Kvantummechanika ZH 1 A (2012.11.05.)

1. Két részecske (a és b) fizikai állapotait a következő hullámfüggvények írják le:

$$\Psi_a(r,\theta,\phi) = \left[\frac{1}{2}e^{i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{4i\phi} + \frac{1}{\sqrt{5}}e^{3i\phi} + e^{\frac{1}{2}i\phi}\right].$$

$$\Psi_b(r,\theta,\phi) = \left[\frac{1}{3}e^{2i\phi} + \frac{2}{3}e^{3i\phi} + \frac{1}{2}e^{5i\phi} + \frac{\sqrt{7}}{6}e^{7i\phi}\right].$$

Milyen lehetséges értékeket mérhetünk a kísérletek során az egyes részecskék impulzus-momentumának z-komponensére? Mik a mérésekhez tartozó valószínűségek? (Individuális méréseket végzünk a és b részecskékre.) *[4 pont]*

Megoldás:
Az a részecskét leíró hullámfüggvény nem fizikai állapotot ír le - nem lehet megoldani, mivel az együtthatók négyzetösszege nagyobb, mint 1. Továbbá nem lehet $\frac{1}{2}\hbar$-t mérni, mert nem egész.
A b részecskénél felhasználva, hogy $\Psi(r,\theta,\phi) = f(r,\theta)e^{\frac{i}{\hbar}K\phi}$, a mérhető értékek rendre $2\hbar$, $3\hbar$, $5\hbar$, $7\hbar$.
A hozzájuk tartozó valószínűségek pedig az együtthatók négyzete:$\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{36}$ - amik rendben vannak, mert összegük 1.

2. Egy részecske hullámfüggvénye a következő:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } |x| \le 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

Adjuk meg a részecske kvantumállapotanak síkhullámok szerinti kifejtési-együttható függvényét! *[6 pont]*

Megoldás:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} \psi(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) e^{-ikx}dx$$

Első tag: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^1 e^{-ikx}dx + \int_0^1 e^{ikx}dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(kx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\sin k$

Második tag:$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} x^2e^{-ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^1 x^2e^{-ikx}dx + \int_0^1 x^2e^{ikx}dx\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 x^2\cos(kx)dx =$
$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[\frac{x^2}{k}\sin(kx)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{k}\sin(kx)dx\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k}\sin k + 2\left(\left[\frac{x}{k^2}\cos(kx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{k^2}\cos(kx)dx\right)\right) =$
$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k}\sin k + 2\frac{1}{k^2}\cos k - 2\left[\frac{1}{k^3}\sin(kx)\right]_0^1\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k}\sin k + 2\frac{1}{k^2}\cos k - 2\frac{1}{k^3}\sin k\right)$

a két taggal együtt:

$$\tilde{\psi}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\sin k - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k}\sin k + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}\cos k - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^3}\sin k = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k^2}\cos k + \frac{1}{k^3}\sin k\right)$$

3. a., Számítsuk ki a $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$ kommutátort, ahol $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ a harmonikus oszcillátor Hamilton operátora!

Megoldás:
$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \left[\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \hat{a}^\dagger\right] = \hbar\omega\left(\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right) =$
$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = -\hbar\omega\left(\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a}^\dagger\right) = -\hbar\omega\left(\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]\hat{a}^\dagger\right) = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger$

b., Lássuk be a $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$ operátor egyenlőséget! *[4 pont]*

Megoldás:
A második e-ad tagot sorbafejtjük:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger\left(-1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}t - \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^2 - ...\right) = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$$

Ha beírjuk mindenhova az $\left[\hat{a}^\dagger, \hat{H}\right] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger$ kommutátort és rendezzük az egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\hat{a}^\dagger\left(1 + i\omega t + \frac{1}{2}(i\omega t)^2 ...\right) = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$$

Látható, hogy a kapott kifejezés az exponenciális függvény definíciója, így az egyenlőség egy előjel híján teljesül.

4. Írjuk fel a

$$\psi(x) = A\sin^2\left(\frac{4\pi}{d}x\right) - A\cos^2\left(\frac{4\pi}{d}x\right)$$

állapotot periódikus határfeltétel mellett impulzus sajátállapotok lineáris kombinációjaként! Mekkora A értéke, ha fizikai állapotról van szó? *[6 pont]*

Megoldás:
Alakítsuk át a hullámfüggvényt:

$$\psi(x) = A\sin^2\left(\frac{4\pi}{d}x\right) - A\cos^2\left(\frac{4\pi}{d}x\right) = -A\cos\left(\frac{8\pi}{d}x\right)$$

