Kvantummechanika II.

Hőmérsékleti sugárzás

1.) Bevezető: Minden test tetszőleges hőmérsékleten electromágneses sugárzást emittál a környezete felé. A sugárzás karakterisztikája a hőmérséklet és a felület függvénye.

→ Klasszikus nézet: a hőmérsékleti sugárzás gyorsuló töltött részecskéktől származik, a test felszínén. Az ilyen töltött részecskék antennaként bocsátanak ki sugárzást, energiaik elosztása felel a folytonos sugárzási spektrumért. A fő feladat (XIX. sz. vége) ennek a sugárzásnak a megértése volt.

Kirchoff: Hőmérsékleti egyensúlyban lévő test abszorpciós és emissziós együtthatóinak aránya a hőmérséklet és a frekvencia univerzális függvénye.

Abszolút fekete test: Minden ráeső sugárzást elnyel. (Az abszorpciós együttható értéke 1.)

Két jelentős kísérleti eredmény:

1.) Az emittált sugárzás össz teljesítménye a hőmérséklettel nő.

→ Stefan-Boltzmann törvény:

$$P = \sigma e A T^4 \qquad \left(\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \, W/m^2 K^{-4}\right.$$

(fekete test sugárzás esetén $e = 1$)

2.) A hullámhosszak eloszlásának csúcsa a hőmérséklet emelkedésével az alacsonyabb hullámhosszak irányába tolódik el.

→ Wien-féle eltolódási törvény:

$$\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \, mK$$

A fekete test-sugárzás elméleti tárgyalása:

→ Emlékeztető: Maxwell-egyenletek

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \int \rho \, dV \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad c^2 \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\epsilon} \int \vec{j} \, d\vec{A} + \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

→ Az üreg belsejében $\rho = 0$ és $\vec{j} = \vec{0}$, így:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \;;\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}B = 0 \;;\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

→ Képezzük $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}$ és $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}$ szorzatokat, ebből: $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E})$:

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{E}}_{0}) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{és} \quad \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

→ A határfeltételek: az elektromos tér tangenciális komponense és a mágneses indukció normális komponense eltűnik a falakon.

→ A megoldás: transzverzális hullámok, módusonként két független amplitúdó:

$$\vec{q}_n(t) = q_n^{(1)}(t)\,\hat{e}_n^{(1)} + q_n^{(2)}(t)\,\hat{e}_n^{(2)}, \quad \text{ahol}$$

$e_n^{(r)}$-ek $(r=1,2)$ a polarizációs egységvektorok $e_n^{(r)}e_n^{(s)} = \delta_{rs}$

→ A $q_n^{(r)}(t)$ amplitúdók a harmonikus oszcillátor mozgásegyenletét elégítik ki:

$$\ddot{q}_n^{(r)}(t) + \omega_n^2 q_n^{(r)}(t) = 0, \quad \text{ahol} \quad \omega_n = \frac{\pi c}{l}\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$$

→ A sugárzás teljes energiája:

$$U = \int dV\left(\frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\vec{B}^2\right) = \sum_n\sum_{r=1}^{2}\frac{l^3\epsilon_0}{16\omega_n^2}\left(\dot{q}_n^{(r)2}(t) + \omega_n^2 q_n^{(r)2}(t)\right)$$

⇒ A klasszikus mechanika szerint egy ilyen rendszerre alkalmazható lenne az ekvipartíció tétele: minden négyzetes taghoz (szabadsági fok) $\frac{k_B T}{2}$ energia tartozna. A végtelen számú módusra összegezve így azonban végtelent kapnánk az energiára: ez az ún. „ultraibolya katastrófa"

↳

adott frekvenciájú módusok száma:
(minden frekvenciához két módus tartozik, amelyek egymásra merőleges polarizációjúak.):

$$2d^3\vec{n} \longrightarrow 2\frac{1}{8}4\pi n^2 dn = \frac{\ell^3}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega = \frac{8\pi\ell^3}{c^3}\nu^2 d\nu$$

(számítás: $d^3\vec{n} = 4\pi n^2 dn$, $+_+^+$ gömnegyed miatt $\frac{1}{8}$-naró, $\omega = \frac{\pi c n}{\ell}$, $\frac{d\omega\ell}{\pi c} = dn$, $\omega = 2\pi\nu$ átalakításokkal)

→ Ha az ekvipartíció tétele érvényes volna, akkor a spektrális energiasűrűség:

$$u(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}k_B T \nu^2 \qquad \text{(Rayleigh-Jeans törvény)}$$

↳ nagy frekvenciákon felrobban.

<u>Kvantumhipotézis (Planck - 1900)</u>

→ Az oszcillátorok energiája nem folytonosan változik, hanem mindig egy diszkrét érték egész számú többszöröse, amely pedig arányos a frekvenciával:

$$U_j(\nu) = jh\nu \qquad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

→ A $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J·s új természeti állandó.

→ Adott frekvenciájú oszcillátor energiájának várható értéke (átlaga)

$$\bar{U}(\nu) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} jh\nu e^{-\frac{jh\nu}{k_B T}}}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{jh\nu}{k_B T}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

→ Kis frekvenciákra ez $k_B T$-hez (ekvipartíció), nagy frekvenciákon pedig exponenciálisan nullához tart.

→ A spektrálsűrűség: $$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

→ A teljes energiasűrűség: $$u = \int_0^\infty u(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} T^4$$

→ Egyezik a Stefan-Boltzmann törvénnyel!

A spektrum maximuma:

$$\frac{du(\nu)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}\right) = 0 \quad , \text{ amiből:}$$

$$3\left(e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1\right) - \frac{h\nu}{k_B T}e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 0$$

Az egyenlet gyöke

$$\frac{h\nu_m}{k_B T} = 2.82\ldots \quad \rightarrow \text{ Wien-eltolódási törvénye!}$$