Kvantummechanika B – ZH2 – Hétfői csoport

1. Hidrogénatomban hány különböző állapotban mérhetünk az elektron impulzusmomentumának hosszára $2\sqrt{3}\hbar$ -t?

Ebből $l\left(l+1\right)=12$, vagyis l=3. Tehát m értéke -3, -2, -1, 0, 1, 2 vagy 3 lehet és $n \geq 4$.

2. Egy m tömegű részecske mozogjon $V_0 e^{-\frac{r}{a}}$ potenciálvölgyben. Határozd meg az alapállapoti energiát variációs módszerrel, ahol a próbafüggvény $\psi_\lambda = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}} e^{-\lambda r}$!

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_{\psi_\lambda} = -\frac{\lambda^3}{\pi} \int e^{-\lambda r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0 e^{-\frac{r}{a}} \right) e^{-\lambda r} d^3 r =$$

$$= -4\lambda^3 \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\lambda r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) e^{-\lambda r} + V_0 e^{-r\left(\frac{1}{a}+2\lambda\right)} \right) dr = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m} - V_0 \left(\frac{2\lambda a}{2\lambda a + 1} \right)^3$$

Ebből a $\frac{\left(2\lambda a+1\right)^4}{2\lambda a} = \frac{12 m a^2 V_0}{\hbar^2}$ feltételt kapjuk λ-ra.

3. Vegyünk egy harmonikus oszcillátort λx^4 perturbációval, mennyi $c_2^{(0,1)}$?

$$c_2^{(0,1)} = \frac{V_{20}}{E_0^{(0)} - E_2^{(0)}} = -\frac{\left\langle 2 \middle| \hat{x}^4 \middle| 0 \right\rangle}{2\hbar\omega}$$

$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^+ \right)$, tehát:

$$\left\langle 2 \middle| \hat{x}^4 \middle| 0 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \left\langle 2 \middle| \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}^+ + \hat{a}\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}^+ \middle| 0 \right\rangle = \frac{3\sqrt{2}\hbar^2}{2m^2\omega^2}$$

Ebből: $c_2^{(0,1)} = -\frac{3\sqrt{2}\hbar}{4m^2\omega^3}$.

4. Bizonyítsd be, hogy a harmonikus oszcillátorra $\left[\hat{H}, \hat{a}\right] = -\hbar\omega\hat{a}$

$$\left[\hat{H}, \hat{a}\right] = \hbar\omega\left[\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}\right] = \hbar\omega\left[\hat{a}^+, \hat{a}\right]\hat{a} = -\hbar\omega\hat{a}$$