valós tengely). Ekkor egy Gauss-típusú integrált kell kiszámítani:

$$I \approx e^{f(0)} \int dx e^{-Ax^2}$$



94. ábra

Ez természetesen csak az x = 0 pont kis környezetében igaz, hiszen egy sorfejtés után jutottunk erre az eredményre. Amennyiben A egy nagy szám, úgy a Gauss-görbe nagyon gyorsan (néhányszor $\frac{1}{\sqrt{A}}$ távolságon belül) gyakorlatilag nullára csökken és az integrál távolabbi részeit (ahol a közelítés már úgysem érvényes) akár el is hagyhatjuk. A középső, |x| < néhányszor $\frac{1}{\sqrt{A}}$ rész járuléka közelíthető a teljes Gauss-integrállal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} .$$

Térjünk most vissza az általános $z_0 \neq 0$, A = komplex esethez!
Ekkor a kitevő valós része a z_0 pont kis környezetében helyettesíthető a

$$\mathrm{Re}\left[A(z-z_0)^2\right]$$

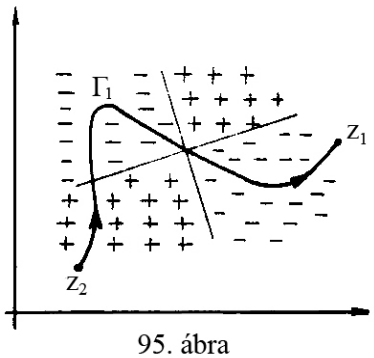
nyeregfelülettel, melynek z_0 a középpontja és a tengelyei A fázisától függő mértékben elfordultak az x-y tengelyekhez képest. Most is található azonban egy olyan irány, mely mentén z_0-tól távolodva az integrandus abszolút értéke a leggyorsabban csökken. Ha ebben az irányban haladunk keresztül z_0-n a Γ_1 görbével, akkor a nyeregpont környezetéből az integrál

$$I(\lambda) \cong e^{f(z_0)} \sqrt{\frac{\pi}{|A|}}\, e^{\alpha}$$

járulékot szed össze (α a leggyorsabb csökkenési irány és a valós tengely által bezárt szög). Amennyiben az integrandus abszolút értéke a nyeregpontban a legnagyobb és attól távolodva gyorsan csökken (olyan gyorsan, hogy a lényeges $|\Delta z| \lesssim \frac{1}{\sqrt{A}}$ szakaszon $f(z,\lambda)$-t jól közelíti a Taylor-sorának első néhány tagja), akkor a keresett integrálnak valóban jó közelítést kaptuk. Ezek a feltételek általában csak a λ paraméter bizonyos aszimptotikus értékeire teljesülnek, ezért a nyeregpont-módszerrel általában az $I(\lambda)$ függvény aszimptotikus sorának kezdőtagját kapjuk meg.

A fentieket két megjegyzéssel kell még kiegészítenünk. Amennyiben az $f(z,\lambda)$ függvénynek több nyeregpontja is van, úgy mindegyiken keresztül kell integrálnunk, mindegyik járulékát figyelembe kell vegyük. Természetesen előfordulhat, hogy a nyeregpontok közül valamelyik járuléka dominálja az egész integrált. Másrészt az is előfordulhat, hogy a z_0 pontban nemcsak az első, de a második, esetleg még magasabb derivált is eltűnik. Ha f(z) Taylor sora

$$f(z) = f(z_0) + B(z-z_0)^N + \ldots$$



95. ábra

módon kezdődik $\left(B = \frac{1}{N!} f^{(N)}(z_0) \neq 0\right)$, akkor a z_0 pont környezetében az integrandus abszolút értéke N különböző félegyenes mentén egyforma gyorsan csökken. Ilyenkor ezek közül kettőt kiválasztunk és rajtuk keresztül integrálunk:

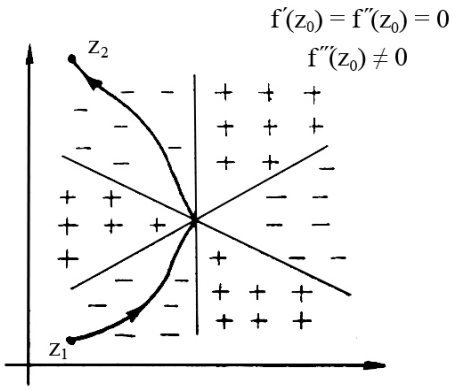
$$I(\lambda) \approx e^{f(z_0)} \left(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}\right) \int_0^{\infty} du e^{-|B|\, u^N}$$

Az integrál (amely z_0-n és B-n keresztül függ a λ paramétertől) a

$$|B| \cdot u^N = t$$

helyettesítéssel a Γ-függvényre vezethető vissza:

$$I(\lambda) \approx \frac{e^{f(z_0)}}{|B|^{\frac{1}{N}}} \left(e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}\right) \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{1}{N-1}} = e^{f(z_0)} \frac{e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2}}{|B|^{\frac{1}{N}}} \Gamma\left(\frac{1}{N}\right)$$



