

1. Mennyi a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r^2 \cdot \mathbf{r}$ vektormező rotációja, illetve divergenciája?

2. Mennyi a $\Phi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|$ skalármező gradiense?

3. Fogalmazza meg a Stokes-tétel állítását!

4. Egy folyadékáramlás sebessége mindenhol ugyanolyan irányú, de nem azonos nagyságú vektor.

a) Lehet-e ennek a vektormezőnek nullától különböző örvényerőssége (rotációja)?

b) Lehet-e ez a vektormező forrásmentes (nulla divergenciájú)?

5. Egy vektormező $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Mekkora ennek a mezőnek a görbe menti integrálja egy $a = 2$ és $b = 1$ féltengelyű, az $x - y$ síkban felvő ellipszis egyik ívére, ha az ellipszis csúcsa az origóban van?



6. Egy vektormező $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$.

a) Mennyi ennek a mezőnek a felületi integrálja egy $R = 1$ sugarú, origó középpontú körlapra?

b) Mennyi ennek a mezőnek a felületi integrálja egy olyan henger palástjára és a fedőlapjára együttesen, amely henger magassága $h = 2$ egység, alaplapja pedig az előző alkérdésben szereplő körlap?

(A válaszhoz hasznos lehet az integráltételek ismerete!)

7. Adja meg annak a hengerszimmetrikus $\Phi(\varrho)$ skalárpotenciálnak a helyfüggvégységét, amelynek „Laplace”-a mindenhol egységnyi nagyságú ($\text{div grad } \Phi = 1$)!

8. Írja fel a Cauchy–Riemann-relációkat, és ellenőrizze a teljesülésüket a $w(z) = 2z^2 + z - 1$ függvény esetében!

9. Számítsa ki az $f(z) = \frac{-ie^z}{z-1}$ komplex függvény körintegrálját egy $z_0 = 1$ középpontú, $R = 2008$ sugarú körvonalra!

10. Adja meg az $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x^2}$ függvény Fourier-transzformáltjának Fourier-transzformáltját!
(A válasz részletes számítás nélkül is megadható!)

11. A rugalmasan ágyazott hosszú rugalmas rúd (pl. egy vasúri sín) lahajlását megadó differenciálegyenlet

$$y''''(x) + ay(x) = p(x),$$

ahol a egy konstans, amely az egyszerűség kedvéért 1-nek választható, $p(x)$ pedig a terheléssel arányos függvény. Számítsa ki ezen probléma Green-függvényének Fourier-transzformáltját!

Pótfeladat: Számítsa ki (állandók erejéig) a Green-függvényt és vázolja annak alakját!

12. Fogalmazza meg a variációszámítás alapproblémáját, és írja fel az Euler–Lagrange-egyenletet!
Fogalmazza meg variációs feladatként a legkisebb felszíni forgásfelület problémáját!