Matematika szintfelmérő 2012. szeptember fizika, földtudományi és környezettan BSC

1.	Két vízzel színültig töltött henger alakú tartályból reggel 7 órakor egy-egy azonos teljesítményű szivattyú egyenletes sebességgel szivattyúzni kezdte a vizet. 9 órakor a két tartályban ugyanolyan magasan állt a víz. Pontosan délben kiürült az első tartály, 15 órakor pedig a második tartály is. Ha a második tartály 10 méter magas, akkor milyen magas az első?	8 pont

Megoldás:

A 10 méter magas második tartályból összesen 8 órán át szivattyúzták a vizet. Az első két órában tehát a benne lévő víz egynegyedét szivattyúzták ki, ennek megfelelően a víz szintje ebben a tartályban az első két órában 10:4 = 2,5 métert süllyedt. 9 órakor tehát mindkét tartályban 7,5 méter magasan állt a víz. *(3 pont)*

Ekkor az első tartályban már csak az eredeti vízmennyiség 3/5-öd része volt jelen, hiszen abból összesen 5 óra alatt fogyott ki az összes víz. *(3 pont)*

Ezért az első tartály magassága (5/3)·7,5 = 12,5 méter. *(2 pont)*

2.	Egy afrikai kúszó növény elültetése után az első évben 80 centimétert nő. Ezt követően minden évben az előző évi növekedésének kétötödével növekszik. Mennyit növekszik ez a növény 8 év alatt?	8 pont

Megoldás:

A növény növekedése az egyes években: *(4 pont)*

1. év: 80

2. év: $80 + \frac{2}{5} \cdot 80$

3. év: $80 + \frac{2}{5} \cdot 80 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 80$

4. év: $80 + \frac{2}{5} \cdot 80 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 80 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 80$

stb.

8. év: $80 + \frac{2}{5} \cdot 80 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 80 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 80 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 80$

Egy 8 tagú mértani sorozat összegét kell kiszámítanunk. A mértani sorozat első tagja 80, hányadosa $\frac{2}{5} = 0{,}4$. *(4 pont)*

$$S_8 = 80 \cdot \frac{0{,}4^8 - 1}{0{,}4 - 1} = \frac{800}{6} \cdot (1 - 0{,}4^8) \approx 133{,}24$$

Tehát ez a növény 8 év alatt kb. 133 cm-t nő.

3.	Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: $$2 - \sin x = \frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$	10 pont

Megoldás:

$\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\pi, k \in Z$ *(2 pont)*

$2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$. Rendezve és $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ felhasználásával kapjuk, hogy, $\sin x = \frac{1}{2}$, *(5 pont)*

ebből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$ ahol $k \in Z$ *(3 pont)*

4.	Mely valós *x* értékekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség: $$\frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2+x}} \geq 0\ ?$$	10 pont

Megoldás:

A baloldali kifejezés csak akkor értelmes, ha x < 2 és x > -2, így az alaphalmaz $-2 < x < 2$ *(2 pont)*

Az alaphalmaz fölött ekvivalens átalakítással *(5 pont)*

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

Mindkét oldalt a pozitív $\sqrt{4-x^2}$ kifejezéssel szorozva

$$\sqrt{2+x} \geq \sqrt{2-x}$$

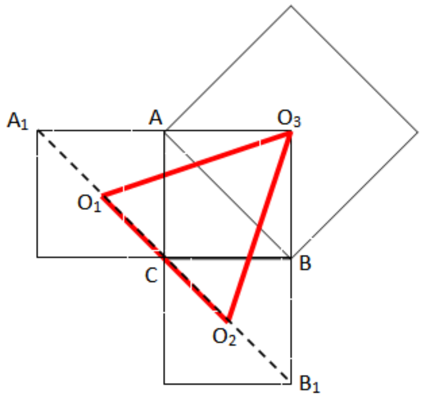
négyzetre emelve kapjuk, hogy $2+x \geq 2-x$, vagyis $x \geq 0$

A $-2 < x < 2$ feltétel és $x \geq 0$ összevetéséből a megoldáshalmaz $0 \leq x < 2$ *(3 pont)*

5. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalaira négyzeteket rajzolunk. Mutassa meg, hogy a négyzetek középpontja által alkotott háromszög területe fele az átfogóra rajzolt négyzet területének.	10 pont

Megoldás:

Az $A_1O_3B_1$ háromszög területe egyenlő az átfogóra írt négyzet területével (négy darab az *ABC* háromszöggel egybevágó háromszögre darabolható mindkettő). *(5 pont)*



Az $O_1O_2O_3$ háromszögnek ugyanakkora a magassága, mint az $A_1O_3B_1$ háromszögnek, az alapja fele A_1B_1-nek, így a területe is fele az $A_1O_3B_1$ háromszög területének. *(5 pont)*

Számításos megoldás is várható, pl.:

$O_1O_2 = CO_3 = \sqrt{2}$, ha az eredeti háromszög befogója 1.