96. ábra

A nyeregpont-módszer hatékonyságának illusztrálására számítsuk ki a faktoriális-függvény

$$n! \equiv \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} dz z^n e^{-z}$$

értékét nagy n-re. Az integrandust $e^{f(z,n)}$ alakba írhatjuk, ahol

$$f(z,n) = n\ln z - z.$$

A stacionárius pont

$$f'(z_0) = \frac{n}{z_0} - 1 = 0,$$

$$z_o = n.$$

Mivel $f(z_0) = n\ln n - n$ és $A = \frac{\left|f''(z_0)\right|}{2} = \frac{1}{2n} \neq 0$, a nyeregpont-közelítésből

$$n! \approx e^{n\ln n - n}\sqrt{\frac{\pi}{1/(2n)}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

adódik, ami az ismert Stirling-formula.

Mikor jó a fenti közelítés? Az f(z) és az $f(z_0) + A(z - z_0)^2$ függvények különbségére az

$$\frac{1}{3!}f'''(z_0)(z - z_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(IV)}(z_0)(z - z_0)^4$$

mennyiség a jellemző. Ennek első tagja páratlan z-z_0-ban, ezért a z_0 körüli integrálhoz nem ad járulékot. A negyedrendű eltérés a

$$|z - z_0| \lesssim \text{néhányszor} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \approx \sqrt{n}$$

intervallumon $f^{(IV)}(z_0) \sim \frac{1}{n^3}$ miatt

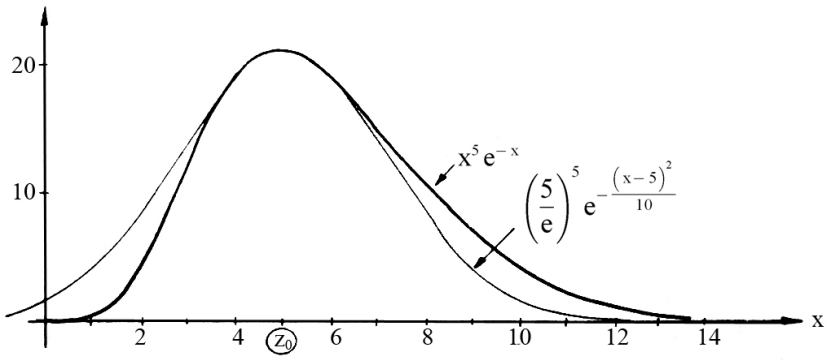
$$|\delta f| \lesssim \frac{1}{n^3} \cdot \left(\sqrt{n}\right)^4 = \frac{1}{n},$$

ami a kiszámított integrál $\frac{1}{n}$ nagyságrendű relatív hibájára utal:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + \theta\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Látjuk tehát, hogy a Stirling-formula (nyeregpont-közelítés) nagy n-ekre jó közelítés.

Hogy egy szemléletes képünk is legyen a nyeregpont-közelítés "működéséről", rajzoljuk fel n = 5-re (ami nem is túlságosan nagy szám) az egzakt integrandust, illetve a nyeregpont-módszerben használt közelítő integrandust.



97. ábra

A két görbe elég jól közelíti egymást, az integrálok pedig még ennél is pontosabban egyeznek. Ennek az az oka, hogy a Gauss-görbe z_0 alatt az egzakt integrandus fölött, z_0 felett pedig alatta halad, majdnem pontosan szimmetrikusan, és ez az integrálban nem jelentkezik. Így aztán nem meglepő, hogy a Stirling-formula eredménye csak 1,6%-kal tér el az egzakt értéktől.

II. A diszperziós összefüggések és az okság elve

(R. Hagedorn (CERN, Genf))

Dialógus a klasszikus fizikáról

Szereplők: A feltaláló (f)
A fizikus (F)

