

Kvantummechanika gyakorló feladatok 1

1. Keressük meg azt az \hat{U}_{φ_0} operátort, mely a φ gömbi polárszöget egy φ_0 konstans szöggel elforgatja, vagyis melyre $\hat{U}_{\varphi_0}\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi + \varphi_0)$!

2. Számítsuk ki a

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}}|x|, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq 1 \end{cases}$$

hullámfüggvénnyel jellemzett kvantumállapotban annak a valószínűségét, hogy az impulzus a $[0, \Delta k]$ kicsiny intervallumba esik!

3. Adjunk meg egy olyan fizikai állapotot, melyben a részecske impulzus-momentumának z -komponensére egyforma valószínűséggel \hbar , $4\hbar$ és $7\hbar$ mérhető!

4. Írjuk fel a

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{4\pi}{d}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)$$

állapotot periódikus határfeltétel mellett impulzus sajátállapotok lineáris kombinációjaként! Mekkora A értéke, ha fizikai állapotról van szó?

5. Mutassuk meg, hogy egy koherens állapot az idő előrehaladtával is koherens állapot marad! Az ehhez tartozó részfeladatok a következők:

a., Számítsuk ki az $[\hat{a}, \hat{H}]$ kommutátort, ahol $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ a harmonikus oszcillátor Hamilton operátora!

b., Lássuk be a $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{a}e^{-i\omega t}$ operátor egyenlőséget!

c., Bizonyítsuk, hogy ha $\Psi(0, x)$ koherens állapot, akkor $\Psi(t, x) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\Psi(0, x)$ is az!

6. Egy részecske kvantumállapotának síkhullámok szerinti kifejtési-együttható függvénye a következő:

$$\tilde{\psi}(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |k| > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{ha } |k| \leq 1. \end{cases}$$

Adjuk meg a részecske hullámfüggvényét!