

# Kvantummechanika B, Gyakorló feladatsor 2zh-ra

December 7, 2015

- Hidrogén atom

1. Az alapállapotú hullámfüggvény csak az origótól mért távolságtól függ:

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$

ahol  $a$  a Bohr-sugár.

2. Határozzuk meg  $\langle r \rangle$ , és  $\langle r^2 \rangle$  várható értékeket!
3. Határozzuk meg  $\langle x \rangle$ , és  $\langle x^2 \rangle$ ! (Ne végezzünk el új integrálokat, használjuk fel az alapállapot szimmetriáját!)
4. Határozzuk meg  $\langle x^2 \rangle$  várható értékét a hidrogén atom  $n = 2, l = 1, m = 1$  állapotában! (Ez az állapot már nem szimmetrikus!)

$$\psi_{211}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{8a^2} r \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \sin(\theta) \exp(i\phi)$$

- Hidrogén atom 2

1. Tekintsünk egy hidrogénatomot, amely  $t = 0$ -ban a következő állapotban van:

$$\psi(r, \theta, \phi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{211} + \psi_{21-1})$$

2. Határozzuk meg a hidrogénatom állapotát  $t$  időpillanatban!
3. Határozzuk meg a potenciális energia várható értékét!

- Spin  $\frac{1}{2}$

1. A spinünk a következő állapotban van (ebben a bázisban  $S_z$  diagonális)  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3i \end{pmatrix}$
2. Határozzuk meg  $A$ -t a normálási feltételből!
3. Határozzuk meg  $S_x, S_y, S_z$  operátorok várható értékét a fenti állapotban!
4. Határozzuk meg  $\sigma_{S_x}, \sigma_{S_y}, \sigma_{S_z}$  szórásokat!
5. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma_{S_x} \sigma_{S_y} \geq \left| \frac{\hbar}{4\pi} \langle S_z \rangle \right|.$$

- Spin 1

1. Tudjuk, hogy 1-es spinű részecskénél a spin  $z$  irányú vetülete 3 féle értéket vehet fel:

$$-\frac{\hbar}{4\pi}, 0, \frac{\hbar}{4\pi}$$

2. Írjuk fel,  $S_z$ -nek megfelelő mátrixot!

3. Felhasználva, hogy

$$S_{+-}|s, m\rangle = \frac{\hbar}{4\pi} \sqrt{s(s+1) - m(m+1)} |s(m+1)\rangle$$

írjuk fel,  $S_+$  illetve  $S_-$  -nak megfelelő mátrixot!

4. Felhasználva, hogy

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-), S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

írjuk fel  $S_x$ -nek illetve  $S_y$ -nek megfelelő mátrixot!

- Larmor precesszió

1. Spin  $\frac{1}{2}$  részecskét konstans  $z$  irányú mágneses térbe helyezünk.

$$H = -\gamma B_0 S_z,$$

ahol  $B_0$  a mágneses tér nagysága és  $\gamma$  a giromágneses faktor. Tegyük fel, hogy a rendszer kezdőállapota:

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a rendszer állapotát  $t$  időpillanatban!

3. Mekkora valószínűséggel mérünk  $\frac{\hbar}{4\pi}$ -t a spinvetületre  $x, y$  illetve  $z$  irányban?