f.: Halló, öregfiú! Ne álmodozz, de járj a fellegekben - emlékszel még rám?
F.: - ...?
f.: Hát persze, hogy nem. Együtt tanultunk fizikát évekkel ezelőtt, de én háromévi tanulás után feladtam, mert nagyon absztraktnak éreztem az anyagot. Most pedig ...
F.: Valóban, igen, emlékszem. Örülök, hogy ismét látlak; nagyon jól nézel ki. Mit csinálsz?
f.: Olyan dolgok „feltalálásával" foglalkozom, amelyben egy kis fizikai tudás sokat segít. Ez egy olyan hobby, amiből jól meg tudok élni. Épp most tettem egy igazán fantasztikus felfedezést. Képzeld, olyan napszemüveget fogok csinálni, amellyel sötétben is lehet látni.
F.: Hát ezt hogyan?
f.: Nagyon egyszerű! Oly egyszerű, hogy csodálkozom, miért én vagyok az első, aki erre gondolt. Valószínűleg azért, mert más feltalálók nem tudják eléggé a fizikát, a fizikusok pedig nem gondolkodnak eléggé gyakorlatiasan. - A ti elvont gondolkodásotokból nem születik semmi jó. - Nos, a gondolat a következő: tegyük fel, hogy egy sötét szobában vagy, ahol egy elektromos villanófénylámpa van, olyan fajta, amit ti használtok a buborékkamráitoknál. A villanófény a belépésed után működni fog valamely időpillanatban, de pillanatnyilag a szoba még teljesen sötét. Ha azonban Fourier–analizálod a villanást, az az összes frekvenciákat tartalmazni fogja és így végtelen szinuszhullám formájában mindegyikük jelen lesz a szobában. Amplitúdóik és fázisaik olyanok lesznek, hogy szuperpozíció esetén kioltják egymást, kivéve a másodpercnek azt a törtrészét, amíg a villanófény a sötétséget megszakítja. Igazam van?
F.: Természetesen, de gyerünk tovább!
f.: No már most, az én találmányom az, hogy olyan szemüveget kell használni, amelynek lencséi színesek, és csak egy frekvenciát, vagy csak egy nagyon kis frekvenciaintervallumot engednek át, a többit abszorbeálják. Ez az egy frekvencia egy végtelen szinusz-hullámhoz tartozik. A spektrum többi része, amely abszorbeálódik, többé már nem lesz képes arra, hogy kioltsa ezt a hullámot, és így a szemedet fény éri és látni fogsz. Nem nagy dolog ez?
F.: De igen! Kipróbáltad?
f.: Ki, de eddig valamilyen oknál fogva nem működött. Lehet, hogy nem találtam meg eddig a helyes lencséket, vagy pedig a lencsén átjutó frekvenciaintervallum még mindig túl nagy. A közeljövőben egy nagyon szelektív szűrőt fogok kipróbálni. Lehet, hogy ekkor meg az energia lesz túl kicsi, amelyet ez a kis frekvenciasáv tartalmaz, és így valamilyen erősítő eszközt is kell alkalmaznom, - no de ezek csak technikai részletek.
F.: Lehet, hogy megfeledkeztél valamilyen más, kevésbé technikai részletről, és van is valami elképzelésem a dologról. Sajnos azonban sietnem kell. Találkozzunk holnap este odaát a presszóban, 8 órakor; rendben?
f.: Kitűnő! És ígérem, hogy egy pillanatot sem kések. Szervusz!
F.: Szervusz!

Következő este negyed kilenckor

f.: Halló, bocsáss meg, hogy így elkéstem.
F.: Azt ígérted, hogy nem fogsz késni.

f.: Valóban, nagyon sajnálom. Egy órával ezelőtt indultam el hazulról, noha az út onnan ide alig több mint 20 perc, de éppen lekéstem a buszt. A következővel még mindig elég korán ideérkeztem volna, de ahogy felléptem rá, a motor lerobbant, - tudod, ilyen dolog tíz évben egyszer fordul elő. Így elhatároztam, hogy idesétálok s még így is ideértem volna időben, ha egy ember nem próbált volna rabolni néhány ékszert. Egy kővel betörte a kirakatot, éppen akkor, amikor elmentem mellette. Nyilvánvalóan bolond volt - képzeld - kirabolni egy ékszerüzletet kora este, ennyi ember között! Természetesen elkapták; és milyen gügye volt: egyetlen érthető szót sem tudott mondani, noha egész idő alatt beszélt. És mivel balszerencsémre éppen láttam, hogyan történt a dolog, a rendőrségre vittek és egy tucatszor el kellett mesélnem az összes részletet. Végül is most itt vagyok.

F.: De te azt ígérted, hogy nem fogsz elkésni.

f.: Mindent megtettem, - mint ahogy már mondtam. De most már arról a részletről szeretnék hallani, amely szerinted elkerülte a figyelmemet.

F.: Kár, hogy ennyit késtél.

f.: Untatsz engem a szemrehányásaiddal. Láthattam én a jövőbe? Te talán előre tudtad volna ezt az extrém, valószínűtlen eseményláncolatot, amely engem ennyire késleltetett? Állítom neked, senki sem tudta volna!

F.: Éppen ez az a kis részletkérdés, amely a találmányodat használhatatlanná teszi.

f.: Tessék? Ha bolondítani akarsz, akkor most jobb, ha megyek!

F.: Várj! Te egy fényvillanás Fourier-analíziséből indultál ki. Már most Fourier-analízist minden - időben változó - dologra lehet alkalmazni. Ki tudsz gondolni egy másik példát is?

f.: Remek gondolat! Lehet, hogy a találmányomat más esetekre is ki lehet terjeszteni. Lássuk csak! Valóban, a hangra!

F.: Én a következőre gondoltam. Tarts hangvillát egy ágyú közelébe! Mi történik?

f.: Érvelésem szerint rezegnie kell, mivel a dörrenésből egyetlen Fourier-komponenst választ ki. Az alapelv ugyanaz, mint az én színes szemüvegemnél.

F.: Igaz. És megfigyeltél már valaha is ilyet?

f.: Hát persze, hogy meg. Jól emlékszem a durranógázzal végzett kísérleteimre. A hangvilla, amely történetesen ott állt a laboratóriumban, egy kísérleti robbantás után még húsz másodperccel később is adott hangot.

