2015/16/1 Kvantummechanika B Pót.ZH

2015. december 15.

Beugró rész

Az alábbi rész megoldása kötelező! Aki ezt nem teljesíti, az nem kaphat elégtelentől különböző érdemjegyet!

1. Mi az a Hamilton operátor? Hogy írjuk fel koordináta reprezentációban?
2. Vegyünk egy egydimenziós potenciálban mozgó E energiájú részecskét. Mikor lehetnek kötött állapotai?
3. Írjunk fel egy tetszőleges hermitikus mátrixot. Mik a sajátértékei?
4. Mi a degeneráció?

ELSŐ ZH PÓTLÁSA

Hullámfüggvény kifejtés

Ismerjük az egydimenziós téren ható impulzusoperátor sajátértékeit és saját-függvényeit periodikus határfeltétel mellett (hullámfüggvény d eltolásra invariáns). Fejtsük ezen saját-függvények bázisán az alábbi hullámfüggvényt:

$$\Psi(x) = N \cos^2\left(\frac{2\pi}{d}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{d}x\right)$$

Számoljuk ki a normálási tényezőt is!

Kötött állapotok

Adott egy potenciál csövünk, melynek keresztmetszete négyzet alakú a,b oldalhosszakkal. Ezen kívül a potenciál végtelen. Azonban a cső hosszanti irányában harmonikus potenciál van. Tehát

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$$

ha $0 < x < a$, illetve $0 < y < b$, mindenhol másutt végtelen.

a. Adjuk meg a kötött állapotok energiáját, és az energia saját-függvényeket!

b. Hogy kéne kiszámolni a hely és impulzus szórását? Csak jelöljük ki az egyenleteket!

c. Hogyan fog fejlődni az alapállapot időben?

Perturbáció számítás

Számítsuk ki a harmonikus oszcillátor energiájának első relativisztikus korrekcióját a nemdegenerált perturbációszámítást használva. Használjunk léptető operátorokat!

Impulzusmomentum

Adjuk meg egy olyan állapotot leíró hullámfüggvényt, amelyen az impulzus momentum z komponensét mérve 0.3 valószínűséggel mérünk $\hbar$-t, 0.4-el $2\hbar$-t, és 0.3-al $\hbar$-t!

MÁSODIK ZH PÓTLÁSA

Variációs módszer

Adjunk a harmonikus potenciálhoz egy μx^6 korrekció, ahol μ valamilyen értelemben kicsi. Alkalmazzunk variációs módszert ugyanazzal az próbafüggvénnyel, amit a sima harmonikus oszcillátornál alkalmaztunk. Határozzuk b hangoló paramétert!

Sokállapotú rendszer

Legyenek a Hamilton és annak perturbációja az alábbiak:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Milyen viszonyban kell lennie w az ϵ energiákkal, ha perturbációs számítást szeretnénk alkalmazni? Tegyük fel, hogy ez teljesül! Adjuk meg az energiaszintek felhasadásának módját! Miután általánosan kiszámoltuk adjunk konkrét értékeket, legyen $\epsilon_i = (1+i)\epsilon$, míg $w = \frac{4}{3}\epsilon$. Legyenek a kezdetben alapállapoti energiák $s_1 = s_2 = \epsilon_0$, és így a többi $p_1 = p_2 = \epsilon_1$, $d_1 = d_2 = \epsilon_2$. A perturbáló Hamiltonit bekapcsolva ezek értéke változik meg. Kezdetben a sorrend $(s_1, s_2, p_1, p_2, d_1, d_2)$ volt, persze indexek felcserélésének erejéig. Határozzuk meg az új sorrendet! Készíts ábrát is a szintek felhasadásáról!

Speciálisan választott paraméterek

Adott egy olyan rendszer, hogy x, y irányban be van zárva egy dobozba, z irányban pedig kvadratikus potenciálban mozog!

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 + V(x,y)_{\text{doboz}} \tag{2}$$

A doboz méretei a, b, ahol $a = b$. Abban az érdekes helyzetben vagyunk, hogy van egy összefüggés a kvadratikus potenciál paramétere és a doboz paramétere között:

$$2\omega = \frac{\hbar\pi^2}{ma^2} \tag{3}$$

a. Melyik a legalacsonyabb degenerált energiaszint? Hányszorosan degenerált? Mik a hozzá tartozó hullámfüggvények?

b. Van-e háromszorosan degenerált energiaszint? Mik a hullámfüggvények?

c. Vegyük az utóbbi esetet. Adjunk a potenciálhoz egy $V(x,y)_p = \lambda xyz$ tagot. Adjuk meg a szintek felhasadását. Ábrázoljuk ezt a szokásos diagramon is!

Segítségképpen itt van H_3 polinom:

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x \tag{4}$$

Továbbá hasznos integrálok:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_3(\sqrt{\alpha}z)e^{-2\alpha z^2}\mathrm{d}z = -\frac{3}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{5}$$

$$\int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \frac{a^2}{4} \tag{6}$$

Segítség: ha ismert a doboz és az oszcillátor hullámfüggvénye, akkor könnyesén felírható e rendszer hullámfüggvényre a kérdéses állapotokban. Ekkor viszont ezekkel az integrálokkal a W_{nm} mátrix minden egyéb integrálás nélkül felírható, és sajátértékproblémája megoldható, és még szép is!

Spin operátorok

Ismertek a Pauli-mátrixokkal felírható spin operátorok. Határozzuk meg sajátértékeiket, és sajátvektoraikat. Ezek után írjuk fel az alábbi mátrixot:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \tag{7}$$

Mik ennek sajátértékei? Ezután konstruáljuk meg az alábbi operátorokat:

$$S_\pm = S_x \pm iS_y \tag{8}$$

Hogy hatnak ezek az S_z sajátállapotokra? Jogos e a léptető operátor elnevezés?