Kvantummechanika B – ZH1 – Csütörtök - megoldás

1. Vegyünk egy háromállapotú rendszert (ez azt jelenti, hogy a Hilbert-tér 3 dimenziós). Legyenek $\hat{A}$ fizikai mennyiség sajátállapotai $|1\rangle, |2\rangle$ és $|3\rangle$, sajátértékei a_1, a_2 és a_3. Legyen továbbá $|\psi\rangle = \frac{3}{4}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|2\rangle - \frac{1}{2}|3\rangle$. Mennyi $\langle \hat{A} \rangle_\psi$ értéke?

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_i |c_i|^2 a_i = \tfrac{9}{16} a_1 + \tfrac{3}{16} a_2 + \tfrac{1}{4} a_3$$

2. Vegyünk egy dimenziós dobozba zárt részecskét (a doboz szélessége $2a$ és közepe az origó), aminek hullámfüggvénye $\psi(x) = \sqrt{\frac{3}{2a^3}}\left(a - |x|\right)$. Mennyi az energiasajátállapotok szerinti kifejtés első két együtthatója?

Az energia-sajátfüggvények: $\psi_n = \begin{cases} n = 2k: \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos \dfrac{n\pi x}{2a} \\ n = 2k+1: \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin \dfrac{n\pi x}{2a} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^+$

Sajnos a feladat szövegezésébe kisebb hiba csúszott, n=0-hoz nem tartozik sajátfüggvény, mivel ahatárfeltételeket nem elégíti ki. Tehát aki ennek kiszámításában vétett hibát, vagy nem számolta ki, azt nem vettem hibának.

$$c_1 = \int_{-a}^{a} \psi_1^*(x) \psi(x)\, dx = 0$$

$$c_2 = \int_{-a}^{a} \psi_2^*(x) \psi(x)\, dx = \frac{\sqrt{6}}{a} \int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} dx - \frac{\sqrt{6}}{a^2} \int_0^a x \cos \frac{\pi x}{a} dx = \frac{\sqrt{6}}{a\pi} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^2}$$

3. Bizonyítsd be, hogy $\left[\hat{L}_z, \hat{p}^2\right] = 0$!

$$\left[\hat{L}_z, \hat{p}^2\right] = \left[r_x p_y - r_y p_x, p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] = \left[r_x, p_x^2\right] p_y - \left[r_y, p_y^2\right] p_x = \left(2i\hbar - 2i\hbar\right) p_x p_y = 0$$

4. Igazold, hogy megfelelő fázisválasztással $\alpha_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}$

$$l(l+1) = \langle l,m | \hat{L}^2 | l,m \rangle = \langle l,m | \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z + L_z^2 | l,m \rangle = |\alpha_{lm}|^2 + m(m+1)$$