F.: Nyilván ismersz olyan anyagokat is, amelyek fényt adnak, miután egy villanással megvilágítottuk őket.

f.: Miért teszel fel nekem ilyen kérdéseket? Mindenki ismer ilyeneket a karórájáról. És a példáid csak azt bizonyítják, hogy a találmányomnak <u>működnie kell</u>. Azonban már kezdek kételkedni, hogy a gyakorlatban jól be fog-e válni? A helyzet az, hogy a foszforeszkáló anyagok, a hangvillák és a hasonló mechanizmusok csökkenő intenzitással és nem is hosszú ideig emittálnak. Gondolod, hogy ez az a bizonyos részletkérdés?

F.: Nem egészen. Mondd, adott hangot a hangvillád már a kísérleti robbantás előtt is?

f.: Nem, természetesen nem! Mivel ... óh, azt mondtam, természetesen? Természetesen nem gondolom, hogy „természetesen” - csak váratlanul kérdeztél. Amire én valóban gondolok, az az ....

F.: ?

f.: Várj csak ... igaz, én sohasem figyeltem meg ilyen jelenséget. Egy részről ez természetesnek látszik, ezért hagyta el a számat a „természetesen”, de ellentmond a Fourier-analízisről és az egy frekvencia kiszűréséről szóló érvelésemnek. És ezért egyáltalán nem látszik „természetesnek”. Itt egy ellentmondás van, amelyet én valóban nem értek, de nemcsak váratlanul kérdeztél, hanem úgy hiszem, itt valóban a fején találtad a szöget.

F.: Gondolj csak a hangvilládra. Mi van akkor, ha ténylegesen már a robbanás előtt adott hangot?

f.: Tudom, mire akarsz kilyukadni. Kb. 20 másodperces csillapodási idejével kb. 20 másodperccel a robbanás előtt is rezegnie kellett volna, - de honnan tudhatja, hogy pontosan <u>mikor</u> fog a dörrenés történni?

F.: Ha még azt sem tudtad előre, hogy ma este elkésel! Látod most már a figyelmen kívül hagyott

részletkérdést?

f.: Kezdem érteni. Azt mondod, hogy a felfedezésem - legalábbis az érvelésem - sérti az okság elvét? Azt mondod, hogy ha igazam lenne, akkor annak a megfigyelése révén, hogy a hangvilla rezegni kezd arra következtethetnénk, hogy egy percen belül biztosan bekövetkezik a robbanás, annak ellenére, hogy a gyújtás esetleg nem fog működni?

F.: Válaszod helyes és saját magad találtad ki.

f.: Be kell vallanom, hogy ez az általános érv nem győz meg valami nagyon - noha el kell fogadnom. Csaknem ugyanolyan meggyőző számomra, mint az energia-megmaradás elve, vagy a termodinamika második főtétele egy olyan ember számára, aki épp most talált fel egy örökmozgót. Hallottál már valaha is egy olyan emberről, aki azt mondja: „Köszönöm uram, hogy emlékeztet erre az általános törvényre. Most már világosan látom, hogy a találmányomnak nem szabad működnie". Egyetlen örökmozgós sem adja be a derekát, mielőtt meg nem mutatják neki gépének specifikus hibáját. Nem vagyok olyan buta, hogy harcoljak az okság elve ellen, amíg nincsenek komoly okok arra nézve, hogy kételkedjünk benne, de az érv így általánosságban mégsem elégít ki. Azt kell látnom, hogy konkrétan hol rossz a megfontolásom. Nem értesz egyet azzal, hogy minden egyes Fourier-komponens egy végtelen rezgés és hogy vannak mechanizmusok (szűrők), melyek képesek egy (vagy egynéhány) frekvencia kiválasztására? Mi rossz akkor?

F.: Ki fogjuk találni. Próbáljuk meg a lehető legáltalánosabban leírni a dolgokat (nehogy holnap vissza gyere egy új módszerrel, hogy becsaptad az okság elvét). Legyen egy fekete doboznak nevezett rendszered, amely mindazon dolgokat helyettesíti, amiről beszélünk (szűrő üvegek, hangvilla stb.). Van valamilyen erő, nevezzük bemenetnek, amely a dobozra hat és van valamilyen válasz a dobozból: a kimenet. Nyilván mind a bemenet, mind a kimenet időtől függő mennyiségek. Most pedig vedd át kérlek a szót, és írd le a doboz tulajdonságait;. - olyan tulajdonságokat, amelyek az összes effajta „kauzális dobozoknak" nevezhető dobozok tulajdonságai.

f.: Rendben. Mindenekelőtt - úgy gondolom - ennek a fekete doboznak lineárisan kell kapcsolatba hozni a be- és a kimenetet. Ismerek ugyanis olyan nemlineáris rendszereket, melyeknél öngerjesztés léphet fel.

F.: Jó, de talán ez túl erős megkötés lenne, mivel olyan nemlineáris rendszereket is ismerünk, amelyeknél nem lép fel öngerjesztés, és amelyek kauzálisak. Az egyszerűség kedvéért azonban tételezzük fel a linearitást. Van még valami?

f.: A te fekete dobozodnak mindig önmagával azonosnak kell maradnia; ha lennének olyan belső tulajdonságai, amelyek az idő múlásával megváltoznának, akkor képes lenne arra is, hogy bemenet nélkül adjon kimenetet. Ez a kimenet azt jelezné, hogy a dobozon belül történik valami.

