

MATEMATIKAI MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN

Írásbeli vizsga, 2011. január 10.

Írja a választ (eredményt) a kérdés melletti helyre! Ha nem tud érdemben válaszolni, húzzon egy vízszintes vonalat; ha a válasza nem fér el a megadott helyen, de a mellékszámításokat tartalmazó lapon megtalálható, tegyen csillagot (részmegoldás esetén hiányjelet) a feladat sorszámára elé!

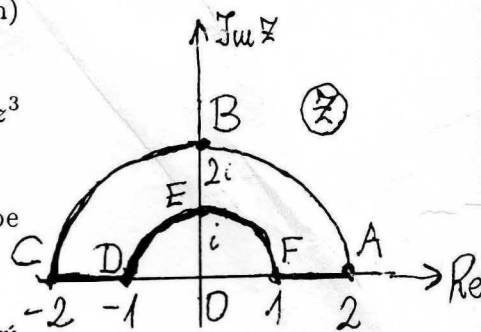
1. Konzervatív-e a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (a\mathbf{r})\mathbf{r}$ vektormező? (a adott konstans vektor.)

2. Alkalmazza a Gauss–Ostrogradskij-tételt a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (3x - y^{2011}; -y + \sin^2 x; -z)$ vektormező felületi integráljának kiszámításánál, ha az integrálás egy $\mathbf{r}_0 = (1; -2; 10^{23})$ középpontú, $R = 1$ sugarú gömb felületére terjed ki.

3. Egy $\Phi(x; y; z) = x^2 y z + f(y; z)$ alakú skalármező kielégíti a (homogén) Laplace-egyenletet! Adjon meg egy lehetséges $f(y; z)$ -t!

4. Ellenőrizze, hogy teljesülnek-e a Cauchy–Riemann-relációk a $w(z) = +iz^3$ komplex függvényre!

5. Rajzban adja meg (az A, B, C, D, E, F pontokat is bejelölve), hogy mibe képezi le a $w(z) = +i \ln z$ komplex függvény az ábrán látható fél-körgyűrűt?



6. Mennyi a $w(z) = \frac{2i}{z^2 - 2z}$ függvény integrálja egy origó középpontú, R sugarú körvonalra ("pozitív" körüljárással), ha

a) $R = 1$, b) $R = \pi$?

7. Írja fel az $L(y, y', x) = \frac{x}{2} \cdot y'^2 + \cos y$ variációs alapfüggvényhez (Lagrange-függvényhez) tartozó Euler–Lagrange-egyenletet!

8. Írja fel az $L(y, y') = y'^4 - y^4$ hiányos Lagrange-függvényhez tartozó elsőrendű differenciálegyenletet!

9. Határozza meg az $y'' - 4y = \delta(x - x_0)$ differenciálegyenlet végtelenben eltűnő megoldását, vagyis adja meg az egyenlet $G(x, x_0)$ Green-függvényét!

Útmutatás: A megoldás megkapható Fourier-transzformációval, vagy „elemi” úton, a homogén egyenlet megoldásainak illesztésével is.

10. Egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektormezőnek gömbi polárkoordináta-rendszerben csak ϑ irányú komponense van, és annak nagysága csak ϑ -tól függ: $v_\vartheta = f(\vartheta)$. (Ilyen pl. a szélesség a légkör egy bizonyos részében, ha a szél ott pontosan dél felé fúj, nagysága pedig a magasságtól és a földrajzi hosszúsági koordinátától független, de a szélességi koordinátától függ.) Adjuk meg az $f(\vartheta)$ függvényt, ha $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ forrásmentes! Örvénymentes-e ez a vektormező?