

# 2015/16/1 Kvantummechanika B 1.ZH gyakorló feladatsor

2015. október 20.

## 1. Matematikai alapok

a. Bizonyítsuk be, hogy ha  $[A,B]$  felcserélhető A-val és B-vel, akkor igaz, hogy

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$$

b. Mivel egyenlő az alábbi operátor (p és x rendre az impulzus és hely operátora)

$$[p^2, x]$$

c. Mutassuk meg, hogy egy potenciálban mozgó részecske Hamilton operátora önadjungált!

## 2. Kifejtés bázison

Fejtsük ki az egydimenziós téren ható impulzusoperátor sajátfüggvényeinek bázisán az alábbi hullámfüggvényeket! A hullámfüggvény a szokásos módon  $d$  eltolás invariáns legyen! Tehát, milyen impulzus sajátértékek jelenhetnek meg?

a.  $\Psi_a(x) = A \cos^3\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$

b.  $\Psi_b(x) = B \cos^n\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$

Most tekintsünk ugyan ilyen rendszer, csak kettő dimenzióban. Keressük meg a sajátfüggvényeit az impulzus operátornak és fejtsük ki rajta az alábbi hullámfüggvényeket:

c.  $\Psi_c(x) = C \sin\left(\frac{2\pi}{d}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{d}y\right)$

d.  $\Psi_d(x) = D \sin^n\left(\frac{2\pi}{d}x\right) \cos^m\left(\frac{2\pi}{d}y\right)$

## 3. Kötött állapotok

Legyen a rendszerünk egy 3 dimenziós izotróp oszcillátor, ami alábbi Hamilton operátorral:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2$$

a. Határozzuk meg a kötött állapotok energiáját!

b. Mik a sajátfüggvények?

c. Hogy fog az alapállapot időben fejlődni?

d. Hogy néz ki a probléma  $n$  dimenzióban?

## 4. Szórási állapotok

Legyen egy véges ugrásó potenciál, tehát  $x < 0$ -ra 0,  $x > 0$ -ra  $V_0$ . Jöjjön  $x = \infty$ -ből egy  $A$  amplitúdójú síkhullám.

- Mekkora a visszaverődési együttható?
- Hogy függ ez  $V_0$ -tól? Mi van, ha csökkentem  $V_0$ -t, és átmegy negatívba?

## 5. Kétállapotú rendszerek

Legyen egy két állapotú rendszerünk  $|1\rangle$  és  $|2\rangle$  állapotokkal. A rendszer leíró Hamilton operátor, és a kezdőállapot a következők:

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0 (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - i \cdot w (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$$

- Hermitikus-e a Hamilton operátor? (0 p)
- Hogy néz ki  $|\Psi(t)\rangle$ , ha a kezdőállapot  $|1\rangle$ ? (25 p)
- Van-e olyan, hogy visszaér a kezdőállapotba? (5 p)

## 6. Impulzus momentum

Szeretnék egy olyan hullámfüggvényt, ami olyan rendszert ír le, hogy azonos valószínűséggel mérek impulzusmomentum  $z$  komponensére  $\hbar, 2\hbar, 3\hbar, 4\hbar, 5\hbar$  és  $6\hbar$  értékeket. Hogy néz egy ilyen ki általánosan?

## 7. Perturbáció számítás

Mozogjon egy részecske az alábbi potenciálban:

$$V(x) = V_0 \sin^2(ax)$$

- Mekkorák a kötött állapotok sajátenergiái nagyon kis kitérésekre? (első  $x$  függő tagig vegyük figyelembe)
- Mennyivel módosulnak ezek az energiák kicsivel nagyobb kitérésekre? (menjünk eggyel tovább a sorfejtésben)

Legyen egy a harmonikus oszcillátort perturbáló Hamilton operátor  $\lambda x^8$  alakú.

- Mik az alapállapot energiakorrekció első rendben?