Kvantummechanika 1. ZH megoldások **(2009/10 tavaszi félév)**

1. feladat: Az eltolás operátorának megtalálásával teljesen analóg módon fejtsük Taylor-sorba a hullámfüggvényt a 3. változójában:

$$\psi(r,\theta,\varphi+\varphi_0) = \psi(r,\theta,\varphi) + \frac{\partial\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\varphi_0 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\varphi_0^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^3}\varphi_0^3 + ...$$

Tudjuk, hogy az impulzusmomentum z komponensének operátora

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

így

$$\psi(r,\theta,\varphi+\varphi_0) = \psi(r,\theta,\varphi) + \frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\psi(r,\theta,\varphi)\cdot\varphi_0 + \frac{1}{2!}\Big(\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\Big)^2\psi(r,\theta,\varphi)\cdot\varphi_0^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\Big)^3\psi(r,\theta,\varphi)\cdot\varphi_0^3 + ...$$

Kiemeljük jobb oldalon a $\psi(r,\theta,\varphi)$ függvényt:

$$\psi(r,\theta,\varphi+\varphi_0) = \Big(1 + \frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\cdot\varphi_0 + \frac{1}{2!}\Big(\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\Big)^2\cdot\varphi_0^2 + \frac{1}{3!}\Big(\frac{i}{\hbar}\hat{L}_z\Big)^3\cdot\varphi_0^3 + ...\Big)\psi(r,\theta,\varphi).$$

Felismerhetjük az exponenciális függvény definícióját:

$$\psi(r,\theta,\varphi+\varphi_0) = e^{i\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\varphi_0}\psi(r,\theta,\varphi),$$

vagyis

$$\hat{U}_{\varphi_0} = e^{i\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\varphi_0}.$$

2. feladat: Ki kell számolni az impulzus sajátfüggvények szerinti kifejtési együttható-függvényt (a hullámfüggvény Fourier transzformáltját), ennek abszolútérték-négyzete adja az impulzus valószínűségsűrűségét.

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_{-1}^{0}(-x)e^{-ikx}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1 xe^{-ikx}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1 xe^{ikx}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1 xe^{-ikx}dx = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1 x\cos(kx)dx.$$

Parciális integrálást alkalmazva:

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1 x\frac{1}{k}\frac{d}{dx}\sin(kx)dx = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sin k}{k} - \sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_0^1\sin(kx)dx = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\sin k}{k} + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{\cos k - 1}{k^2}.$$

Összevonás után:

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{k \sin k + \cos k - 1}{k^2}.$$

A keresett valószínűség (a valószínűségsűrűség definíciója szerint):

$$P_{[0,\Delta k]} = |\tilde{\psi}(0)|^2 \Delta k,$$

vagyis szükség van a $\tilde{\psi}(k)$ függvény $k = 0$ helyen felvett értékére. Ezen a helyen a kifejezés számlálója és nevezője is nulla, ezért határértéket kell venni. Alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{k\to 0} \tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{(k \sin k + \cos k - 1)'}{(k^2)'}\Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin k + k \cos k - \sin k}{2k}\Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\cos k}{2}\Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Vagyis a keresett valószínűség:

$$P_{[0,\Delta k]} = \frac{3}{4\pi} \Delta k.$$

3. feladat: A z paraméterrel jellemzett koherens állapot

$$\varphi_z(x) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^* \hat{a}} \Psi_0(x).$$

Ha z valós, akkor $z = z^*$, így

$$\varphi_z(x) = e^{z(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} \Psi_0(x).$$

Tudjuk, hogy az impulzus operátor a következőképpen fejezhető ki a léptetőoperátorokkal:

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

vagyis a koherens állapot kifejezésében szereplő exponenciális függvény argumentumában megjelenik az impulzus operátor:

$$\varphi_z(x) = e^{-i\hat{p}z\sqrt{2/\hbar m \omega}} \Psi_0(x).$$

Kicsit átalakítva:

$$\varphi_z(x) = e^{-i\frac{\hat{p}}{\hbar} z \sqrt{2\hbar/m\omega}} \Psi_0(x),$$

ami

$$\varphi_z(x) = e^{i\frac{\hat{p}}{\hbar} x_0} \Psi_0(x) = \Psi_0(x + x_0)$$

alakú, vagyis egy valós paraméterrel jellemzett koherens állapot valóban a harmonikus oszcillátor alapállapoti hullámfüggvényének eltoltja. Az eltolás x_0 paraméteréről leolvasható, hogy értéke

$$x_0 = -z\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}.$$