Kvantummechanika II. zárthelyi
(2008. december 8.)

1. A kvantummechanikában egy pontszerű részecske impulzusmomentum operátorát az

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{bmatrix},$$

formula definiálja, ahol $\hat{\mathbf{r}} = [\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$ a részecske hely operátora, $\hat{\mathbf{p}} = [\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z]$ pedig a részecske impulzus operátora. A Heisenberg-féle felcserélési relációk segítségével határozzuk meg az $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ kommutátort! (6 pont)

2. (a) Írjuk föl az m tömegű, ω körfrekvenciájú egydimenziós harmonikus oszcillátor időtől független Schrödinger-egyenletét! (2 pont)

   (b) Tudjuk, hogy az első gerjesztett állapot hullámfüggvénye a

$$\Psi_1(x) = Axe^{-\alpha x^2}$$

   alakban írható. Határozzuk meg α értékét, valamint az első gerjesztett állapot E_1 energiáját! (10 pont)

3. Tekintsük a

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{ha } |x| \geq a \\ 0, & \text{ha } |x| < a \end{cases}$$

egydimenziós potenciálban mozgó m tömegő részecskét, ahol $V_0 > 0$, $a > 0$.

   (a) Írjuk föl a különböző tartományokban az időtől független Schrödinger-egyenletet, és $0 < E < V_0$ esetén adjuk meg az általános megoldásukat! (8 pont)

   (b) Vázoljuk (rajzban) a legalacsonyabb E_0 energia-sajátértékhez tartozó $\Psi_0(x)$ hullámfüggvény alakját! Milyen szimmetriákkal rendelkezik a függvény? (5 pont)

   (c) Írjuk fel $\Psi_0(x)$-ra az illesztési feltételeket, és vezessünk le egy egyenletet E_0-rat! (Az egyenletet nem kell megoldani.) (5 pont)

Összesen: 36 pont.