Az $O_1O_2O_3$ háromszög területe: $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$.

Az átfogóra rajzolt négyzet területete $\sqrt{2}^2 = 2$.

6. Egy sorozatot a következő képlettel adunk meg: $a_n = \log_2\left(\sqrt[4]{2}^n\right)$, ahol *n* tetszőleges pozitív egész szám.	12 pont

a) Előfordul-e a sorozat tagjai között az $\frac{1}{2}$, a 16 és a 100? Ha igen, a sorozat hányadik tagja?

b) Határozza meg a sorozat első *n* tagjának összegét.

Megoldás:

a) $a_n = \log_2\left(\sqrt[4]{2}^n\right) = \log_2 2^{\frac{n}{4}} = \frac{n}{4}$, *(3 pont)*

tehát: $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{64} = 16$, és $a_{400} = 100$. *(3 pont)*

b) Számtani sorozatról lévén szó, melynek első tagja is és differenciája is ¼, az első *n* tag összege éppen negyed része az első *n* poz. egész összegének, azaz *(6 pont)*

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{8}.$$

7. Egy szabályos dobókockával egymás után dobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között van legalább két egyenlő, ha — 14 pont

a) négyszer dobunk?

b) n-szer dobunk?

Megoldás:

a) Először nézzük annak a valószínűségét, hogy minden dobás különböző *(2 pont)*

n=4 esetén $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6\cdot6\cdot6\cdot6}=\frac{5}{18}$. *(3 pont)*

Tehát annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között van legalább két egyenlő: *(2 pont)*
$1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$.

b) Ha $n\geq 7,$ akkor a skatulya-elv miatt lesz két olyan dobás, amelyek egyenlők, azaz ennek a valószínűsége 1, ha viszont $n<2$, a valószínűsége 0. *(2 pont)*

Ha $2\leq n\leq 6$, annak a valószínűsége, hogy minden dobás különböző: *(3 pont)*

$$\frac{6\cdot5\cdot\ldots\cdot(6-n+1)}{6^n}.$$

Annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között van legalább két egyenlő: *(2 pont)*

$$1-\frac{6\cdot5\cdot\ldots\cdot(6-n+1)}{6^n}.$$

8. A derékszögű koordináta rendszer síkjában adott egy téglalap három csúcsával: A(-2;-3), B(4;-3), C(4;11), valamint egy kör az egyenletével: — 14 pont
$x^2+y^2-20x-12y+100=0$.
Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a téglalapnak is és a körnek is a területét.

Megoldás:

A negyedik csúcs nyílván: D(-2;11), a téglalap középpontja (1;4). *(3 pont)*

A kör egyenletét teljes négyzetté alakítva: *(4 pont)*
$(x-10)^2+(y-6)^2=36$
A kör középpontja: (10;6), sugara 6.

A két középponton átmenő egyenes felezi a két alakzat területét. *(2 pont)*

Az egyenes egyenlete $y=\frac{2}{9}x+\frac{34}{9}$ *(3 pont)*

9. Egy 12 cm élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát, amelynek oldalélei a kocka-élek 4 cm hosszúságú darabjai. Mekkora a megmaradt test térfogata és felszíne? Hány csúcsa, éle, lapja van a keletkezett testnek? — 14 pont

Megoldás:

Egy levágott gúla a kocka egy lapjából olyan egyenlőszárú derékszögű háromszöget metsz le, amelynek a befogója 4, átfogója $4\sqrt{2}$, tehát területe 8. *(3 pont)*

Minden kocka lapból $12^2-4\cdot8=112$ területű nyolcszög marad meg. Minden vágásnál keletkezik egy szabályos háromszög, amelynek oldala $4\sqrt{2}$, területe $8\sqrt{3}$. Tehát az új felszín $6\cdot112+8\cdot8\sqrt{3}=782{,}25$. *(4 pont)*

Egy levágott gúla térfogata $\frac{4\cdot4}{2}\cdot4\cdot\frac{1}{3}$. 8 ilyen gúlát vágunk le, tehát a maradék térfogat: *(4 pont)*
$12^3-\frac{256}{3}=1642\frac{2}{3}\approx1642{,}6$.

A keletkezett testnek 14 lapja, 24 csúcsa és 36 éle van. *(3 pont)*