Kvantummechanika B – ZH2 – Csütörtöki csoport

1. Számold ki harmonikus oszcillátornál $\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_3$-et!

$\hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} i\left(\hat{a} - \hat{a}^+\right)$, ebből $\hat{p}^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right)\left(\hat{a} - \hat{a}^+\right)$.

$$\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle_3 = \frac{\hbar m\omega}{2}\left\langle 3\middle| \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ \middle|3\right\rangle = \frac{7\hbar m\omega}{2}$$

2. Egy m tömegű részecske mozogjon $V(x) = \begin{cases} x < 0 : \infty \\ x \geq 0 : cx \end{cases}$ potenciálvölgyben. Határozd meg az alapállapoti energiát variációs módszerrel, ahol a próbafüggvény $\psi_a = iaxe^{-ax}$!

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_{\psi_a} = a^2 \int_0^\infty xe^{-ax}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + cx\right) xe^{-ax} dx = \frac{3c}{2a} + \frac{\hbar^2 a^2}{2m}$$

$0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial a}\left\langle \hat{H} \right\rangle_{\psi_a} = \frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{3c}{2a^2}$, ebből $a = \sqrt[3]{\frac{3cm}{2\hbar^2}}$, vagyis $\left\langle E \right\rangle = \frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{2\hbar^2 c^2}{3m}}$ és $\psi = \sqrt[3]{\frac{3cm}{2\hbar^2}} xe^{-\sqrt[3]{\frac{3cm}{2\hbar^2}}x}$

3. Számold ki a hidrogénatom ψ_{210}-s hullámfüggvényét!

$\psi_{210} = N_{21} Y_1^0 R_{12} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_B^{\frac{5}{2}}} re^{-\frac{r}{2a_B}} \cos\vartheta$

4. A hidrogénatomot perturbáljuk meg $\lambda\delta\left(\underline{\hat{r}}\right)$-s perturbációval, mennyi lesz $E_{210}^{(1)}$?

$$E_{nlm}^{(1)} = \left\langle n,l,m\middle|\delta\left(\underline{\hat{r}}\right)\middle|n,l,m\right\rangle = \int \psi_{nlm}^* \delta\left(\underline{r}\right)\psi_{nlm} = \left|\psi_{nlm}(0)\right|^2$$

Ha n nem 1, akkor ez 0. Ebből következik, hogy az impulzusmomentum-sajátértékek által meghatározott bázis megfelelő a perturbációszámítás elvégzéséhez.

$E_{210}^{(1)} = 0$