# MATEMATIKA MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN

## Vizsga-zh 2013. 12. 20.

| Név | Neptun-kód | email-cím |
|---|---|---|
| | | |

*Munkaidő 4 óra. Használható: Bronstein, saját órai jegyzet.*

**1.** Paraméterezzük a háromdimenziós teret egy az $(x\,y)$ síkban elhelyezkedő, $R$ vezérsugarú kör köré felépített ortogonális toroidális koordinátarendszerrel! Vezessük be a megfelelő koordinátákat, majd fejezzük ki segítségükkel a derékszögű Descartes-koordinátákat! **b/** Írjuk fel a $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ívelemnégyzetet az új változókkal, és keressük meg a görbevonalú koordinátarendszer $h_k$ Lamé-együtthatóit! **c/** A Lamé-együtthatók segítségével adjuk meg a *grad, div* és a *rot* operációk kifejezését az új, görbe koordináták szerinti deriváltak segítségével!

**2.** Egy *m* tömegű test mozog egy $z = f(x)$ egyenletű lejtőn, $z$ irányú erőtérben, amelynek potenciálja az alapszint fölötti magasság, azaz a $z$ koordináta logaritmusával arányos. A pálya kezdőpontja $2a$, végpontja $a$ magasságban van az alapszint fölött. Legyen a potenciál értéke a kezdőpontban $V_0$, a végpontban 0 ! A kezdő- és végpont vízszintes távolsága $a$. A test kezdősebessége 0. Súrlódás nincs. Írjuk fel az út megtételéhez szükséges időt, mint az $f(x)$ függvény funkcionálját! Keressük annak a pályának az alakját, amelynek mentén a mozgáshoz szükséges idő a lehető legrövidebb lesz! Írjuk fel a variációs feladathoz tartozó Euler—Lagrange-egyenletet (megoldani nem kell)! (*Tanács: használjuk fel az energia megmaradásának tételét is!*)

**3.** Egy $w = f(z) = \Phi(x,y) + i\,\Psi(x,y)$ komplex függvény valós része $\Phi(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1 + 2y}$. Mutassuk meg, hogy ez a függvény harmonikus (azaz kielégíti a Laplace-egyenletet), majd a Cauchy—Riemann-differenciálegyenletek segítségével keressük meg a függvény harmonikus párját, azaz a komplex függvény $\Psi(x,y)$ képzetes részét! Melyik egyszerű alakú komplex $w = f(z)$ függvényről lehet szó?

**4.** Számítsuk ki a következő integrált a reziduum-tétel segítségével (más módszerre nem kapsz pontot):

$$I(t,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{z\, e^{-izt}}{z^4 + 10a^2 z^2 + 9\,a^4},$$ ahol $a$ rögzített valós, pozitív paraméter, a $t$ időparaméter pedig valós, de lehet negatív és pozitív is. Óvatosan diszkutáljuk a feladatot a $t$ változó előjelének figyelembevételével! Írjuk fel az eredményt kapcsos zárójel helyett egyetlen képlettel! Sorfejtéssel vizsgáljuk meg az $I(t,a)$ függvényt a $t=0$ pont közelében! Vázoljuk fel az $I(t,a)$ függvény viselkedését $t$ függvényében!

**5.** Számítsuk ki a következő NEM PERIODIKUS $f(t)$ függvény (ábra!) $F(\omega)$ Fourier-transzformáltját:

$$f(t) = e^{2\beta t}, \text{ ha } t < 0, \text{ és } f(t) = e^{-\beta t}, \text{ ha } t > 0.$$ ($\beta$ pozitív paraméter.)

Számítsuk ki és esetleg vázoljuk fel az $F(\omega)$ függvény valós és képzetes részét a valós $\omega$ frekvencia függvényében!

**6.** (*Ötösért*) Egy *a* és *b* oldalú téglalap alakú membrán a peremén körben rögzítve van. Legyenek a téglalap oldalai párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel! A membránra merőleges irányú $u(x,y)$ sztatikus kitérés differenciálegyenlete: $\Delta u(x,y) = f(x,y)$, ahol $f(x,y)$ a membránt az adott pontban terhelő erőt jelenti. Terheljük meg most a membránt egy egyetlen $(\xi,\eta)$ pontban ható, egységnyi nagyságú erővel! Számítsuk ki az $u(x,y)$ kitérést a membrán tetszőleges pontjában! (*Útmutatás: használjuk a Green-függvény módszerét, és a Dirac-delta előállítását a differenciáloperátor sajátfüggvényei segítségével! Az eredményt végtelen függvénysor alakjában kapjuk meg, ezt nem kell felösszegezni... :)*)

dávidgyula