F.: Ennyi az egész? Eddig csak azt zártad ki, hogy a doboz a saját számlájára dolgozzon. És ami egy adott bemenet és a megfelelő kimenet közötti okozati összefüggést illeti? Gondolj csak a hangvillára!

f.: Ha én egy dörrenést, vagy villanást képzelek el, már úgy értem, bármilyen

$$f(t) = \delta\left(t - t_0\right)$$

alakú bemenetet, az okság elvéről szóló érvelésedet elfogadva, akkor azt követelném meg, hogy semmilyen g(t) alakú kimenet nem kezdődhetne t_0-nál korábban, de t_0 után még bizonyos ideig még tarthatna.

F.: Kiváló! Most fogalmazzuk meg matematikailag. Az, hogy a kimenet a bemenet lineáris funkcionálja, azzal fejezhető ki, hogy

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(t,t'\right)\ f\left(t'\right)\ dt$$

nemde?

f.: Rendben. És több is igaz. Ha L(t,t') azt fejezi ki, amit a fekete doboz végez, és ha a fekete doboznak nincs valamilyen időben változó tulajdonsága, akkor L(t,t') csak a t-t' különbségtől

függhet.

F.: És az utolsó feltételed?

f.: Nos, $f(t) = \delta(t-t_0)$-lal azt kapjuk, hogy

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L(t-t')\ \delta\left(t'-t_0\right)\ dt' = L\left(t-t_0\right)$$

és g(t)-nek $t < t_0$-ra zérusnak kell lennie, ezért

$$L\left(t-t_0\right) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad t < t_0$$

Nem látom azonban a kapcsolatot a problémámmal. Én annak a megfontolásából indultam ki, hogy a fekete doboz hogyan hat az egyes különálló Fourier-komponensekre.

F.: Akkor miért nem Fourier-transzformálod a

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(t-t'\right)\ f\left(t'\right)\ dt' \text{ egyenletet}$$

és miért nem nézed meg, hogy milyen eredmény jön ki?

f.: Remek gondolat. Leírom a Fourier-transzformáltat:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{+i\omega t}\ dt^2$$

és azt találom, hogy

$$\tilde{g}(\omega) = \tilde{L}(\omega)\,\tilde{f}(\omega)$$

Ez gyönyörű! Egy monokromatikus bemenet egyszerűen egy számmal szorzódik. Ha a doboz szűrőként viselkedik, akkor $\tilde{L}(\omega)$ zérus, kivéve abban a frekvenciatartományban, amely ki lett szűrve. Még mindig nem értem, mi a rossz a felfedezésemben, - sőt ez a formula éppen az én érvelésemet látszik alátámasztani.

F.: Az oksági elvet még nem használtad ki teljesen: arra a tényre gondolok ugyanis, hogy t < t' esetén L(t-t') =. 0. Meg leszel lepve, hogy ez a feltétel mit is mond $\tilde{L}(\omega)$-ra nézve.

f.: Lássuk csak! Leírom:

$$\tilde{L}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\tau)\,e^{i\omega\tau}\ d\tau; \quad L(\tau) \equiv 0, \quad \text{ha} \quad \tau < 0$$

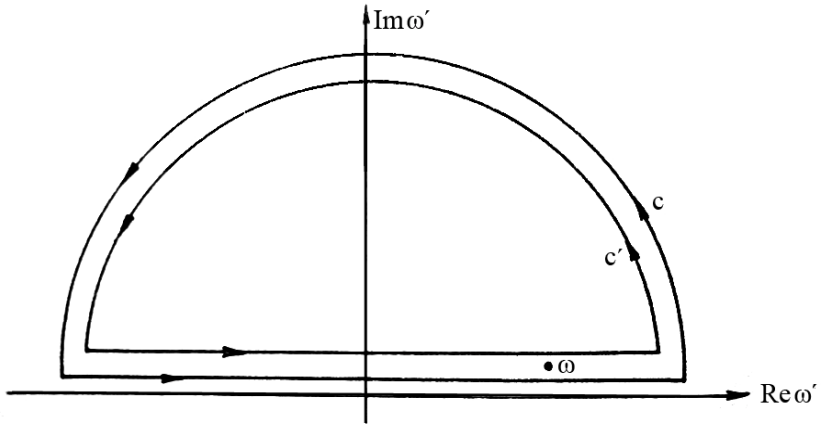
Igen, értem: $\tilde{L}(\omega)$ az ω analitikus függvénye és a felső falsíkon holomorf, mivel csak pozitív τ ad járulékot az integrálhoz. Azt gondolod, hogy ez komolyan korlátozza $\tilde{L}(\omega)$ lehetőségeit?

