**Matematika és fizika BSc matematika szintfelmérő megoldásai 2010. szeptember**

**1.** *(8 pont)* Egy matematika versenyen három feladatot tűztek ki. Az első feladatot a résztvevők 85 százaléka oldotta meg, a másodikat 80, a harmadikat pedig 75 százalékuk. Állapítsuk meg, hogy a versenyzőknek legalább hány százaléka oldotta meg mind a három feladatot.

***Megoldás***
Az első feladatot a résztvevők 15 százaléka nem oldotta meg, a másodikat 20, a harmadikat 25 százalékuk.
Így, a legrosszabb esetben a versenyzőknek legfeljebb a 15 + 20 + 25 = 60 százaléka nem boldogult legalább egy feladattal, tehát legalább 40 százalékuk valamennyi feladatot megoldotta.
*Az eredmény éles, ha különböző személyek nem oldották meg az egyes feladatokat, akkor pontosan 40 százalékuk oldotta meg valamennyi feladatot.*

**2.** *(8 pont)* Az *m* valós paraméter mely értéke mellett lesz a valós számokon értelmezett $4x^2 + mx + 1$ kifejezés minden értéke a) pozitív, b) negatív?

***Megoldás***
A főegyüttható pozitív, ezért semmilyen *m* esetén nem lesz a $4x^2 + mx + 1$ kifejezés értéke minden valós *x* értékre negatív. A kifejezés minden értéke akkor pozitív, ha a $D = m^2 - 16$ diszkrimináns negatív, azaz, ha $|m| < 4$.

**3.** *(8 pont)* Bizonyítsuk be, hogy ha a 121 szám jegyei közé mindkét helyen ugyanannyi nullát írunk (pl. 10201, 1002001 stb.), akkor mindig egy egész szám négyzetét kapjuk.

***Megoldás***
Ha *k* darab 0-t írunk mindkét helyen, akkor az első 1 után 2(*k*+1) számjegy áll, tehát a helyiértéke $10^{2(k+1)}$, a középső 2 helyiértéke $10^{k+1}$, tehát a kapott szám

$$10^{2(k+1)} + 2 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1} + 1)^2,$$

és ez valóban egy egész szám négyzete, $k \in \boldsymbol{N}$.

**4. a)** (*4 pont)* Egy számtani sorozatban $a_5 = 17$ és $a_{17} = 5$. Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat *n*-edik tagját, ha *n* tetszőleges pozitív egész szám.

**b)** (*6 pont*) Egy számtani sorozatban $a_k = l$ és $a_l = k$, ahol *k* és *l* adott, különböző pozitív egész számok. Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat *n*-edik tagját, ha *n* tetszőleges pozitív egész szám.

***Megoldás***
**a)** $a_{17} - a_5 = (17 - 5)d$, azaz $5 - 17 = (17 - 5)d$, amiből *d* = - 1. Az n-edik tag
$a_n = a_5 + (n - 5)d = 17 + (n - 5)(-1) = 17 - n + 5$, tehát $a_n = 22 - n$.
**b)** $a_k - a_l = (k - l)d = l - k$ tehát

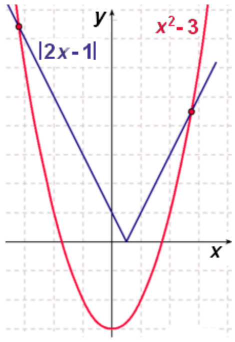
$$d = -1 \; a_n = a_k + (n - k)d = l - (n - k) = l + k - n.$$

**5.** Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!
**a)** *(8 pont)* $\cos^2 x = \sin 2x + \sin^2 x$
**b)** *(9 pont)* $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$
**c)** *(10 pont)* $(\log_3 3x)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4.$

***Megoldás***
**a)** *1. változat:* $\cos^2 x = \sin 2x + \sin^2 x$ átrendezve $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$. A $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ alapján $\cos 2x = \sin 2x$, amiből $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, azaz $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$.
*2. változat:* A $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ azonosság segítségével az egyenlet $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$ alakba írható. Mivel $\cos x$ zérushelyei nem gyökei az egyenletnek, feltehetjük, hogy $\cos x \neq 0$, és oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát $\cos^2 x$ –szel, amiből (rendezés után) a $\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x - 1 = 0$ másodfokú-ra visszavezethető egyenletet kapjuk. Ennek gyökei $\mathrm{tg} x = -1 + \sqrt{2}$ és $\mathrm{tg} x = -1 - \sqrt{2}$ .
Ebből $x_1 = \mathrm{arctg}(-1 + \sqrt{2}) + k\pi$ és $x_2 = \mathrm{arctg}\left(-(1 + \sqrt{2})\right) + l\pi = -\mathrm{arctg}(1 + \sqrt{2}) + l\pi$, $k, l \in \boldsymbol{Z}$.