Megjegyzés: a negatív előjelet bevittük A-ba.
Az A értéke a normálásból kapható meg:

$$1 = \|\psi\| = \int_0^d \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^d |A|^2\cos^2\left(\frac{8\pi}{d}x\right)dx =$$

$$= \frac{|A|^2}{2}\int_0^d \left(\cos\left(\frac{16\pi}{d}x\right) + 1\right)dx = \frac{|A|^2}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{16\pi}{d}x\right)}{\frac{d}{16\pi}} + x\right]_0^d = \frac{|A|^2}{2}d = 1$$

Innen: $A = \sqrt{\frac{2}{d}}$

A hullámfüggvény sajátfüggvények szerinti kifejtése:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{d}x}.$$

A c_n együtthatók kiszámításának módja:

$$c_n = (\psi_n, \psi) = \frac{A}{\sqrt{d}} \int_0^d \cos\left(\frac{8\pi}{d}x\right) e^{i\frac{2\pi n}{d}x} dx =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{d}} \int_0^d \left(e^{i\frac{8\pi}{d}x} + e^{-i\frac{8\pi}{d}x}\right) e^{i\frac{2\pi n}{d}x} dx = \frac{A}{2}\sqrt{d} \cdot \delta_{n,-4} + \frac{A}{2}\sqrt{d} \cdot \delta_{n,4}$$

Vagyis a kifejtési együtthatók közül csak 2 nem nulla:

$$c_n = \frac{A}{2}\sqrt{d} \cdot \delta_{n,-4} + \frac{A}{2}\sqrt{d} \cdot \delta_{n,4}$$

Behelyettesítve A értékét a hullámfüggvény:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{d}x} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{-8\pi}{d}x} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{8\pi}{d}x}$$

Kvantummechanika ZH 1 B (2012.11.05.)

1. Két részecske (a és b) fizikai állapotait a következő hullámfüggvények írják le:

$$\Psi_a(r,\theta,\phi) = \Big[\frac{1}{\sqrt{7}}e^{3i\phi} + \frac{2}{\sqrt{7}}e^{5i\phi} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{7i\phi} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{11i\phi}\Big].$$

$$\Psi_b(r,\theta,\phi) = \Big[\frac{1}{2}e^{i\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{4i\phi} + \frac{1}{\sqrt{5}}e^{3i\phi} + \frac{3}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}i\phi}\Big].$$

Milyen lehetséges értékeket mérhetünk a kísérletek során az egyes részecskék impulzus-momentumának z-komponensére? Mik a mérésekhez tartozó valószínűségek? (Individuális méréseket végzünk a és b részecskékre.) *[4 pont]*

Megoldás:
Az b részecskét leíró hullámfüggvény nem fizikai állapotot ír le - nem lehet megoldani, mivel az együtthatók négyzetösszege nagyobb, mint 1. Továbbá nem lehet $\frac{1}{2}\hbar$-t mérni, mert nem egész.
Az a részecskénél felhasználva, hogy $\Psi(r,\theta,\phi) = f(r,\theta)e^{\frac{i}{\hbar}K\phi}$, a mérhető értékek rendre $3\hbar$, $5\hbar$, $7\hbar$, $11\hbar$. A hozzájuk tartozó valószínűségek pedig az együtthatók négyzete: $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}$ - amik rendben vannak, mert összegük 1.

2. Egy részecske hullámfüggvénye a következő:

$$\psi(x) = \begin{cases} |x^3|, & \text{ha } |x| \le 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 1 \end{cases}$$

Adjuk meg a részecske kvantumállapotanak síkhullámok szerinti kifejtési-együttható függvényét! *[6 pont]*

Megoldás:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left|x^3\right|e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}(-x)^3e^{-ikx}dx + \int_0^1 x^3e^{-ikx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^1 x^3e^{ikx}dx + \int_0^1 x^3e^{-ikx}dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 x^3\cos(kx)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left[\frac{x^3}{k}\sin(kx)\right]_0^1 - 3\int_0^1\frac{x^2}{k}\sin(kx)dx\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k}\sin k + 3\left(\left[\frac{x^2}{k^2}\cos(kx)\right]_0^1 - 2\int_0^1\frac{x}{k^2}\cos(kx)dx\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k}\sin k + 3\frac{1}{k^2}\cos k - 6\left(\left[\frac{x}{k^3}\sin(kx)\right]_0^1 - \int_0^1\frac{1}{k^3}\sin(kx)dx\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k} \sin k + 3\frac{1}{k^2} \cos k - 6\frac{1}{k^3} \sin k - 6 \left[\frac{1}{k^4} \cos(kx) \right]_0^1 \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k} \sin k + 3\frac{1}{k^2} \cos k - 6\frac{1}{k^3} \sin k - 6\frac{1}{k^4} \cos k + 6\frac{1}{k^4} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \left(\sin k + \frac{3}{k} \cos k - \frac{6}{k^2} \sin k - \frac{6}{k^3} \cos k + \frac{6}{k^3} \right)$$

3. a., Számítsuk ki a $[\hat{a}^\dagger, \hat{H}]$ kommutátort, ahol $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ a harmonikus oszcillátor Hamilton operátora!

