Matematika kritériumdolgozat 2013. december 14. II. rész MO

1. Egy társaság tagjai közül a párok felsorakoznak a páros tánchoz. Egy fiú és egy lány alkot egy párt. A társaság hányadrésze állt fel a tánchoz, ha a fiúk $\frac{2}{3}$ része, a lányok $\frac{3}{5}$ része táncol? 7 pont

Megoldás

A táncoló fiúk száma legyen f, a lányoké n.

A párok száma $\frac{2}{3}f = \frac{3}{5}n$.

Ebből $f = \frac{9}{10}n$.

A társaság tagjai összesen $f + n = \frac{19}{10}n$.

Közülük a táncolók száma összesen $2 \cdot \frac{3}{5}n = \frac{6}{5}n$.

A keresett arány $\frac{6}{5} : \frac{19}{10} = \frac{12}{19}$.

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: 7 pont

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

Megoldás

A hatványozás tulajdonságai alapján

$$2^x 3^x + 6 \cdot 2^x 3^x = 2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x$$

2^x-nel (nem nulla) osztva

$$3^x + 6 \cdot 3^x = 1 + 2 + 4$$

Rendezve

$$7 \cdot 3^x = 7$$

azaz

$$3^x = 1$$

amiből

$$x = 0.$$

3. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: 9 pont

$$\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{4x-3} \leq 3x - 1$$

Megoldás

A négyzetgyök akkor van értelmezve, ha $4x - 3 \geq 0$, illetve $3x - 5 \geq 0$.
Mivel a baloldal nem negatív, a jobboldalra a $3x - 1 \geq 0$ feltétel adódik.
Ezek együtt $\frac{5}{3} \leq x$ esetben teljesülnek.
Az

$$(3x-5)(4x-3) \leq (3x-1)^2$$

egyenlőtlenséget kell tehát az $\frac{5}{3} \leq x$ halmazon megoldani.
Rendezve

$$3x^2 - 23x + 14 \leq 0.$$

A pozitív főegyütthatójú másodfokú függvény a zérushelyek között negatív, azaz $\frac{2}{3}$ és 7 között.
Ebből $\frac{5}{3} \leq x \leq 7$ esik a megengedett tartományba.

4. Egy szabályos pénzérmét tízszer egymás után feldobunk. Ha fejet dobunk, 2-est, ha írást dobunk, akkor 3-ast írunk sorban egymás mellé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott tízjegyű szám osztható 3-mal? 11 pont

Megoldás

A fenti eljárással összesen $2^{10} = 1024$ szám kapható, mivel mind a 10 helyre 2 számjegy kerülhet.

A kapott szám osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.
Mivel a szám 2-es és 3-as számjegyekből áll, ezért a számjegyek összege pontosan akkor lesz 3-mal osztható, ha a 2-esek száma osztható 3-mal, azaz 9, 6, 3, 0 darab 2-es van benne.
Ezek száma:

eset	indoklás	kül. esetek száma
9 db 2-es, azaz 1 db 3-as	10 helyre kerülhet	10
6 db 2-es, azaz 4 db 3-as	$\binom{10}{4}$ helyre kerülhet	$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4}=210$
3 db 2-es	$\binom{10}{3}$ helyre kerülhet	$\frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3}=120$
0 db 2-es	egyértelmű	1

A fenti eljárással összesen 10 + 210 + 120 + 1 = 341 szám kapható.
Annak a valószínűsége, hogy 3-mal osztható számot kapunk $\frac{341}{1024}\approx 0{,}333$

5. Egy r sugarú körben az a húr kétszer olyan hosszú, mint a b húr. Tudjuk azt is, hogy a rövidebb húr kétszer olyan távolságra van a középponttól, mint a hosszabbik húr. Mekkora a kör sugarának és a rövidebb húr hosszának az aránya? 12 pont

Megoldás

Két r átfogójú derékszögű háromszögre felírjuk Pithagorasz tételét:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2=r^2 \text{ és } \left(\frac{b}{2}\right)^2+(2d)^2=r^2$$

A feltételek szerint $a = 2b$, ezért

$$b^2+d^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(2d)^2$$

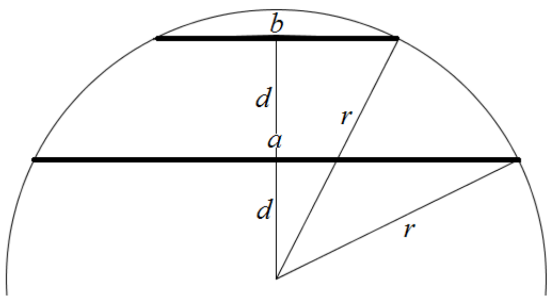
Rendezve

$$3b^2=12d^2, \text{azaz } b^2=4d^2, b = 2d.$$

Ezt valamelyik kiinduló egyenletbe visszaírva $5d^2=r^2$ adódik, azaz $d=\frac{r}{\sqrt{5}}$.

Mivel $b = 2d$, a keresett arány

$$r:b=\frac{\sqrt{5}}{2}$$



6. Határozza meg x azon valós értékeit, amelyekre az 14 pont

$$a_1=\log_2 1$$
$$a_2=\log_2(\sin^2 x-\cos^2 x)$$
$$a_3=\log_2\cos^2 x$$

egy számtani sorozat első három tagja.

Megoldás *1 pont*

A három szám egy számtani sorozat első három tagja, ha $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$, azaz

$$\log_2(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{\log_2\cos^2 x+\log_2 1}{2}.$$

Az egyenletben szereplő kifejezések akkor vannak értelmezve, ha *1 pont*

$$\sin^2 x-\cos^2 x>0 \text{ és } \cos x\neq 0.$$

Felhasználva, hogy *3 pont*

$$\log_2 1=0 \text{ és } \frac{\log_2\cos^2 x}{2}=\log_2|\cos x|,$$

és hogy a logaritmus kölcsönösen egyértelmű, megoldandó a következő egyenlet:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = |\cos x|$$

A) A $\cos x > 0$ eset vizsgálata: *4 pont*

Az egyenlet rendezése és a $\sin^2 x + \cos^2 x$ azonosság alkalmazása után $\cos x$-ben másodfokú egyenletet kapunk

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\cos x = -1 \text{ és } \cos x = \frac{1}{2},$$

amelyekből az első hamis gyök.

A $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletből az $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ gyökök adódnak, ahol a k egész szám.

B) A $\cos x < 0$ eset vizsgálata: *4 pont*

Ekkor a $\cos x$-ben másodfokú $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ egyenlet negatív gyökeit keressük.

A másodfokú egyenlet gyökei $\cos x = 1$ és $\cos x = -\frac{1}{2}$, de az első hamis gyök.

A

$\cos x = -\frac{1}{2}$ egyenletből az $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ gyökök adódnak, ahol a n egész szám.

Könnyen látható, hogy az A) és B) eset megoldásai kielégítik a $\sin^2 x - \cos^2 x > 0$ feltételt.

Mindkét esetben ugyanaz a három szám a számtani sorozat első három tagja: *1 pont*

$$a_1 = 0;\quad a_2 = -1;\quad a_3 = -2.$$