

# 2015/16/1 Kvantummechanika B 1.ZH

2015. október 20.

## Információk

0. A ZH ideje minimum 90 perc, maximum 120 perc.
1. Az összesen elérhető pontszám 250 pont.
2. A jeles érdemjegy eléréséhez nem szükséges az összes feladat hibátlan megoldása
3. Az elégséges jegy megszerzéséhez mindenképpen oldjatok meg mindegyik példából egy alrészét, a hetedik feladatból pedig a második részt. Ha ezek mind jók, akkor természetesen az már bőven jobb, mint elégséges!
4. Többet ésszel, mint erővel feladatok: 3-as és 7-es második része (főleg a lineáris tagos, azt próbáljátok meg!)
5. Nem véletlenül lehet füzetet használni! Már levezetett energiák, sajátfüggvények és egyebek felhasználhatóak, és írjátok oda, hogy órán vettük vagy ilyesmi.
6. Hatos példára a válaszom: igen
7. A bónusz feladatokért plusz pont járhat!
8. Egyéb kérdéssel forduljatok bizalommal a gyakorlatvezetőkhöz!

## 1. feladat (kommutátorok) 40 p

- a. Fejezzük ki  $[A, BC]$  kommutátort  $[A, B]$  és  $[A, C]$  kommutátorokkal! (5 p)

*Az alábbiakban az impulzus és hely operátorral kapcsolatosak feladatok:*

- b. Hogy néz ki a  $[p, x^2]$  kommutátor? (10 p)  
c. Előző példán felbuzdulva mennyi lesz  $[p, f(x)]$  kommutátor? (10 p)  
d. Bátrabbaknak:  $[f(p), g(x)] = ?$  (15 p)

## 2. feladat (kifejtések) 50 p

Ismerjük az egydimenziós téren ható impulzusoperátor sajátértékeit és saját-függvényeit periodikus határfeltétel mellett (hullámfüggvény  $d$  eltolásra invariáns). Fejtsük ezen saját-függvények bázisán az alábbi hullámfüggvényeket:

- a.  $\Psi_a(x) = A \cos^2\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$  (20 p)  
b.  $\Psi_b(x) = B \sin^n\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$  (csak ha marad sok időd, 30 p)

## 3. feladat (kötött állapotok) 40 p

Adott egy potenciál csövkünk, melynek keresztmetszete négyzet alakú  $a, b$  oldalhosszakkal. Ezen kívül a potenciál végtelen. Azonban a cső hosszanti irányában harmonikus potenciál van. Tehát

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$$

ha  $0 < x < a$ , illetve  $0 < y < b$ , mindenhol másutt végtelen.

- a. Adjuk meg a kötött állapotok energiáját, és az energia saját-függvényeket! (20 p)  
b. Hogy kéne kiszámolni a hely és impulzus szórását? Csak jelöljük ki az egyenleteket (10 p)  
c. Hogyan fog fejlődni az alapállapot időben? (10 p)

## 4. feladat (szórási állapotok) 25 p

Klasszikus mechanikához szokva meglepő tény, hogy ha a potenciál lefele ugrik, akkor is van visszaverődő megoldás. Legyen adott tehát egy olyan potenciál mely  $x < 0$ -ra  $V_0$ ,  $x > 0$ -ra 0.

- a. Mekkora a visszaverődési együttható, ha  $x = -\infty$ -ből küldünk be egy  $A$  amplitúdójú síkhullámot? Mekkora az transzmissziós együttható? (10 p)  
b. Milyen kapcsolatban van ez az órán vett esettel, ahol pozitív  $x$ -ekre volt véges a potenciál, és 0 alatt 0? (5 p)  
c. Mi jön ki, ha  $x = \infty$ -ből küldjük a hullámot kisebb energiával, mint  $V_0$ ? Mik a  $T, R$  együtthatók? Mi van, ha nem mondjuk meg a bejövő energia nagyságát, hogy számolnánk? (10 p)

## 5. feladat (kétállapotú rendszerek) 30 p

Legyen egy két állapotú rendszerünk  $|\text{élő macska}\rangle$  és  $|\text{halott macska}\rangle$  állapotokkal. A rendszer leíró Hamilton operátor, és a kezdőállapot a következők:

$$\mathbf{H} = \varepsilon_0(|\text{élő macska}\rangle\langle\text{élő macska}| + |\text{halott macska}\rangle\langle\text{halott macska}|) - i \cdot w(|\text{élő macska}\rangle\langle\text{halott macska}| - |\text{halott macska}\rangle\langle\text{élő macska}|)$$

- Hermitikus-e a Hamilton operátor? (0 p)
- Hogy néz ki  $|\Psi(t)\rangle$ , ha a kezdőállapot  $|\text{élő macska}\rangle$ ? (25 p)
- Van-e olyan, hogy visszaér a kezdőállapotba? (5 p)

## 6. feladat (impulzusmomentum) 10 p

Adjuk meg egy olyan állapotot leíró hullámfüggvény, amelyen impulzus momentum  $z$  komponensét mérve  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel mérünk  $\hbar$ -t,  $\frac{1}{4}$ -el  $2\hbar$ -t,  $\frac{1}{6}$ -el,  $3\hbar$ -t.

## 7. feladat (perturbációszámítás) 55 p

### ch(x) potenciál

Mozogjon egy részecske az alábbi potenciálban:

$$V(x) = V_0 \operatorname{ch}(ax)$$

- Mekkorák a kötött állapotok sajátenergiái nagyon kis kitérésekre? (10 p)
- Mennyivel módosulnak ezek az energiák kicsivel nagyobb kitérésekre? (25 p)

### hatványpotenciál

- Legyen most egy harmonikus oszcillátort perturbáló potenciál  $H' = \lambda x^{10}$  alakú. Mekkora az *alapállapot* energiájának módosulása első rendben? (10 p)
- Hogy módosulnak az energiaszintek, ha a perturbáló Hamiltoni  $H' = \lambda x$  alakú, tetszőleges állapotokra? (10 p)

## 8. feladat (bónusz)

- Vajon mi az oka, hogy szinte a harmonikus oszcillátor az egyetlen nem triviális rendszer (vagy vissza lehet rá vezetni), ami egzaktul megoldható?
- Ha a hullámfüggvény adnám meg, és a potenciált keresném hogy állnál neki?
- Alagút effektus esetén a potenciál ugrás mind a két oldalán van síkhullám megoldás, csak más amplitúdóval. Mekkora a potenciál gátban az áramsűrűség?