F.: Igen. És hadd használjak fel egy kis trükköt, hogy megkapjuk e korlátozás még részletesebb leírását, jobban mondva egy másféle leírását. Ismerve téged, tudom, hogy nem fogsz ragaszkodni a matematikai finomságokhoz, és ez könnyűvé teszi, hogy egészen röviden fejtsem ki a gondolatmenet fontosabb pontjait. Mivel $\tilde{L}(\omega)$ a felső félsíkon holomorf, értékét Im $\omega > 0$ esetére a Cauchy-formula adja meg:

$$\tilde{L}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{\tilde{L}(\omega)}{\omega'-\omega}\ d\omega' + \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{\tilde{L}(\omega)}{\omega'-\omega}\ d\omega'$$

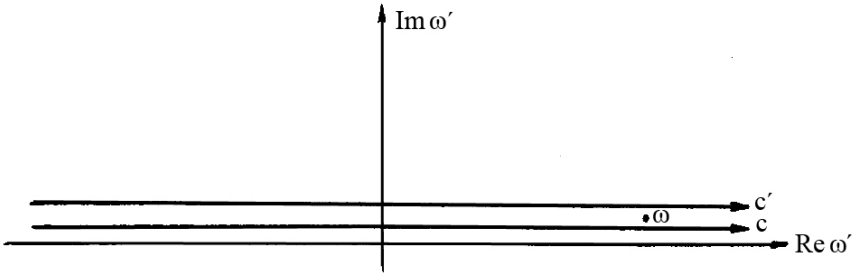
ahol az integrálás útját a következő ábra mutatja. A második integrál nem ad járulékot. Az én trükkön éppen az, hogy ennek

[2]Megjegyzés: A Fourier-transzformáció ezen definíciója egy $\sqrt{2\pi}$ szorzóban különbözik a korábban használt konvenciótól.



98. ábra

ellenére hozzáadom. Tartsunk a végtelenhez a félkörök sugarával és tételezzük fel, hogy $\widetilde{L}(\omega)$ elég gyorsan csökken ahhoz, hogy ezek a félkörök semmilyen járulékot se adjanak ilyen határátmenetben. (Ha nem lenne így, akkor $\widetilde{L}(\omega)$ helyett $\widetilde{L}(\omega)$-nak egy alkalmas polinommal osztott alakját tekintenénk.) Tehát a következő integrál-utaknál maradunk:



99. ábra

c és c' most -∞-től +∞-ig terjed. Végül közelítsük c'-t és c-t a valós tengelyhez úgy, hogy ω mindig közöttük maradjon, és ekkor megkapjuk...

f.: ... a főérték integrál kétszeresét, nemde?

F.: Igen, jól emlékszel, azt kapjuk, hogy

$$\widetilde{L}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\, 2\mathbb{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{L}(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega'$$

ahol $\mathbb{P}$ a főértéket jelöli. Természetesen ez egyáltalán nem bizonyítás, de heurisztikus érvünk mégis a helyes képlethez vezet. Most külön-külön leírjuk a reális és az imaginárius részt:

$$\widetilde{L}(\omega) = \mathrm{Re}\ \widetilde{L}(\omega) + i\ \mathrm{Im}\ \widetilde{L}(\omega)$$

ekkor

$$\mathrm{Re}\ \widetilde{L}(\omega) = \frac{\mathbb{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\ \widetilde{L}(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega' ,$$

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{L}(\omega) = \frac{\mathbb{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\ \widetilde{L}(\omega')}{\omega' - \omega}\, d\omega' \cdot$$

Ez a képletpár - amit diszperziós összefüggésnek neveznek - tökéletesen egyenértékű $\tau<0$ esetén $L(\tau) \equiv 0$-val, s így az okság elvével. Természetesen van néhány finom matematikai részlet, amelyet elhagytunk. Ezek azonban az egzakt megfogalmazásban és a Titchmarsh-tétel bizonyításában benne vannak. Ez a tétel (durván szólva) azt állítja, hogy az $\widetilde{L}(\omega)$ függvény három tulajdonsága:

a) hogy kielégíti a diszperziós összefüggéseket,
b) hogy egy $\tau < 0$ esetén eltűnő $L(\tau)$ Fourier-transzformáltja,
c) hogy a felső félsíkon holomorf

Lényegében csak egyetlen tulajdonság, amelyet különböző szavakkal háromféleképpen fejezünk ki.

f.: Már majdnem értem, hogyan is működik. De mit lehet mondani a példákról: az optikai szűrőről és a hangvilláról? Jól emlékszem, hogy a klasszikus elektrodinamikában az átlátszó anyag optikai tulajdonságai azáltal tehetők plauzibilissá, hogy a törésmutatót kapcsolatba hozzuk az elektromos polarizálhatósággal, amelyet egy olyan modell alapján számolunk ki, ahol az elektronok rugalmasan kötöttek és a fényforrás külső elektromos terének megfelelően oszcillálnak. És végül a hangvilla is valamilyen lineáris oszcillátorszerű valami. Nem próbálhatnánk meg egy speciális fekete doboz esetét megtárgyalni és megfontolásainkat erre alkalmazni? Ami engem illet, addig nem tudnék aludni, amíg egy konkrét gyakorlati példát nem látok megoldva.

