Kvantummechanika B – ZH1 – Hétfői csoport - megoldás

1. Legyen $\left|\psi_1\right\rangle$ és $\left|\psi_2\right\rangle$ egy $\hat{A}$ fizikai mennyiség adott sajátértékéhez tartozó két lineárisan független normált sajátállapot, melyekre $\left\langle\psi_1\middle|\psi_2\right\rangle = \frac{1}{2}$. Adj meg két olyan sajátállapotot ezen degenerált sajátaltérben, amelyek már részét képezhetik egy ortonormált bázisnak!

Legyen $\left|\varphi\right\rangle = c\left(\left|\psi_1\right\rangle + d\left|\psi_2\right\rangle\right)$, ekkor $\left\langle\psi_1\middle|\varphi\right\rangle = c\left(1+\frac{d}{2}\right)$, tehát $d=-2$. A normálási feltételből $\left\langle\varphi\middle|\varphi\right\rangle = 3c^2$, ebből $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ekkor $\left|\varphi\right\rangle$-vel kell helyettesítenünk $\left|\psi_2\right\rangle$-t.

2. Határozd meg $\psi(x) = \begin{cases} -1 < x < 1: \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-|x|\right) \\ |x| \geq 1: 0 \end{cases}$ impulzusreprezentációbeli alakját!

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-1}^{1}\psi(x)e^{-i\frac{px}{\hbar}}dx = \sqrt{\frac{3}{\pi\hbar}}\int_{0}^{1}(1-x)\cos\frac{px}{\hbar}dx = \sqrt{\frac{3\hbar}{\pi}}\frac{\hbar}{p^2}\left(1-\cos\frac{p}{\hbar}\right)$$

3. Legyen $\left|\psi\right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{3}\left|1,m\right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\left|5,m\right\rangle - \frac{2}{3}\left|3,m\right\rangle$, ekkor mennyi $\left\langle\hat{L}^2\right\rangle_\psi$ értéke?

$$\left\langle\hat{L}^2\right\rangle_\psi = \hbar^2\sum_l c_l^2 l(l+1) = \frac{38}{3}\hbar^2$$

4. Mennyi $\left\langle\hat{L}_x^2\right\rangle_{l,m}$?

$$\left\langle\hat{L}_x^2\right\rangle_{l,m} = \frac{1}{4}\left\langle l,m\middle|\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)^2\middle|l,m\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle l,m\middle|\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+\middle|l,m\right\rangle = \left\langle l,m\middle|\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z\middle|l,m\right\rangle =$$

$$= \left|\alpha_{lm}\right|^2 - m = l(l+1) - m^2$$