Megoldás:
$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \left[\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \hat{a}^\dagger\right] = \hbar\omega\left(\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\right) =$
$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]\right) = \hbar\omega\hat{a}^\dagger$

b., Lássuk be a $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$ operátor egyenlőséget! *[4 pont]*

Megoldás:
A második e-ad tagot sorbafejtjük:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger \left(-1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}t - \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^2 - ... \right) = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$$

Ha beírjuk mindenhova az $\left[\hat{a}^\dagger, \hat{H}\right] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger$ kommutátort és rendezzük az egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\hat{a}^\dagger \left(1 + i\omega t + \frac{1}{2}(i\omega t)^2 ... \right) = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}$$

Látható, hogy a kapott kifejezés az exponenciális függvény definíciója, így az egyenlőség egy előjel híján teljesül.

4. Írjuk fel a

$$\psi(x) = A\cos^2\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$$

állapotot periódikus határfeltétel mellett impulzus sajátállapotok lineáris kombinációjaként! Mekkora A értéke, ha fizikai állapotról van szó? *[6 pont]*

Megoldás:
Alakítsuk át a hullámfüggvényt:

$$\psi(x) = A\cos^2\left(\frac{2\pi}{d}x\right) = A\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right) + 1}{2}$$

Az A értéke a normálásból kapható meg:

$$1 = \|\psi\| = \int_0^d \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^d |A|^2 \left(\frac{\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)+1}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{|A|^2}{4}\int_0^d \left(\cos^2\left(\frac{4\pi}{d}x\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)+1\right)dx = \frac{|A|^2}{4}\int_0^d \left(\frac{\cos\left(\frac{8\pi}{d}x\right)+1}{2} + 2\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)+1\right)dx =$$

$$= \frac{|A|^2}{4}\left[\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{d}x\right)}{\frac{2d}{8\pi}} + 2\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{d}x\right)}{\frac{d}{4\pi}} + \frac{3}{2}x\right]_0^d = \frac{3}{8}|A|^2 d = 1$$

Innen: $A = \sqrt{\frac{8}{3d}}$

A hullámfüggvény sajátfüggvények szerinti kifejtése:

$$\psi = \sum_n c_n\psi_n = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{d}x}.$$

A c_n együtthatók kiszámításának módja:

$$c_n = (\psi_n, \psi) = \frac{A}{\sqrt{d}}\int_0^d \cos^2\left(\frac{2\pi}{d}x\right)e^{i\frac{2\pi n}{d}x}dx = \frac{A}{2\sqrt{d}}\int_0^d \left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)\right]e^{i\frac{2\pi n}{d}x}dx.$$

Az első tag számítása:

$$\frac{A}{2\sqrt{d}}\int_0^d e^{i\frac{2\pi n}{d}x}dx = \frac{A}{2\sqrt{d}}\left[\frac{e^{i\frac{2\pi n}{d}x}}{i\frac{2\pi n}{d}}\right]_0^d = \frac{A}{2}\sqrt{d}\cdot\delta_{n,0}$$

A második tag számítása (kihasználva a sajátfüggvények ortonormalitását):

$$\frac{A}{2\sqrt{d}}\int_0^d \cos\left(\frac{4\pi}{d}x\right)e^{i\frac{2\pi n}{d}x}dx = -\frac{A}{4\sqrt{d}}\int_0^d \left(e^{i\frac{4\pi}{d}x} + e^{-i\frac{4\pi}{d}x}\right)e^{i\frac{2\pi n}{d}x}dx =$$

$$\frac{A\sqrt{d}}{4}\int_0^d \psi^*_{-2}(x)\psi_n(x)dx\frac{A\sqrt{d}}{4}\int_0^d \psi^*_2(x)\psi_n(x)dx = \frac{A}{4}\sqrt{d}\cdot\delta_{n,-2} + \frac{A}{4}\sqrt{d}\cdot\delta_{n,2}.$$

Vagyis a kifejtési együtthatók közül csak 3 nem nulla:

$$c_n = \frac{A}{2}\sqrt{d}\delta_{n,0} + \frac{A}{4}\sqrt{d}\cdot\delta_{n,-2} + \frac{A}{4}\sqrt{d}\cdot\delta_{n,2}.$$

Behelyettesítve A értékét a hullámfüggvény:

$$\psi = \sum_n c_n\psi_n = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{d}x} = \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\frac{-4\pi}{d}x} + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\frac{4\pi}{d}x}.$$

Megjegyzés: Észrevehető, hogy az így kapott hullámfüggvény nem-fizikai állapotot ír le.