F.: Jó, írjuk!

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

és tekintsük f(t)-t bemenetnek, x(t)-t pedig kimenetnek. Képezzük ezen egyenlet Fourier-transzformáltját:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{x}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega \cdot$$

Azt kapjuk, hogy

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\, \tilde{f}(\omega) \cdot$$

Látszik, hogy a fekete dobozunkat ebben az esetben a következő függvény írja le

$$\tilde{L}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

ahol ω_1 és ω_2 ...

f.: Hadd próbáljam meg folytatni. Ennek a függvénynek a felső félsíkon holomorfnak kell lennie. Valóban, a függvénynek ω_1-nél és ω_2-nél pólusai vannak, nevezetesen

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2} i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = -\frac{1}{2} i\gamma \pm \omega_0{}'$$

és mindkettő az alsó félsíkon fekszik. Ennek azt kellene jelentenie. hogy az $L(\tau)$ függvény kauzális, azaz $\tau < 0$ esetén eltűnik.
Hogy ezt megmutassuk, ki kell számolnunk az

$$L(\tau) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

integrált. A $-\infty$-től $+\infty$-ig vett integrációs utat $\tau < 0$ esetén úgy helyezhetjük át, hogy párhuzamosan $+i\infty$-ig toljuk. Mivel az integrandusnak a felső félsíkon nincsenek szinguláris helyei, az integrál eltűnik. Másrészről $\tau > 0$ esetén ha azt akarjuk, hogy az integrandus eltűnjék, az integrációs utat $-i\infty$-be kell letolnunk. Ez esetben a pólusok reziduumának járulékai

$$L(\tau) = \frac{1}{2\pi}\, 2\pi i \left\{ \frac{e^{-i\omega_1\tau}}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{e^{-i\omega_2\tau}}{\omega_2 - \omega_1} \right\} = \frac{1}{\omega_0{}'} e^{-\frac{1}{2}\gamma\tau} \sin\omega_0{}'\tau\ ,$$

azaz

$$L(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \tau < 0 \\ \dfrac{1}{\omega_0'}\, e^{-\gamma\frac{\tau}{2}} \sin\omega_0'\tau, & \text{ha } \tau > 0. \end{cases}$$

Ha most leírjuk, hogy

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, L(t-t')\, f(t') =$$

$$= \frac{1}{\omega_0'} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\gamma(t-t')}{2}} \sin\left[\omega_0'(t-t')\right] f(t')\, dt',$$

akkor explicite látjuk a kauzális viselkedést. Hogy $\widetilde{L}(\omega)$ eleget tesz a diszperziós összefüggéseknek, elhiszem anélkül, hogy bizonyítanád.

F.: Hogy teljessé tegyük megfontolásodat, a dörrenést és a villanást is meg kell még tárgyalnod, azaz az $f(t) = \delta(t)$ esetet!

f.: Jó, teljesen általánosan, mint ezt már láttuk

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L(t-t')\, f(t') = L(t),$$

ahol $L(t) = 0$, ha $t < 0$. Mondd, ez nem pont az, amit a differenciál-egyenlet Green-függvényének hívnak? Nem az a megoldás, amikor az egyenlet inhomogén része egy δ függvény?

F.: Teljesen úgy van, de most diszkutáld az explicit alakot!

f.:

$$x_0(t) = 0, \qquad \text{ha} \quad t < 0,$$

$$\left(\frac{1}{\omega_0'}\right)^{-\frac{1}{2}\gamma t} \sin\omega_0' t, \quad \text{ha} \quad t \geq 0 \cdot$$

A rezgés $t = 0$-nál indul ω_0' frekvenciával és $\gamma/2$ csillapítási tényezővel, és ez a két szám éppen az $\widetilde{L}(\omega)$ pólusainak imaginárius és valós része. Az amplitúdó, amellyel a rezgés indul (nevezetesen az $1/\omega_0$' mennyiség) pontosan az $\widetilde{L}(\omega)$ reziduumai modulusainak az összege a pólusoknál.

F.: Hadd összegezzem az eredményeket: Egy kauzális rendszer kiválóan alkalmas arra, hogy egy spektrum bizonyos részét kiválassza, és (csaknem teljesen) abszorbeálja a maradékot, de $\widetilde{L}(\omega)$ valós és képzetes részei mindig úgy vannak elrendezve, hogy ha spektrum bármelyik része is abszorbeálódik, a maradék épp jó fáziseltolást kap ahhoz, hogy semmilyen kimenő jel se előzhesse meg a bemenőt. A valós és a képzetes részek közti ezen összefüggést a diszperziós képletek fejezik ki. A kimenet azonban késhet is a bemenethez képest. Hogy mennyivel, milyen amplitúdóval és „élettartammal", ez az $\widetilde{L}(\omega)$ alsó félsíkon fekvő szinguláris pontjainak reziduumától és helyétől függ. Minden esetben hasonló helyzetet találsz, ahol az okság elve szerepet játszik, pl. a szórás kvantumelméletében, ahol viszont $\widetilde{L}(\omega)$ sokkal bonyolultabb lesz. Ezt ott szórási amplitúdónak nevezik: ennek nemcsak pólusai, de vágásai is lesznek. A vágások egy szórási folyamatban történő részecske keletkezéssel vannak kapcsolatban, a pólusoknak viszont ahhoz hasonló jelentésük van, mint amit ebben az egyszerű példánkban is találtunk: a valós és a képzetes részeik a rezonanciák frekvenciája (= energiája) és reciprok élettartama.