Aki zsebszámológéppel (túl hamar) használja $\text{tg}x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$ és $\text{tg}x = -1 - \sqrt{2} \approx -2.4142$ közelítést, annak $x_1 \approx 22{,}5° + k \cdot 180°$ és $x_2 \approx -67{,}5° + l \cdot 180°$, ahol $k, l \in \boldsymbol{Z}$. Észrevehetjük, hogy a két sorozat összevonható: $x \approx 22{,}5° + k \cdot 90°$ $k \in \boldsymbol{Z}$, vagy átírhatjuk radiánba, ekkor az 1. változat eredményét kapjuk $\pi/4 \approx 0.78539$ közelítéssel.

**b)** $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$, a gyökjel alatt teljes négyzet van, ezért $x^2 - 3 = |2x - 1|$. A két oldalt ábrázolva két metszéspontot látunk. A pontos értékeket számítással határozzuk meg:




$x \geq \frac{1}{2}$ esetén az egyenlet: $x^2 - 3 = 2x - 1$, ebből $x = 1 + \sqrt{3}$ a kikötésnek megfelelő gyök.

$x < \frac{1}{2}$ esetén az egyenlet: $x^2 - 3 = -2x + 1$, ebből $x = -1 - \sqrt{5}$ a kikötésnek megfelelő gyök.

**c)** $(\log_3 3x)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4$

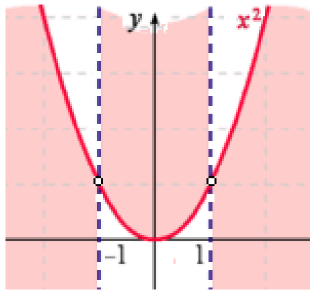
A logaritmus azonosságai alapján az egyenlet: $(\log_3 3 + \log_3 x)^2 = 3\log_3 x - \log_3 3 + 4$.

Új ismeretlent vezetünk be, legyen $\log_3 x = a$, $x > 0$, ezzel az egyenlet: $(1 + a)^2 = 3a + 3$, azaz $a^2 - a - 2 = 0$, amelynek gyökei $a_1 = 2$ és $a_2 = -1$. Ebből

$$x_1 = 9 \text{ és } x_2 = \frac{1}{3}, \text{ és ezek valóban gyökei az eredeti egyenletnek.}$$

**6.** *(11 pont)* Melyek azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik az $\frac{x^2 - y}{|x| - 1} \geq 0$ egyenlőtlenséget? Ábrázolja a megoldáshalmazt a koordináta-síkon!

***Megoldás***




A nevező zérushelyei $|x| = 1$, itt a kifejezés nem értelmezett, ezért az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesek nem tartoznak a megoldáshoz.

Három esetet különböztetünk meg:

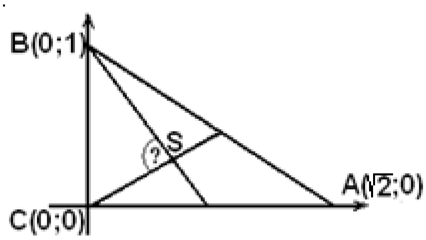
*Ha a számláló nulla*, akkor a nevező tetszőleges nemnulla értéke esetén teljesül az egyenlőtlenség, így az $y = x^2$ parabola pontjai $(-1;1)$ és $(1;1)$ kivételével a megoldáshalmaz elemei.

*Ha a számláló pozitív*, akkor a nevezőnek is pozitívnak kell lennie, $x^2 - y > 0$ és $|x| - 1 > 0$, tehát a parabola alatti pontok és az $x = 1$ egyenestől jobbra, illetve az $x = -1$ egyenestől balra eső félsíkok metszete tartozik a megoldáshalmazhoz.

*Ha a számláló negatív*, akkor a nevezőnek is negatívnak kell lennie, $x^2 - y < 0$ és $|x| - 1 < 0$, tehát a parabola fölötti pontok és az $x = 1$ és $x = -1$ egyenesek közti sáv metszete tartozik a megoldáshalmazhoz.

**7.** *(14 pont)* Igazoljuk, hogy a kocka egy éle, egy lapátlója és egy testátlója olyan háromszöget határoznak meg, melynek van két merőleges súlyvonala!

***1. Megoldás***




A kocka egy éle, lapátlója és testátlója olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, melyek oldalainak aránya $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Azt kell megmutatni, hogy az ilyen háromszögnek van két merőleges súlyvonala.

Ezt a háromszöget elhelyezzük egy olyan koordinátarendszerben, melynek befogói a tengelyekre illeszkednek. Ha méretarányos ábrát készítünk, akkor észrevehetjük, hogy (valószínűleg) az átfogóhoz és a $\sqrt{2}$ oldalhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. A háromszög S súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Felírjuk az $\overrightarrow{SB}$ és $\overrightarrow{SC}$ vektorokat és kiszámítjuk ezek skaláris szorzatát:

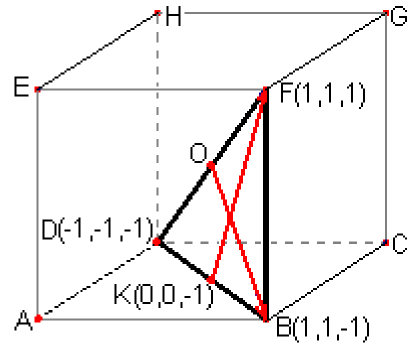
$$\overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{2}{3}\right), \qquad \overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right), \qquad \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC}=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0.$$

Tehát a két súlyvonal valóban merőleges egymásra.

