

## Matematika kritériumdolgozat 2015. október 17. II. rész

1. Egy arany-ezüst ötvözet 75%-a arany. Ez az ötvözet 175%-kal értékesebb, mint a fordított összetételű (75% ezüst, 25% arany) ötvözet. Az ezüst egységára grammonként 200 Ft. Mennyi az arany egységára? 6 pont

*Megoldás:*

Ha 175%-kal értékesebb, akkor az értéke 275%-a a fordított összegnek. Jelölje  $x$  az arany egységárát.

$$2,75(0,25 \cdot x + 0,75 \cdot 200) = 0,75 \cdot x + 0,25 \cdot 200.$$

$$\text{Ebből } x = 362,5 : 0,0625 = 5800 \text{ Ft.}$$

Tehát az arany grammonkénti ára 5800 FT.

2. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán: 8 pont

$$3 \cdot 4^{x-2} + 2 \cdot 3^{y+1} = 14$$

$$5 \cdot 3^{y+2} + 17 = 2 \cdot 4^{x-1}$$

*Megoldás:*

Vezessünk be új ismeretlent  $4^x = a > 0$  és  $3^y = b > 0$

A behelyettesítés és rendezés után a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$3a + 96b = 224$$

$$90b - a = -34$$

Az egyenletrendszer gyökei:  $a = 64$  és  $b = \frac{1}{3}$ .

Ebből  $x = 3$  és  $y = -1$  a lehetséges számpár. Ez a számpár kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget: 10 pont

$$\frac{\sqrt{5-x}}{2-\sqrt{x}} \geq 0$$

*Megoldás:*

Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés akkor van értelmezve, ha  $x$  értéke 0 és 5 között van (a határokat is beleértve), de nem egyenlő 4-gyel:  $0 \leq x \leq 5$  és  $x \neq 4$ .

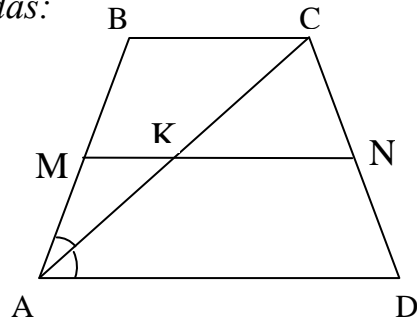
A számláló nemnegatív, tehát a tört akkor nemnegatív, ha a vagy 0 a számláló ( $x = 5$ ), vagy pozitív a nevező, azaz

$2 - \sqrt{x} > 0$ , vagyis  $\sqrt{x} < 2$ , azaz  $0 \leq x < 4$ , a megoldás

tehát  $0 \leq x < 4$ , vagy  $x = 5$ .

4. Egy húrtrapéz átlója felezi a trapéz hegyes szögét és ez az átló a trapéz középvonalát 8 cm-es és 12 cm-es részekre osztja. Határozza meg a trapéz kerületét! 10 pont

Megoldás:



$BC$ , és  $AD$  párhuzamosan egymással és az  $MN$  középvonallal. A (párhuzamos szelők tétele alapján a) középvonal felezi az átlót.  $A$ -ból  $MK$ -t kétszeresére nagyítva kapjuk  $BC$ -t, így ha  $MK = 8$  cm, akkor  $BC = 16$  cm. Hasonlóan,  $C$ -ből  $KN$ -t kétszeresére nagyítva kapjuk  $AD$ -t, így ha  $KN = 12$  cm, akkor  $AD = 24$  cm.

Az  $ABC$  háromszögben az  $A$ -nál és a  $C$ -nél levő szögek váltószögek, így egyenlők.  $ABC$  egyenlőszárú, ebből következik, hogy  $AB = BC = 16$  cm.

Mivel húrtrapézról van szó,  $AB = CD = 16$  cm.

A trapéz kerülete  $K = 16 + 16 + 16 + 24 = 72$  cm.

5. Egy 20 cm sugarú, kör alakú kartonpapírból kivágjuk a lehető legnagyobb oldalú, szabályos tízszöget. Milyen hosszúak a tízszög oldalai, és hány százalék lesz a papírhulladék? 13 pont

Megoldás:

*ÁBRA*

A szabályos tízszög egy oldala  $AB = a$ , az  $AB$  húr felezőpontja  $F$ , a körülírt kör középpontja  $O$ . Az  $AB$  húrhoz tartozó középponti szög  $36^\circ$ . Az  $AOF$  derékszögű háromszögben

$$\sin 18^\circ = \frac{a}{2r},$$

ebből  $a \approx 12,3$  cm. Az  $ABO$  háromszög területe

$$t = \frac{r^2 \sin 36^\circ}{2}.$$

A tízszög területe:  $10t = 5r^2 \sin 36^\circ$ . A papírhulladék területét megkapjuk, ha a kör területéből kivonjuk a tízszög területét:  
 $r^2\pi - 5r^2 \sin 36^\circ = r^2(\pi - 5 \sin 36^\circ) \approx 81 \text{ cm}^2$ .

A papírhulladék és a kör területének aránya

$$\frac{r^2(\pi - 5 \sin 36^\circ)}{r^2\pi} = \frac{\pi - 5 \sin 36^\circ}{\pi} = 0,064 \approx 6,4\%.$$

6. Egy jutalomutazásra 15 férfit és néhány nőt jelöltek, akik közül 2 személyt sorsolnak ki. Bármely személynek ugyanakkora esélye van arra, hogy kisorsolják. Tudjuk, hogy  $\frac{7}{20}$  annak a valószínűsége, hogy mindkét kiválasztott személy férfi. Hány nő van a jelöltek között? 13 pont

*Megoldás:*

Jelöljük  $x$ -szel a nők számát. Az összes lehetséges kiválasztás száma

$$\binom{15+x}{2} = \frac{(15+x)(14+x)}{2},$$

a két férfi kiválasztása

$$\binom{15}{2} = 15 \cdot 7$$

féleképpen lehetséges. A keresett valószínűség:

$$\frac{\frac{15 \cdot 14}{2}}{\frac{(15+x)(14+x)}{2}} = \frac{7}{20}$$

Rendezés után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$x^2 + 29x - 390 = 0.$$

Ennek a gyökei 10 és  $-39$ . A feladatnak a 10 felel meg.

Tehát  $x = 10$  a nők száma.

Valóban

$$\frac{\binom{15}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{15 \cdot 14}{25 \cdot 24} = \frac{7}{20}.$$

A teszt megoldása: b d d d c d d b b c b d b a a a a b c c