f.: Nagyon szépen köszönöm: Most már értem, hogy az okság elve nem csupán szegény találmányom elleni általános érv, sőt azt is értem, hogy az anyagi fizikai rendszerek hogyan valósítják meg azt, hogy az okság összeegyeztethető a frekvenciaszűrők létezésével. Ígérem, nem fogom megpróbálni, hogy jobb szűrő-üveget keressek! Szervusz!

F.: Szervusz!

III. Fourier-transzformációs táblázat

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,\tilde{f}(s)\,ds$	$\tilde{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,f(x)\,dx$
$f\left(\frac{x}{c}\right)$	$\lvert c\rvert\,\tilde{f}(c\cdot s)$
$f(-x)$	$\tilde{f}(-s)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\tilde{f}(-s)}$
$\tilde{f}(x)$	$f(-s)$
$f(x-x_0)$	$e^{isx_0}\,\tilde{f}(s)$
$e^{is_0 x}\,f(x)$	$\tilde{f}\left(s+s_0\right)$
$f(x)*g(x)$	$\sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s)$
$f(x)\cdot g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;\tilde{f}(s)*\tilde{g}(s)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$-is\cdot\tilde{f}(x)$
$x\;f(x)$	$-i\frac{d}{ds}\tilde{f}(s)$
1	$\sqrt{2\pi}\;\delta(s)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{isx_0}$
x^m	$(-i)^m\,\sqrt{2\pi}\;\delta^{(m)}(s)$
$P_n(x)$ polinom	$\sqrt{2\pi}\;P_n\left(-i\frac{d}{ds}\right)\delta(s)$
$\Theta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\pi\delta(s)+i\,\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}\right)\right]$
$\operatorname{sgn} x$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}\right)$
$\mathbb{P}\left(\frac{1}{x}\right)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\operatorname{sgn} s$
$\mathbb{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\lvert s\rvert$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,\tilde{f}(s)\,ds$	$\tilde{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\,f(x)\,dx$
$\mathbb{P}\left(\frac{1}{x^m}\right)$	$i^m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{s^{m-1}}{(m-1)!}\,\operatorname{sgn} s$
$\Theta(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1+i}{\sqrt{s}}$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a\lvert s\rvert}$
$\frac{1}{x-i0}$	$i\sqrt{2\pi}\cdot\Theta(s)$
$\frac{1}{x-ia}$ $\quad a>0$	$i\sqrt{2\pi}\cdot\Theta(s)\cdot e^{-as}$
e^{bx}	$\sqrt{2\pi}\,\delta(s-ib)$
$\sin bx$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-b)-\delta(s+b)\right]$
$\cos bx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(s-b)+\delta(s+b)\right]$
e^{-ax^2} $\quad a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$
$e^{\frac{x^2}{2}}$	$-i\,e^{\frac{s^2}{2}}$ (analitikus disztribúció, az integrálás a képzetes tengely mentén történi)
$\cos\left(ax^2\right)$ $\quad a>0$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{s^2}{4a}+\sin\frac{s^2}{4a}\right)$
$\sin\left(ax^2\right)$ $\quad a>0$	$\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\cos\frac{s^2}{4a}-\sin\frac{s^2}{4a}\right)$
e^{iax^2} $\quad a>0$	$\sqrt{\frac{i}{2a}}\,e^{i\frac{s^2}{4a}}$
$J_0(ax)$ $\quad a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Theta\left(a^2-s^2\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-s^2}}$
$\left(a^2-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot\Theta\left(a^2-x^2\right)$	$2^{\nu-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{\nu}\,\nu^{-\nu}\,J_{\nu}(as)$
$\frac{J_0(ax)}{x}$ $\quad a>0$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\arcsin\frac{s}{a}$ ha $0<s<a$ $i\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ha $a<s<\infty$
$\frac{1}{\sqrt{x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x)$	$i^n\,\Theta\left(1-s^2\right)P_n(s)$ [$P_n(s)$ = Legendre polinom]

A kiadásért felelős:
az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának dékánja
Megjelent a Tankönyvkiadó Vállalat műszaki gondozásában
Felelős osztályvezető: Gábor Elekné dr.
Műszaki szerkesztő: Kontra Zita
Megrendelve: 1980. június. Megjelent: 1981. február. Példányszám: 513
Készült: kisofszet eljárással, az MSZ 5601 -59
és az MSZ 5602-55 szabvány szerint,
16,8 (A/5) ív terjedelemben, 99 ábrával

80-1249 - Dabasi Nyomda, Budapest – Dabas
Felelős vezető: Bálint Csaba igazgató

Digitalizálta: Czimbalmos Gábor
ELTE TTK 2008.