***Megjegyzés:*** *Skaláris szorzat helyett a két szakasz egyeneseinek meredekségéből is megállapítható a merőlegesség, az SB egyenes meredeksége – √2, az SC egyenesé pedig 1/√2, a két meredekség szorzata pedig -1, azaz merőlegesek az egyenesek.*

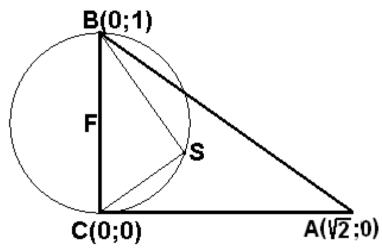
***2. Megoldás***

Egy 2 élhosszúságú *ABCDEFGH* kocka középpontja legyen az origó, és élei legyenek párhuzamosak a tengelyekkel. Ebben a kockában például az *F*(1,1,1), *B*(1,1,-1), *D*(-1,-1,-1) csúcsok egy él-lapátló-testátló háromszöget határoznak meg. A *DF* testátló felezőpontja az origó. Így az egyik súlyvonal az origóból a *B* csúcsba mutató **(1,1,-1)** vektor, a másik a *DB* lapátló *K* felezőpontjából az *F* csúcsba mutató **(1,1,2)** vektor. (A harmadik súlyvonal az (1,1,0) élfelezőpontból a *D* csúcsba mutató (2,2,0) vektor, ezt nem rajzoltuk be.) Az **(1,1,-1)** és **(1,1,2)** vektorok skaláris szorzata 1·1 + 1·1 +(-1)·2 = 0, tehát merőlegesek egymásra.



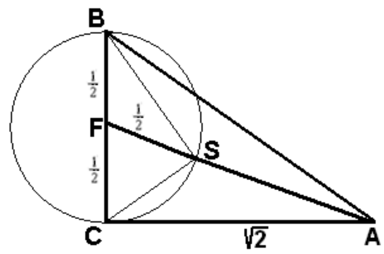

***3. Megoldás***

Megmutathatjuk például, hogy a *BC* szakasz az *S* pontból derékszög alatt látszik, azaz *S* rajta van a *BC* szakasz Thalész körén. A kör középpontja az $F\left(0;\frac{1}{2}\right)$ felezőpont, sugara $r=\frac{1}{2}$, egyenlete $x^2 + (y - ½)^2 = (½)^2$. Ezen rajta van az $S\left(\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ pont, hiszen 2/9 + 1/36 = 9/36 = 1/4.




***4. Megoldás***

*A feladat többféleképpen megoldható koordináta geometriai módszerek nélkül is.*




***4.a*** A *C*-hez tartozó súlyvonal hossza az átfogó fele, azaz √3/2, aminek *CS* a 2/3-a, tehát *CS* = 1/√3. A *B*-hez tartozó súlyvonal (pl. a Pitagorasz-tételből) √3/√2, aminek *BS* a 2/3-a, tehát *BS* = √2/√3. $BS^2 + CS^2$= 1/3 + 2/3 =1, tehát az *SBC* háromszögben *S*-nél derékszög van.

***4.b*** Berajzoljuk a harmadik súlyvonalat is, amely *BC*-t az *F* felezőpontjában metszi. Az *S* pont harmadolja ezt a súlyvonalat is.

Az *FCA* derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből $AF=\frac{3}{2}$, így a harmada $FS=\frac{1}{2}$, ami azt jelenti, hogy S rajta van az F körül írt ½ sugarú körön, a BC szakasz Thalész körén. Ebből az következik, hogy az *SBC* háromszögben *S*-nél derékszög van.

**8. a)** *(4 pont)* Egy szabályos háromszög mindegyik csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az éleket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén?

**b)** *(10 pont)* Egy tetraéder minden csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott élen, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az éleket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén?

***Megoldás***

**a)** Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a háromszög csúcsait *A, B, C.* Az *A* csúcsból induló hangya kétféle irányban mehet. Ha a *B* csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a *C* csúcsba mehet, és a harmadik hangya útiránya már egyértelmű. Tehát 2 lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással. Az összes útvonal-lehetőség $2^3 = 8$, így a keresett valószínűség $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

**b)** Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a tetraéder csúcsait *A, B, C* és *D.* Az *A* csúcsból induló hangya háromfelé mehet. Ha a *B* csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a *C* vagy a *D* csúcsba mehet, és a többi hangya útiránya már egyértelmű. Tehát $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással.

Az összes útvonal-lehetőség $3^4 = 81$, így a keresett valószínűség

$$1 - \frac{6}{81} = \frac{75}{81} \approx 0{,}9259.$$